一类时滞微分方程解的存在性

李瑞瑞
（中国矿业大学理学院，江苏徐州 221116）

摘要： 本文应用 Schauder 不动点理论研究了二阶时滞微分方程两点边值问题解的存在性:通过对非线性项中第三变元单调性的适当限制，将上下解方法应用到该微分方程边值问题中来，得到了一定条件下问题解的存在性，用迭代序列收敛到了该问题的近似解。本文所采用的主要技巧和方法是：利用上、下解方法及相应算子的性质得到了时滞微分方程边值问解的存在性。

关键词： 时滞微分方程；边值问题 ；不动点 ； 上、下解 ； 全连续算子
中图分类号： O175

The Existence of Solution of the delay differential equation

LI Ruirui
(College of Science,China University of Mining and Technology, Xuzhou 221116)

Abstract: In this paper ,we apply the fixed point thoery for the two-point boundary value problem of the delay differential equation . We made some restriction on the nonlinear term，assuming that it is nondecreasing .then we apply the upper and lower solution for the delay differential equation.Also ,we obtain some conditions of the existence of its solutions . At last ,we used the sequence consistently converging its solutions In this paper ,the main methods and technique we use is as follows: We made some restriction on the nonlinear term，assuming that it is nondecreasing .Using the method of upper and lower solutions and the property operators ,we got the existence of the problem

Key words: delay differential equation;boundary value problem ; the fixed point ; the upper and lower solutions ; completely continuous operator

0 引言

时滞微分方程是现代应用数学的一个重要分支。由于利用时滞微分方程描述问题充分考虑到了时间滞后的影响，更能准确地反映实际，因此时滞微分方程作为数学模型广泛的应用于力学、控制理论、生态学、管理学、经济学及流行病学等许多领域中。时滞微分方程的解的动力学性质的研究是现代数学的热门问题之一，而分支理论是动力系统理论的重要组成部分。时滞微分方程在机械控制系统中尤其常见，对机械模型中的问题建立相应的数学模型也便成为时滞微分方程系统应用的一个主要方面，也是一个相当具有实际意义的应用课题。通过阅读相关文献[1][2][3]，本文用不动点理论及上、下解方法对一类这种类型的微分方程进行了研究。此外，本文利用 Green 函数，使积分算子的表达式在运算和推导中更为简单。

1 预备知识

1.1 基本定义

定义 1.1[4] 设 M 是 Banach 空间 E 中的子集，若 M 中任意序列 $\{x_n\}$ 都有子列 $\{x_{n_i}\}$ 收敛于某 $x^* \in E$ ，则称 M 是 E 中的相对列紧集

作者简介： 李瑞瑞（1985-），女，硕士，常微分方程. E-mail: cumtxjlrr@163.com

定义 1.2[4] 若 A 将 D 中的任何有界集 S 映成 E 中的相对列紧集，则称 $A:D\to E$ 为紧算子

定义 1.3[4] 若算子 $A\in C(D,E)$，并且紧，则称 A为全连续算子

定义 1.4[5]

对二阶常微分方程两点边值问题
$$\begin{cases} u''=f(t,u,u') \\ a_1u(0)-a_2u'(0)=A \\ b_1u(1)+b_2u'(1)=B \end{cases},$$

其中 f(t,x,y)：$J\times R\times R\to R$ 连续（J=[0,1]），$a_1+a_2>0$，$b_1+b_2>0$，$a_1,a_2,b_1,b_2\ge 0$，$a_1+b_1>0$，

若函数 $v(t)\in C^2(J,R)$,满足：
$$\begin{cases} v''\ge f(t,v(t),v'(t)) \\ a_1v(0)-a_2v'(0)\le A \\ b_1v(1)+b_2v'(1)\le B \end{cases},$$

则称 $v(t)$ 是上述两点边值问题的下解；

若函数 $w(t)\in C^2(J,R)$,满足：
$$\begin{cases} w''\le f(t,w(t),w'(t)) \\ a_1w(0)-a_2w'(0)\ge A \\ b_1w(1)+b_2w'(1)\ge B \end{cases},$$

