牛顿二项式定理的证明及其应用

吴英，李传文，沈红梅
兰州大学数学与统计学院，甘肃兰州（730000）

摘 要：本文将二元的牛顿二项式定理借助于换元法转化为一元的形式，并且应用泰勒定理及其马克劳林级数的相关知识对其进行了证明，然后再次利用换元及乘法运算进行整理，就完整的给出了牛顿二项式定理的证明；最后给出了该定理在计算平方根精度方面的应用。

关键词：牛顿二项式，泰勒定理，泰勒级数，马克劳林级数，二项式系数
中图分类号：O174.14

0. 引言

1676 年牛顿推广了 n 为正整数的二项式定理，并得到了 $(x+y)^\alpha$ 的展开式，其中 α 为任意实数，$0 \le |x| < |y|$，后人称之为牛顿二项式定理。在学习的过程中，本文作者发现可以利用换元法将 $(x+y)^\alpha$ 转化为 $y^\alpha(1+z)^\alpha$ 的形式，其中 $z=\frac{x}{y}$，$|z|<1$。考虑函数 $f(z)=(1+z)^\alpha$，其中 $|z|<1$，满足泰勒定理及其相关定理的条件，所以对 $f(z)$ 进行泰勒展开，写为马克劳林级数的形式，然后代入 $z=\frac{x}{y}$，同时整体乘以 y^α，可以得到 $(x+y)^\alpha$ 的展开式，其恰为牛顿二项式定理的展开式。

1. 相关定义及其定理

引理 1.1 （泰勒定理[1]）若函数 f 满足如下条件：

（ i ）在开区间 (a,b) 上函数 f 存在直到 n 阶连续导数；

（ ii ）在闭区间 $[a,b]$ 内存在 f 的 $n+1$ 阶导数；

则对任何 $x \in [a,b]$，至少存在一点 $\xi \in [a,b]$，使得

$$f(x)=f(a_0)+\frac{f'(a_0)}{1!}(x-a_0)+\frac{f''(a_0)}{2!}(x-a_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a_0)}{n!}(x-a_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a_0)^{n+1}$$

上式称为函数 f 在 $x=a_0$ 处的泰勒公式。

定义 1 泰勒公式在 $a_0=0$ 时，成为马克劳林公式（Maclaurin formula）[1]，这就是

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x)$$

其中 $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$，$0<\xi<x\le b$，称 $R_n(x)$ 拉格朗日余项。

定义 2 如果函数 f 在 $x=x_0$ 处存在任何阶导数，这时称形式为

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

的级数为函数 f 在 x_0 的泰勒级数。

由泰勒定理容易推出下面的引理。

引理 1.2 设函数 f 在点 x_0 具有任意阶导数，那么 f 在区间 (x_0-r, x_0+r) 内等于它的泰勒级数的和函数的充分条件是：对一切满足不等式 $|x-x_0|<r$ 的 x，有 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$ 这里 $R_n(x)$ 是 f 在 x_0 的泰勒公式的余项。

定义 3 如果 f 能在 x_0 的某邻域内等于其泰勒级数的和函数，则称函数 f 在 x_0 的这一邻域内可以展开成泰勒级数。并称等式

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f^{'}(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f^{''}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots$$

的右端为 f 在 $x=x_0$ 处的泰勒展开式或称为幂级数展开式。

定义 4 函数 f 在 $x_0=0$ 处的展开式，即

$$f(0)+\frac{f^{'}(0)}{1!}x+\frac{f^{''}(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

称为马克劳林级数。

定义 5 令 r 为实数且 k 为整数，定义二项式系数 $\binom{r}{k}$ 如下：

$$\binom{r}{k}=\begin{cases}\dfrac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{k!}\ldots\ldots k\ge 1\\ 1\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k=0\\ 0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k\le -1\end{cases}$$

2. 牛顿二项式定理证明及其应用

定理 2.1 牛顿二项式定理（Newton’s Binomial Theorem）[2, 3]

令 α 是一个实数，则对于所有满足 $0\le|x|<|y|$ 的 x 和 y

$$(x+y)^{\alpha}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k y^{\alpha-k} \qquad (*)$$

其中 $\binom{\alpha}{k}=\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$

分析： 要证 $(*)$ 式，针对左端式子 $z=\dfrac{x}{y}$，则 $(x+y)^{\alpha}=y^{\alpha}(1+z)^{\alpha}$，其中 $|z|<1$，

考虑函数 $f(z)=(1+z)^{\alpha}$（$|z|<1$，α 是任一实数）的马克劳林级数。

证明： 令 $z=\dfrac{x}{y}$，则 $(x+y)^{\alpha}=y^{\alpha}(1+z)^{\alpha}$，其中 $|z|<1$。

不妨令 $f(z)=(1+z)^{\alpha}$，其中 $|z|<1$。

对于 $\forall z_0\in\{z\,\|z|<1\}$，$f(z)$ 在 z_0 具有任意阶导数，这时

$$f^{(n)}(z)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+z)^{\alpha-n} \qquad n=1,2\cdots$$

$f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1) \qquad n=1,2\cdots$

于是 $f(z)$ 的马克劳林级数是

$$1+\frac{\alpha}{1!}z+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}z^n+\cdots$$

在 $(-1,1)$ 内考察它的柯西余项

$$R_n(z)=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}z^{n+1}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta z}\right)^n(1+\theta z)^{\alpha-1}$$ ，其中 $0\le\theta\le 1$ 。

由比式判别法，级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}z^{n+1}$ ，当 $|z|<1$ 时收敛，故有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}z^{n+1}=0 ,$$

由于 $|z|<1$，所以 $1-\theta<1+\theta z$，且 $0\le\frac{1-\theta}{1+\theta z}<1$，从而有 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta z}\right)^n=0$，

