非线性三阶方程两点边值问题解的存在性

朱思念，王刚

（中国矿业大学理学院，江苏 徐州 221008）

摘要：目前对非线性二阶微分方程边值问题的研究已经有了很多结果，但关于三阶及其以上的文章仍不是很多。受文[6]的启发，本文主要讨论一类非线性三阶两点微分方程边值问题解的存在性及唯一性，在非共振边界条件下，通过将原问题转化为等价的算子不动点问题，在非线性项满足广义 Lipschitz 条件下，运用 Banach 压缩映射原理，得到该问题解的存在唯一性的充分条件，并证明了此解是最优解。

关键词：Banach 压缩映射；Lipschitz 条件；格林函数

中图分类号：O175.8

The existence of the solution for nonlinear third-order two-point boundary value problem

Zhu Sinian, Wang Gang

(School of Science ,China Universiy Of Mining & Technology,JiangSu XuZhou 221008)

Abstract: Many papers have disscussed nonlinear two-order ODE boundary value problem,but there are less papers disscuss third-order or more ODE boundary value problem. Innovated by [6],in this paper，we mainly discuss the existence and uniqueness of the solution for one nonlinear third-order two-point boundary value problem.We disscuss nonresonance problem,by converting it into an equvilent operator fixed equation ,we suppose nonlinear item f satisfies the general Lipschitz condition ,then we obtain the sufficient conditions for the existence and uniqueness of the solution for this problem combined with Banach contract mapping theorem.Furthermore,we prove the solution we get is optimal.

Keywords: Banach contract mapping;Lipschitz conditions;Green function

0 引言

对于三阶常微分方程两点边值问题，已有许多研究成果。王伟等[2]将一类特殊的两点边值问题，通过变换化为二阶微分方程的初值问题，讨论解的存在性.葛渭高在[3]中利用 Leary-Schauder 不动点定理讨论了三阶常微分方程各类边值问题解的存在性与唯一性；蒋达清在[4]中讨论了三阶非线性常微分方程两点边值问题，运用了锥拉伸与压缩不动点定理，得到了三阶两点边值问题正解存在的结果。姚庆六在[4]中讨论三阶常微分方程的某些非线性特征值问题的正解；冯育强，刘三阳在[5]中利用上下解的方法讨论了关于三阶边值问题解的存在性等问题；王金枝，王伟在[6]中利用格林函数和压缩映射原理，给出了三阶常微分方程两点边值问题解的存在性与唯一性定理。

本文在[6]的基础上，对两点边值问题，就其中一种情况给出解的存在性与唯一性定理，并给出了最优结果。

预备知识

本文主要用广义 Lipschitz 条件：

$$\left|f\left(t,y,y',y''\right)-f\left(t,x,x',x''\right)\right|\le p\left(t\right)\left|y-x\right|+q\left(t\right)\left|y'-x'\right|+r\left(t\right)\left|y''-x''\right|$$

作者简介：朱思念（1986-），男，在读研究生，微分方程. E-mail: zhusinian@126.com

下来研究非线性三阶两点边值问题

$$\begin{cases} y'''(t)+f(t,y,y',y'')=0 \\ y(a)=0, y'(a)=0, y''(b)=0. \end{cases}, \quad a\le t\le b.$$

解的存在与唯一性的最优结果。并将 Banana 压缩映射原理，由整个空间推广到了一个闭球上。从而利用此推广结果，给出了三阶方程 BVP 在一个有界空间上的存在与唯一性定理。

定义 1[1]连续算子T：$G \subset \mathrm{X}\to \mathrm{X}$，如果将$G$中的任一有界集$\Omega$映为$\mathrm{X}$中的相对紧集$T(\Omega)$，则称$T$为$G$上的全连续算子。

定义 2（三阶方程对应的 Green 函数）[7]如果存在$G(t,s)$满足一下性质：

(i)$G(t,s)$在$[a,b]\times(a,b)$上连续，关于 t 有一阶连续偏导数，且$\dfrac{\partial G}{\partial t}$，$\dfrac{\partial^2 G}{\partial t^2}$在$[a,b]\times(a,t)\cup(t,b)$上存在，连续；

(ii)$\left.\dfrac{\partial^2 G(t,s)}{\partial t^2}\right|_{t=s^+}-\left.\dfrac{\partial^2 G(t,s)}{\partial t^2}\right|_{t=s^-}=-1$；

(iii)当$s\neq t$时，$\dfrac{\partial^3 G(t,s)}{\partial t^3}$=0；

(iv)$\forall s\in(a,b), U_1(G(.,s))=U_2(G(.,s))=U_3(G(.,s))$.