则称 $w(t)$ 是上述两点边值问题的上解

1.2 基本定理

引理 1.2.1 对问题（i）$\begin{cases} y''(t)+f(t,y(t),y'(t))=0 \\ y(a)=y(b)=0 \end{cases}$

等价于积分方程
$$y(t)=\int_a^b G(t,s)f(t,y(s),y'(s))ds$$

其中 $G(t,s)=\begin{cases} (b-t)\times(s-a)/(b-a) & a\le s\le t\le b \\ (b-s)\times(t-a)/(b-a) & a\le t\le s\le b \end{cases}$

称为上述边值

问题的 Green 函数

证明：由 $y''(t)=-f(t,y(t),y'(t))$ 及数学分析知识知：
$$y'(t))=-\int_a^t f(s,y(s),y'(s))ds+C_1$$

进一步

$$y(t)=-\int_a^t\int_a^\tau f(s,y(s),y'(s))dsd\tau+C_1t+C_2$$ 由 $y(a)=y(b)=0$ 知

$$\begin{cases}C_1a+C_2=0\\ -\int_a^b\int_a^\tau f(s,y(s),y'(s))dsd\tau+C_1b+C_2=0\end{cases}$$

于是

$$\begin{cases}C_1=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b\int_a^\tau f(s,y(s),y'(s))dsd\tau=\int_a^b(b-s)f(s,y(s),y'(s))ds\\ C_2=-\dfrac{a}{b-a}\int_a^b(b-s)f(s,y(s),y'(s))ds\end{cases}$$

故

$$\begin{aligned}y(t)&=-\int_a^t\int_s^t f(s,y(s),y'(s))d\tau ds+\frac{t}{b-a}\int_a^b(b-s)f(s,y(s),y'(s))ds\\ &-\frac{a}{b-a}\int_a^b(b-s)f(s,y(s),y'(s))ds\\ &=\int_a^t(s-t)f(s,y(s),y'(s))ds+\frac{t}{b-a}\int_a^b(b-s)fds-\frac{a}{b-a}\int_a^b(b-s)fds\\ &=\int_a^b G(t,s)f(s,y(s),y'(s))ds\end{aligned}$$

其中 G（t，s）的定义如上

上述过程的逆过程显然成立，所以导数形式的微分边值问题与积分形式等价，得证结论。

引理 1.2.2　Green 函数具备的一些性质：

（1）0≤G（t，s）≤ $\dfrac{b-a}{4}$　(2) $\int_a^b G(t,s)ds\le\dfrac{(b-a)^2}{8}$　(3) $\int_a^b|G_t(t,s)|ds\le\dfrac{b-a}{2}$

证明：（1）G（t，s）≥0 显然

对固定的 t , G（t，s）在 s=t 处达到最大值，且 G(t,t)在 t= $\dfrac{b+a}{2}$ 处取得最大值 $\dfrac{b-a}{4}$　故（1）成立

另

$$\int_a^b G(t,s)ds=\frac{b-t}{b-a}\int_a^t(s-a)ds+\frac{t-a}{b-a}\int_t^b(b-s)ds=\frac{(b-t)(t-a)^2}{2(b-a)}+\frac{(t-a)(b-t)^2}{2(b-a)}=\frac{(b-t)(t-a)}{2}\le\frac{(b-a)^2}{8}$$

故（2）得证

（3）$\int_a^b|G_t(t,s)|ds=\dfrac{1}{b-a}\int_a^t(s-a)ds+\dfrac{1}{b-a}\int_t^b(b-s)ds=\dfrac{(t-a)^2+(b-t)^2}{2(b-a)}\le\dfrac{b-a}{2}$

引理 1.2.3　（schauder 不动点定理）

设 K 是 Banach 空间 E 的有界闭凸集，而 T：$K\to K$ 全连续的，则$\exists x^{*}\in K,\ni Tx^{*}=x^{*}$(证明详见文献[5])