再有 $0<1+\theta z<1+|z|<2$ ，于是

$$0<(1+\theta z)^{\alpha-1}<2^{\alpha-1}$$

故对于任意给定的实数 α，$(1+\theta z)^{\alpha-1}$ 是与 n 无关的有界量。

综上所述，当 $|z|<1$ 时，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}z^{n+1}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta z}\right)^n(1+\theta z)^{\alpha-1}=0$$

即 $\lim_{n\to\infty}R_n(z)=0$ ，所以在 $-1<z<1$ 上，有

$$(1+z)^{\alpha}=1+\frac{\alpha}{1!}z+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}z^n+\cdots$$

令 $z=\frac{x}{y}$ 代入上式，得

$$\left(1+\frac{x}{y}\right)^{\alpha}=1+\frac{\alpha}{1!}\frac{x}{y}+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\left(\frac{x}{y}\right)^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\left(\frac{x}{y}\right)^n+\cdots$$

其中 $0\le|x|<|y|$，进而 $(x+y)^{\alpha}=y^{\alpha}\left(1+\frac{x}{y}\right)^{\alpha}$

$$=y^{\alpha}+\frac{\alpha}{1!}xy^{\alpha-1}+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2y^{\alpha-2}+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^ny^{\alpha-n}+\cdots$$

$$=\binom{\alpha}{0}x^0y^{\alpha}+\binom{\alpha}{1}x^1y^{\alpha-1}+\binom{\alpha}{2}x^2y^{\alpha-2}+\cdots+\binom{\alpha}{n}x^ny^{\alpha-n}+\cdots$$

即 $(x+y)^{\alpha}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^ky^{\alpha-k}$，其中 $0\le|x|<|y|$，$\binom{\alpha}{k}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$ □

对于形如 $(x-y)^{\alpha}$ 的情况，我们同样可以得到 $(x-y)^{\alpha}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{\alpha-k}\binom{\alpha}{k}x^ky^{\alpha-k}$

当 α 为正整数 n 时，

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$$

由于 n,k 均为正整数，且 $n<k$，所以 $\binom{n}{k}=0$，从而可得

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k} \qquad \text{（二项式定理）}$$

当 α 为负整数 $-n$ 时，$\binom{\alpha}{k}=\binom{-n}{k}=\dfrac{-n(-n-1)\cdots(-n-k+1)}{k!}$

$$=(-1)^k\frac{n(n+1)\cdots(n+k-1)}{k!}=(-1)^k\binom{n+k-1}{k}$$

$$(x+y)^{-n}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-n}{k}x^k y^{-n-k}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{n+k-1}{k}x^k y^{-n-k} \qquad \text{其中} 0\le|x|<|y|.$$

3．牛顿二项式定理的应用

牛顿二项式定理可以用来得到任意精度的平方根[1]。

如果取 $\alpha=\dfrac{1}{2}$，那么 $\binom{\alpha}{0}=1$，而对于 $k>0$，

$$\binom{\alpha}{k}=\binom{\frac{1}{2}}{k}=\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\dots(\frac{1}{2}-k+1)}{k!}=\frac{(-1)^{k-1}}{2^k}\frac{(2-1)(4-1)\dots(2k-2-1)}{k!}$$

$$=\frac{(-1)^{k-1}}{2^k}\frac{1\cdot3\cdot5\dots(2k-3)}{k!}=\frac{(-1)^{k-1}}{2^k}\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\dots(2k-2)}{2\cdot4\cdot6\dots(2k-2)\cdot k!}$$

$$=\frac{(-1)^{k-1}}{2^k}\frac{(2k-2)!}{2^{k-1}((k-1)!)^2 k}=\frac{(-1)^{k-1}}{k2^{2k-1}}\binom{2k-2}{k-1}$$

因此，对 $|z|<1$，$\sqrt{1+z}=(1+z)^{\frac{1}{2}}=1+\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k-1}}{k\cdot2^{2k-1}}\binom{2k-2}{k-1}z^k$

$$=1+\frac{1}{2}z-\frac{1}{2\cdot2^3}\binom{2}{1}z^2+\frac{1}{3\cdot2^5}\binom{4}{2}z^3-\dots$$

例如：$\sqrt{20}=4\sqrt{1+0.25}=4\times[1+\dfrac{1}{2}\times0.25-\dfrac{1}{8}\times(0.25)^2+\dfrac{1}{16}\times(0.25)^3-\dots.]=4.472$

参考文献

[1]华东师范大学数学系.《数学分析》[M].北京：高等教育出版社.1991.10 (66-73).
[2]Richard A.Brualdi. Introductory Combinatones(Fourth Edition.)[M].Beijing:China machine, Press. 2005.3 (136-137,147-150).
[3]王元元，王庆瑞等.《组合数学理论与题解》[M].上海：上海科学技术文献出版社. 1989．7.

Proof of Newton's Binomial Theorem and Its Application

Wu Ying，Li Chuanwen，Shen Hongmei
School of Mathematics and Statistics, Lanzhou University, Gansu Lanzhou (73000)

Abstract
In this paper, we have introduced the method of change-element to prove Newton's Binomial Theorem, changed its expression from two-element to one-element, and then apply Taylor theorem, Taylor's series and Maclaurin series to the proof of it. After that,apply the method of change-element and multiplication principle to it, the perfectly proof of Newton's Binomial theorem is given. We also have given the application of Newton's Binomial Theorem in the calculation about precision of square root.
Keywords: Taylor Theorem, Talyor's series, Binomial coefficients, Maclaurin series, Newton's Binomial
CLC Number：**O174.14**

作者简介：吴英（1980-），女，山东郓城人，在读硕士，研究方向:非线性泛函分析。