

三元素集中的自封闭加法与 2^n 系列伪随机信号编码

何继善

(中南大学 信息物理工程学院, 湖南 长沙, 410083)

摘要: 建立 $-1, 0, 1$ 三元集中的自封闭加法和 2^n 系列伪随机信号编码原理, 据此得出包含任意个主频的随机信号。研究表明: 各主频的振幅均匀, 在对数坐标中等距离分布; 2^n 系列伪随机信号是地球物理探测、仪器测试、频率域雷达等的理想信号。

关键词: 三元素集合; 自封闭加法; 2^n 系列伪随机信号

中图分类号: P631

文献标志码: A

文章编号: 1672-7207(2010)02-0632-06

Closed addition in a three-element set and 2^n sequence pseudo-random signal coding

HE Ji-shan

(School of Info-physics and Geomatics Engineering, Central South University, Changsha 410083, China)

Abstract: The closed addition rules in three-element $(-1, 0, 1)$ set and the 2^n sequence pseudo-random signal coding principles were established, from which the pseudo-random signals with any number of main frequencies were generated and characterized by similar amplitude and equal distance distribution in log coordinate for these main frequencies. The results show that the 2^n sequence pseudo-random signal is an ideal one for geophysical prospecting, equipment testing and frequency domain radar.

Key words: three-element set; closed addition; 2^n sequence pseudo-random signal

在科学研究和实验探测中, 常常需要对被研究对象的频率特性进行研究, 例如: 任何电子放大器都需要测量其频率特性; 电磁测深根据地下岩石的频率响应求得不同深度的电性参数; 根据激发极化的频率特性有可能区分异常源性质; 根据外层材料的频率特性有可能利用频率域雷达来探测隐身飞机, 等等。以往的频率域探测都是采用“变频法”, 即改变频率, 在每个频率下进行测量, 这不但效率低、精度低, 而且常常无法应用, 例如, 在反隐身飞机时, 雷达本来可以根据隐身飞机涂层材料的频率特性来发现它, 但是, 若对运动迅速的飞机在不同频率下逐个测量, 则无法实现。在这些研究中, 需要振幅相同(或相近)的多个

频率信号。伪随机(Pseudorandom)信号是一种有规律的、包含多种频率的信号。一般的伪随机信号, 其频率分布和幅频特性都不能满足上述要求。因此, 笔者于20世纪80年代提出 2^n 伪随机信号编码原理, 获得一种在对数频率坐标中等距离分布且振幅均匀的多频伪随机信号, 它可以广泛地用于各种频域研究中^[1-4], 包括在海洋中的应用^[5]。正因为如此, 在研制了 2^n 伪随机信号发生器和 2^n 伪随机信号电磁仪并得到实际应用后, 引起了学术界的广泛关注, “均匀广谱伪随机电磁法及应用”于2006年获得国家发明二等奖。一些研究者试图对其进行数学分析, 然而只是对其现象的描述^[6], 因此, 有必要系统讨论其原理。在此, 本文就

收稿日期: 2010-02-03; 修回日期: 2010-02-24

基金项目: 国家自然科学基金专项基金资助项目(40827002)

通信作者: 何继善(1934-), 男, 湖南浏阳人, 教授, 博士生导师, 中国工程院院士, 从事地电场理论及观测系统研究; 电话: 0731-88877075; E-mail: hejishan@mail.csu.edu.cn

“-1, 0, 1 三元集合中的自封闭加法”和“ 2^n 系列伪随机信号编码原理”进行研究。

1 -1, 0, 1 三元素集合中的自封闭加法

定义: 设存在 1 个集合 $Z_{|z|<2}$ (其中, Z 为整数集), 它由绝对值小于 2 的整数构成。 $Z_{|z|<2}$ 中共有 3 个元素: -1, 0 和 1, 规定在 $Z_{|z|<2}$ 中下列加法运算成立:

$$1+0=0+1=1 \quad (1)$$

$$1+(-1)=0 \quad (2)$$

$$0+(-1)=-1+0=-1 \quad (3)$$

有限个 1 相加等于 1, 即

$$1+1=1+1+1=1+1+\dots+1=1 \quad (4)$$

有限个 -1 相加等于 -1, 即

$$(-1)+(-1)=(-1)+(-1)+(-1)=(-1)+(-1)+\dots+(-1)=-1 \quad (5)$$

有限个 0 相加等于 0, 即

$$0+0=0+0+0=0+0+\dots+0=0 \quad (6)$$

这一规定的实质是: $Z_{|z|<2}$ 中任何 2 个元素之和以及任何 1 个元素本身连加有限次之和, 其结果仍然包含在 $Z_{|z|<2}$ 中。该加法还具有如下性质。