引理 1.2.4 设$\{x_n\}$是单调序列，又是相对列紧的，则$\{x_n\}$是收敛序列，更进一步，若$\{x_n\}$是单调增加的，则有$x_n\le x^{*}$，$n=1,2\ldots$，其中x^{*}是$\{x_n\}$的极限；若$\{x_n\}$是单调减少的，则有$x^{*}\le x_n$，$n=1,2\ldots$ （证明详见文献[6] P_2引理 1.1.2）

2 主要结果

$$\begin{cases}x''(t)=f(t,,x(t),x(t-\tau))\\x(a)=x(b)=0\\x(t)=0,-\tau\le t\le a\end{cases}\qquad(1)$$

引理：$\alpha(t),\beta(t)$分别是（*）在 J=[0,1]上的上、下解，且$\alpha(t)\le\beta(t)$ $t\in J$ ，将此解延拓到区间$[-\tau,1]$，只需令$\alpha(t)=\alpha(0)$ $t\in[-\tau,0]$ ； $\beta(t)=\beta(0)$ $t\in[-\tau,0]$

修正函数$f(t,x(t),x(t-\tau))$:

$$F^{*}(t,x(t),x(t-\tau))=\begin{cases}f(t,x(t),\beta(t-\tau)) & x(t-\tau)\ge\beta(t-\tau)\\f(t,x(t),x(t-\tau)) & \alpha(t-\tau)\le x(t-\tau)\le\beta(t-\tau)\\f(t,x(t),\alpha(t-\tau)) & x(t-\tau)\le\alpha(t-\tau\}\end{cases}$$

进一步修正$F^{*}(t,x(t),x(t-\tau))$

$$F(t,x(t),x(t-\tau))=\begin{cases}F^{*}(t,\beta(t),x(t-\tau))+(x(t)-\beta(t))/(1+x^{2}(t)) & x(t)\ge\beta(t)\\F^{*}(t,x(t),x(t-\tau)) & \alpha(t)\le x(t)\le\beta(t)\\F^{*}(t,\alpha(t),x(t-\tau))+(x(t)-\alpha(t))/(1+x^{2}(t)) & x(t)\le\alpha(t)\end{cases}$$

则$F(t,x(t),x(t-\tau))$在$J\times R\times R$上连续，且有界。

证明：有数学分析知识，连续性易证。

记

$$M_0=\max\{|f(t,x(t),x(t-\tau))|:t\in J,\alpha(t)\le x(t)\le\beta(t),\alpha(t-\tau)\le x(t-\tau)\le\beta(t-\tau)\}$$
$$+\max\{\alpha（t）\}+\max\{\beta(t)\}$$

则只要取$M=M_0+1$，就有

$$|F(t,x(t),x(t-\tau))|\le M \qquad (t,x(t),x(t-\tau))\in J\times R\times R$$

结论：假设（1）$\alpha(t),\beta(t)$分别是所讨论的时滞微分方程在J上的上、下解，且$\alpha(t)\le\beta(t)$ $t\in J$

假设（2） $f(t,x(t),x(t-\tau))$关于第三变元单调

则只要$\alpha(0)\le 0\le\beta(0),\alpha(1)\le 0\le\beta(1)$

时滞微分方程 $\begin{cases} x''(t)=f(t,,x(t),x(t-\tau)) \\ x(0)=x(1)=0 \\ x(t)=0,-\tau\le t\le 0 \end{cases}$ 有解

证明：修正 $f(t,x(t),x(t-\tau))$ 如引理中所述，以下的证明分两步

第一步：证明 $\begin{cases} x''(t)=F(t,,x(t),x(t-\tau)) \\ x(0)=x(1)=0 \\ x(t)=0,-\tau\le t\le 0 \end{cases}$ (2)有解 $x(t)$

有引理知 $F(t,x(t),x(t-\tau))$ 在 $J\times R\times R$ 上有界，令 q 为 $F(t,x(t),x(t-\tau))$ 的一个上界，只要 $q\le 8M^{\frac{1}{2}}$，$q\le 2M$，由压缩映射不动点理论知：(2)有解。

第二步：证明： $t\in J$ 时，$\alpha(t)\le x(t)\le \beta(t)$ 。

由 $F(t,x(t),x(t-\tau))$ 的定义可知，此时 $x(t)$ 即为时滞微分方程（1）的解。

要证 $\alpha(t)<=x(t)<=\beta(t)$ $t\in J$，因为 $t=a$ 及 $t=b$ 时，由假设条件知 $\alpha(0)\le x(0)\le\beta(0)$，$\alpha(1)\le x(1)\le\beta(1)$

故只需证 $\alpha(t)\le x(t)\le\beta(t)$ $t\in J^0$

下面用反证法证明之。

对 $x(t)\le\beta(t)$

假设结论不成立，即 $\exists t\in J^0$，$x(t)>\beta(t)$

于是 $\exists t_1,t_2\in J$ ，$\ni x(t_1)=\beta(t_1)$，$x(t_2)=\beta(t_2)$ 且 $x(t)>\beta(t)$ $t\in(t_1,t_2)$

则 $\exists t_0\in(t_1,t_2)$ ，$\ni x(t_0)-\beta(t_0)=\max\limits_{t\in(t_1,t_2)}\{x(t)-\beta(t)\}$

由数学分析知识易知：

$x'(t_0)=\beta'(t_0)$ ，$x''(t_0)\le\beta''(t_0)$

由 F^*，F 的定义及 $\beta(t)$ 是微分方程上解的假设

$$\begin{aligned} x''(t_0)-\beta''(t_0) &\ge f^*(t_0,\beta(t_0),x(t_0-\tau))+{(x(t_0)-\beta(t_0))}\big/{(1+x^2(t_0))}-f^*(t_0,\beta(t_0),\beta(t_0-\tau)) \\ &\ge {(x(t_0)-\beta(t_0))}\big/{(1+x^2(t_0))} \\ &>0 \end{aligned}$$

矛盾。

所以假设不成立，故 $x(t)\le\beta(t)$ ，$t\in J^0$ 结合前分析 $x(t)\le\beta(t)$ $t\in J$

同理可证 $\alpha(t)\le x(t)$ $t\in J$

综上 $\alpha(t)\le x(t)\le\beta(t)$ $t\in J$

故 $x(t)$ 即为时滞微分方程（1）的解。

结论（2）：

设上述定理的条件全部满足，又存在

M, 使得$f(t,x_1,y)-f(t,x_2,y)\le M(x_1-x_2)$ $\forall t\in J,\alpha(t)\le x_2\le x_1\le\beta(t)$，

$$\alpha(t-\tau)\le x(t-\tau)\le\beta(t-\tau) \tag{3}$$

则 BVP(2)在$D=\{x\in C(J,R^1):\alpha(t)\le x(t)\le\beta(t),t\in J\}$中必有解，且存在单调迭代序列$\{\alpha_n(t)\}$，$\{\beta_n(t)\}$，使得它们在 J 上分别一致收敛到该问题的解。

证明：令

$$q(y)=\begin{cases}\beta(t-\tau) & y>\beta(t-\tau)\\ y(t-\tau) & \alpha(t-\tau)\le y\le\beta(t-\tau)\\ \alpha(t-\tau) & y<\alpha(t-\tau)\end{cases} \tag{4}$$

对$\forall h\in D$，考察两点边值问题

$$\begin{cases}x''(t)=F(t,,x(t),x(t-\tau)) & (5)\\ x(0)=x(1)=0 & \\ x(t)=0,-\tau\le t\le 0 & (6)\end{cases}$$

其中 $F(t,x,y)=f(t,h(t),q(y))+M(x-h(t))$ (7)

由(3)(4)知：

$$f(t,x_1,q(y))-f(t,x_2,q(y))\le M(x_1-x_2) \quad \forall t\in J,\alpha(t)\le x_2\le x_1\le\beta(t),y\in R^1 \tag{8}$$