(1) 1, 0, -1 三元素之间加法的单次运算, 满足加法的交换律和结合律:

$$1+0=0+1, 0+(-1)=(-1)+0, 1+(-1)=(-1)+1 \quad (7)$$

$$1+0+(-1)=1+(-1)+0=0+1+(-1)=\dots \quad (8)$$

$$1+0+(-1)=(1+0)+(-1)=1+[0+(-1)]=[1+(-1)]+0 \quad (9)$$

(2) 在 1 个算式中, 1 或者 -1 自身重复相加 2 次或 2 次以上, 必须顺次相加, 且交换律和结合律均不成立, 如:

$$1+1+0+(-1)=0 \neq 1+(-1)+1+0=1 \quad (10)$$

$$1+1+(-1)=0 \neq 1+[1+(-1)]=1 \quad (11)$$

(3) 集合 $Z_{|z|<2}$ 中的 0 元素, 不允许拆分为其他 2 个元素之和再进行运算, 如 $1+0=1$ 中, 不可以把 0 拆分成 $1+(-1)$, 即

$$1+0=1 \neq 1+[1+(-1)]=1+1+(-1)=0 \quad (12)$$

因为拆开的结果与事实不符。

在数学中, 把满足某些运算规则的集合称为代数系统。群、环、域就是 3 个基本的代数系统, 例如, 满足某些加法规则的称为加法群, 满足某些乘法规则

的称为乘法群, 等等。加法群的定义如下。

给定 1 个非空集合 G , 它满足:

(1) 对集中每一对元素 a 和 b , $a \in G$, $b \in G$, 有唯一确定的元素 c ,

$$c=a+b, c \in G \quad (13)$$

即 G 在“+”号下是封闭的。

(2) 对任意 $a \in G$, $b \in G$, $c \in G$, 有

$$a+(b+c)=(a+b)+c \quad (14)$$

即 G 在“+”之下是可结合的。

(3) 在 G 中有 1 个 0 元素(单位元), 对任意 $a \in G$, 满足

$$a+0=0+a \quad (15)$$

(4) 对任意 $a \in G$, 有 1 个负元素(逆元) $-a$, 满足

$$a+(-a)=(-a)+a=0 \quad (16)$$

则集合 G 称为加法群。

上述 4 个条件中, 第 1 条“封闭性”是“群”的最本质的特征。如果除了上面的 4 个条件之外, G 还满足下面第 5 个条件:

(5) 对于 G 中的任何 2 个元素 a 和 b , 有

$$a+b=b+a \quad (17)$$

即群中的加法满足交换律, 就称这种群为加法交换群或阿贝尔(Abel)群。

整数集 Z 包括正整数, 负整数和 0, 满足上面的定义, 是 1 个加法群, 也是 1 个阿贝尔群。

本文研究的绝对值小于 2 的整数集合 $Z_{|z|<2}$, 显然是整数集 Z 的 1 个子集。

在加法群定义中, 规定了 G 中任何 2 个元素之和仍是 G 的元素, 但没有规定某元素自身连加若干次的和仍是该元素本身。布尔代数中虽然有 $1+1=1$, 但布尔代数不含负元素, 不能回答 $(-1)+(-1)$ 为多少的问题。所以, 本文对于集合 $Z_{|z|<2}$ 中特殊加法的规定是有实际意义的。这种特殊加法虽然不完全满足“群”定义中的结合律和交换律, 但是, 它满足“群中的任何元素以任何方式相加, 其结果均封闭在群内”这一关于“加法群”的最本质的性质。本文将 $Z_{|z|<2}$ 命名为特殊加法群, 并将该特殊加法称为 1, 0 和 -1 三元素集合中的自封闭加法。为了与普通算术加法、模 2 加法以及布尔加法等相区别, 本文规定用记号 \boxplus 来表示这种三元素加法群 $Z_{|z|<2}$ 中的自封闭加法运算。定义这种限制在三元素集合 $Z_{|z|<2}$ 中的自封闭加法, 可

由表1可见: 虽然 2^n 系列伪随机编码含有无穷个谐波成分, 但是, 只有基波和某些谐波的振幅较大, 它们可以称为主频。特别是, n 为某值的 2^n 系列伪随机编码, 其主要成分只有 n 个, 它们是 $k=1$ 的基波和 $k=2^1, 2^2, \dots, 2^{n-1}$ 的谐波, 这些主频波按 2^n 排列, 即在对数坐标上是等距离排列。而且这 n 个主要成分的振幅彼此之间相差不大, 其他的谐波振幅都很小, 能量都集中在主频上。而且与只含有1个主要成分的矩形波相比, 含有 n 个主要成分的 2^n 序列伪随机电流, 它的 n 个主要成分的振幅并不等于基波振幅的 $1/n$, 而是比基波振幅的 $1/n$ 大很多。例如, 对于伪随机3频波, 其主要成分振幅最小的为0.6366, 而不是 $1/3$; 对于伪随机5频波, 其主要成分的振幅最小的为0.4775, 而不是 $1/5$; 对于伪随机7频波, 其主要成分的振幅最小的为0.3482, 而不是 $1/7$, 等等。因此, 用这种编码形成的信号进行测试, 可以节约能量, 还可以大大提高效率^[7-9]。

4 结论

(1) $-1, 0, 1$ 三元素集合中的自封闭加法与普通的算术加法、模2加法以及布尔加法等不同, 是一种新的、特殊加法, 它为研究各种波形提供了一种有力的数学工具。

(2) 用一定的编码表达特定的波形, 可以使对复杂波形性质的研究清晰、简洁, 依据 $-1, 0, 1$ 三元素集合中的自封闭加法得出的编码规律, 能正确地推导出 2^n 系列伪随机信号波形。

(3) 由于 2^n 系列伪随机信号的主频按 2^n 分布, 而且它们的振幅均匀, 是频率域研究中的一种理想信号波形。在电法勘探中应用时, 可以节约能源, 大幅度提高观测速度和相对观测精度。

参考文献:

- [1] 何继善. 伪随机三频电法研究[J]. 中国有色金属学报, 1994, 4(1): 1-7.
HE Ji-shan. Research of pseudo-random triple-frequency electro-prospecting[J]. The Chinese Journal of Nonferrous Metals, 1994, 4(1): 1-7.
- [2] 何继善. 跨世纪的中国地球物理[J]. 中南工业大学学报: 自然科学版, 1997, 28(1): 1-21.
HE Ji-shan. Chinese geophysics in cross-century[J]. Journal of Central South University of Technology: Natural Science, 1997, 28(1): 1-21.
- [3] 何继善. 电法勘探的发展和展望[J]. 地球物理学报, 1997, 40(增刊): 308-316.
HE Ji-shan. Development and prospect of electrical prospecting method[J]. Chinese Journal of Geophys, 1997, 40(Suppl): 308-316.
- [4] 何继善. 2^n 系列伪随机信号及应用[C]//中国地球物理学会年刊. 西安: 地图出版社, 1998: 199.
HE Ji-shan. 2^n pseudo-random signal and its application[C]// Annual of the Chinese Geophysical Society. Xi'an: Earthquake Press, 1998: 199.
- [5] 何继善, 戴前伟, 汤井田. 海洋电磁法的回顾与展望——兼论拖曳式可控源伪随机信号电磁法[C]//99海洋高新技术发展研讨会论文集. 北京: 海洋出版社, 2000: 466-470.
HE Ji-shan, DAI Qian-wei, TANG Jing-tian. Review and outlook of marine electromagnetic methods: And on the pseudo-random signal electromagnetic method towed controlled source[C]// Proceedings of Symposium of Marine Hi-Tech Development 99. Beijing: Ocean Press, 2000: 466-470.
- [6] 何继善, 佟铁钢, 柳建新. 2^n 系列伪随机多频信号数学分析及实现[J]. 中南大学学报: 自然科学版, 2009, 40(6): 1666-1671.
HE Ji-shan, TONG Tie-gang, LIU Jian-xin. Mathematical analysis and realization of 2^n sequence pseudo-random multi-frequency signals[J]. Journal of Central South University: Science and Technology, 2009, 40(6): 1666-1671.
- [7] 何继善. 伪随机电法及其在国土资源大调查中的应用可能性[J]. 中国地质学会勘探地球物理专业委员会通讯, 2001(1): 20-23.
HE Ji-shan. Pseudo-random electrical prospecting method and application possibilities in the land and resource survey[J]. Newsletter for Committee of Geophysics, Geological of China, 2001(1): 20-23.
- [8] 何继善, 柳建新. 伪随机多频相位法及其应用简介[J]. 中国有色金属学报, 2002, 12(2): 374-376.
HE Ji-shan, LIU Jian-xin. A brief introduction to pseudo-random multi-frequency phase method and its application[J]. The Chinese Journal of Nonferrous Metals, 2002, 12(2): 374-376.
- [9] 何继善. 频率域电法的新进展[J]. 地球物理学进展, 2007, 22(4): 1250-1254.
HE Ji-shan. The new development of frequency domain electro-prospecting[J]. Progress in Geophysics, 2007, 22(4): 1250-1254.

(编辑 陈灿华)