下证两点边值问题(5)(6)有唯一解。

因为 $f(t,\alpha(t),\alpha(t-\tau))-F(t,\alpha(t),\alpha(t-\tau))$

$=f(t,\alpha(t),\alpha(t-\tau))-f(t,h(t),q(\alpha(t-\tau)))-M(\alpha(t)-h(t))$

$=f(t,\alpha(t),q(\alpha(t-\tau)))-f(t,h(t),q(\alpha(t-\tau)))-M(\alpha(t)-h(t))$

$\ge M(\alpha(t)-h(t))-M(\alpha(t)-h(t))=0$

所以$\alpha''(t)\ge f(t,\alpha(t),\alpha(t-\tau))\ge F(t,\alpha(t),\alpha(t-\tau))$ 即$\alpha(t)$为边值问题(5)(6)的下解，同理可证$\beta(t)$是其上解。

又$\forall$ $x_1(t-\tau),x_2(t-\tau)\in[\alpha(t-\tau),\beta(t-\tau)]$，$x_1(t-\tau)\le x_2(t-\tau)$

$F(t,x,x_1(t-\tau))-F(t,x,x_2(t-\tau))$

$=f(t,h(t),q(x_1(t-\tau)))-F(t,h(t),q(x_2(t-\tau)))$ <0

故$F(t,x,x(t-\tau))$关于第三变元单调，由结论（1）边值问题(4.2.3) (4.2.4)在D中至少有一个解。

下证 BVP(5)(6)解唯一。

反证：设有两解$x_1(t)$，$x_2(t)$。因为$x(t)=0,-\tau\le t\le 0$ 下

证 $x_1(t)\le x_2(t),\forall t\in J$ (9)

若(9)不成立，即$\exists t\in J,\ni x_1(t)>x_2(t)$，由闭区间上连续函数的性质知：

$\exists t_0\in J,x_1(t_0)-x_2(t_0)=\max\limits_{t\in J}\{x_1(t)-x_2(t)\}>0$ ，记$\varepsilon=x_1(t_0)-x_2(t_0)$

则$x_1(t)-x_2(t)<=\varepsilon,t\in J$，在$t=0,1$处显然满足，只要证$t\in J^0,x_1(t)-x_2(t)\le\varepsilon$

此时有$x_1'(t_0)=x_2'(t_0)$ ，$x_1''(t_0)\le x_2''(t_0)$

于是$0\ge x_1''(t_0)-x_2''(t_0)$

$=f(t_0,h(t_0),q(x_1(t_0-\tau))+M(x_1(t_0)-h(t_0))-f(t_0,h(t_0),q(x_2(t_0-\tau)))-M(x_2(t_0)-h(t_0))$

$$=M(x_1(t_0)-x_2(t_0))=M\varepsilon>0$$

（τ 充分小，以使得 $x_1(t_0-\tau)>x_2(t_0-\tau)$，再由 f 关于第三变元单调）

矛盾。故(9)成立，同理可证 $x_1(t)\ge x_2(t),\forall t\in J$， 所以 $x_1(t)=x_2(t),t\in J$

这表明 bvp(5)(6)解唯一。

$\forall h\in D$，令 x_h 是 bvp(5)(6)对应 h 的唯一解，定义 $Ah=x_h$

显然 $A:D\to C(J,R^1)$，下证 A 是增算子。

设 $h_1,h_2\in D,h_1<h_2$，令 $x_1=Ah_1,x_2=Ah_2$，下证 $x_1<x_2$，$t\in J$

若不然，$t_0\in J^0$ 及 $\varepsilon>0$，使得 $x_1(t_0)-x_2(t_0)=\max\limits_{t\in J^0}\{x_1(t)-x_2(t)\}>0$，且 $x_1(t)-x_2(t)\le\varepsilon,\forall t\in J$

则 $x_1'(t_0)=x_2'(t_0)$ ，$x_1''(t_0)\le x_2''(t_0)$

所以 $0\ge x_1''(t_0)-x_2''(t_0)$

$$=f(t_0,h_1(t_0),q(x_1(t_0-\tau))+M(x_1(t_0)-h_1(t_0))-f(t_0,h_2(t_0),q(x_2(t_0-\tau)))-M(x_2(t_0)-h_2(t_0))$$
$$=M(h_1(t_0)-h_2(t_0))+M(x_1(t_0)-h_1(t_0))-M(x_2(t_0)-h_2(t_0))$$
$$=M(x_1(t_0)-x_2(t_0))=M\varepsilon>0$$

矛盾，故 A 是增算子

与上述同样的方法可以证明 $\alpha\le A\alpha,A\beta\le\beta$ (10)

作迭代序列 $\alpha_{n+1}=A\alpha_n,\beta_{n+1}=A\beta_n$，$n=0,1,2.....$

（令 $\alpha_0(t)=\alpha(t)$，$\beta_0(t)=\beta(t)$）

则显然有 $\alpha_0\le\alpha_1\le\alpha_2\le......\le\alpha_n\le...\le\beta_n\le...\le\beta_2\le\beta_1\le\beta_0$

下证 $A(D)$ 是 $C(J,R^1)$ 中的相对列紧集。

$\forall x\in A(D),\exists h\in D,\ni x=Ah$，由 A 的定义：

$x''=f(t,h(t),q(x(t-\tau)))+M(x-h(t))$，则 $\exists N,\ni|x''(t)|\le N$，这表明 $\{x''(t)|x=Ah,h\in D\}$ 是一致有界的。从而 $\{x'(t)|x=Ah,h\in D\}$ 和 $\{x(t)|x=Ah,h\in D\}$ 都是一致有界的等度连续函数。

由 Ascolis—Arzela 定理知，结论得证。

由引理 1.2.4 知：$\exists\alpha^*(t),\beta^*(t),\ni\{\alpha_n(t)\},\{\beta_n(t)\}$ 在 J 上分别一致收敛于 $\alpha^*(t),\beta^*(t)$。延拓 $\alpha_n(t)$，$\beta_n(t)$，$\ni\alpha_n(t)=\alpha^*(t)=\beta_n(t)=\beta^*(t),-\tau\le t\le 0$

又 $\alpha_n''=f(t,\alpha_{n-1}(t),q(\alpha_n(t-\tau)))+M(\alpha_n(t)-\alpha_{n-1}(t))$ (11)

令 $n\to\infty$ 得 $\alpha^{*''}(t)=f(t,\alpha^*(t),q(\alpha^*(t-\tau)))$

易知 $\alpha^*(t)$ 满足边界条件

即 $\alpha^*(t)$ 是两点边值问题(5)(6)的解，同理可证 $\{\beta_n(t)\}$ 在 J 上一致收敛到 $\beta^*(t)$，且 $\beta^*(t)$ 也是两点边值问题(5)(6)的解。

又 $\alpha^*(t)$，$\beta^*(t)\in[\alpha(t),\beta(t)]$，而 $\alpha^*(t)=\beta^*(t)=\alpha(t)=\beta(t) \quad t\in[-\tau,0]$

故 $\alpha^*(t)$，$\beta^*(t)$ 是边值问题 $\begin{cases} x''(t)=f(t,,x(t),x(t-\tau)) \\ x(0)=x(1)=0 \\ x(t)=0,-\tau\le t\le 0 \end{cases}$ 的解。

[参考文献] (References)

[1] 汪娜，鲁世平，章家顺，等.二阶时滞微分方程边值问题正解存在性[J].安徽师范大学学报（自然科学版），2006，29(6):514-518

[2] 周俐麟.一类非自治时滞微分方程的正周期解[J].湖南理工学院学报，2004,17（2）7-10

[3] 杨勇，王宗毅.一类二阶时滞微分方程脉冲解的存在性[J].惠州学院学报，2010（3）:30-34

[4] 时宝，张德存，等.微分方程理论及其应用[M].北京：国防工业出版社，2005

[5] 郭大钧，孙经先，刘兆理.非线性微分方程泛函方法[M].济南：山东科学技术出版社，2001

[6] 郭大钧.非线性泛函分析[M].济南：山东科学技术出版社，2001