则$G(t,s)$成为齐次线性边值问题（Ⅰ）的 Green 函数。其中（Ⅰ）为

$$\begin{cases} y'''+a_1y''+a_2y'+a_3y=0 \\ U_1(y)=U_2(y)=U_3(y)=0 \end{cases}$$

其 Green 函数为

$$G(t,s)=\begin{cases} \dfrac{(t-a)^2}{2}-\dfrac{(t-s)^2}{2}, a\le s\le t\le b \\ \dfrac{(t-a)^2}{2}, a\le t\le s\le b \end{cases}$$

其中a_1,a_2,a_3是常数，$U_1(y),U_2(y),U(y)_3$关于y满足线性性。

定理 1（Banach 压缩映射定理）[1] 每一个定义在完备赋范线性空间S上的压缩映射T有且只有一个不动点（即方程$y=Ty$恰有一个解）。对于任一点$y_0\in S$，迭代序列$y_n=Ty_{n-1}=\cdots=T^n y_0$均收敛于不动点$y$，并且

$$\|y_n-y\|\le\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\|y_1-y_0\|. \tag{1}$$

定理 2（解对初值与参数的连续依赖性定理）[8]设n维向量值函数$\vec{f}(t,\vec{y})$在$(t,\vec{y})$空间内的某个开区域G上是连续的，而且对$\vec{y}$满足局部 Lipschitz 条件。假设$\vec{y}=\vec{\xi}(t)$是微分方程

$$\frac{d\vec{y}}{dt}=\vec{f}\left(t,\vec{y}\right)$$

的一个解，令它的存在区间为 J 。现在，在区间 J 内任取一个有界闭区间 $a\le t\le b$ 。则存在常数 $\delta>0$ ，使得对任何初值 $\left(t_0,\overrightarrow{y_0}\right)$，

$$a\le t_0\le b,\left|\overrightarrow{y_0}-\vec{\xi}\left(t_0\right)\right|\le\delta\ ,$$

柯西问题

$$(E):\qquad \frac{d\vec{y}}{dt}=\vec{f}\left(t,\vec{y}\right),\quad \vec{y}\left(t_0\right)=\vec{y}_0$$

的解 $\vec{y}=\vec{\varphi}\left(t;t_0,\overrightarrow{y_0}\right)$ 也至少在区间 $a\le t\le b$ 上存在，并且它在闭区域

$$D_\delta: a\le t\le b, a\le t_0\le b,\left|\vec{y}_0-\vec{\xi}\left(t_0\right)\right|\le\delta$$

上是连续的。

定理 3[7]设齐次边值问题（Ⅰ）有唯一解，$G\left(t,s\right)$ 是（Ⅰ）的 Green 函数，则相应的半齐次边值问题

$$(\text{II})\quad \begin{cases} y'''+a_1y''+a_2y'+a_3y+f\left(t,y,y',y''\right)=0 \\ U_1\left(y\right)=U_2\left(y\right)=U_3\left(y\right)=0 \end{cases}$$

的唯一解可以表示为

$$y\left(t\right)=\int_a^b G\left(t,s\right)f\left(s\right)ds\ .$$

定理 4（闭球上的 Banach 压缩映射原理）[1]假设 T 将赋范线性空间 S 中的球 $B=\left\{\omega\middle|\left\|\omega-y_0\right\|\le\mu\right\}$ 映射到 S 自身之中。如果存在 $\alpha\in\left(0,1\right)$，使得对所有 $u,v\in B$，有

$$\left\|Tu-Tv\right\|\le\alpha\left\|u-v\right\|$$

而且如果

$$\left\|Ty_0-y_0\right\|\le\mu\left(1-\alpha\right)\tag{2}$$

则 T 在 B 中有唯一不动点，并且这个不动点可以通过从任意 $\omega\in B$ 起步的逐次逼近法得到，即 $T^n\omega\to y$ ，使得 $y\in B, Ty=y$ 。

假设 $f\left(t,y,y',y''\right)$ 在 $\left[a,b\right]\times\left(-\infty,\infty\right)\times\left(-\infty,\infty\right)\times\left(-\infty,\infty\right)$ 上连续且满足 Lipschitz 条件：

$$\left|f\left(t,y,y',y''\right)-f\left(t,x,x',x''\right)\right|\le p\left(t\right)\left|y-x\right|+q\left(t\right)\left|y'-x'\right|+r\left(t\right)\left|y''-x''\right|\tag{3}$$

其中 $p\left(t\right),q\left(t\right),r\left(t\right)$ 均是非负的连续函数。

空间 $S=C^2\left[a,b\right]$,对于函数及其一阶导数，二阶导数，在这里引进三个在 $\left[a,b\right]$ 上为正的连续的权函数 $\omega\left(t\right),v\left(t\right),u\left(t\right)$，将范数定义为

$$\left\|y\right\|=\max\left(\max_{a\le t\le b}\frac{\left|y\left(t\right)\right|}{\omega\left(t\right)},\max_{a\le t\le b}\frac{\left|y'\left(t\right)\right|}{v\left(t\right)},\max_{a\le t\le b}\frac{\left|y''\left(t\right)\right|}{u\left(t\right)}\right)$$

关于这个范数，空间S是完备的，并且u_n按这个范数收敛于u可以保证u_n一致收敛于u而$u_n' \to u'$，$u_n'' \to u''$均是一致的。

算子方程$\mathrm{T}y = y$现由（3）给出。如前所述

$$\frac{|Ty(t)-Tx(t)|}{\omega(t)} \le \frac{1}{\omega(t)}\int_a^b G(t,s)\left|f(s,y(s),y'(s),y''(s)) - f(s,x(s),x'(s),x''(s))\right|ds$$

$$\le \frac{1}{\omega(t)}\int_a^b G(t,s)\left[p(s)\omega(s)\frac{|y(s)-x(s)|}{\omega(s)} + q(s)v(s)\frac{|y'(s)-x'(s)|}{v(s)}\right.$$

$$\left. + r(s)u(s)\frac{|y''(s)-x''(s)|}{u(s)}\right]ds$$

$$\le \|y-x\|\frac{1}{\omega(t)}\int_a^b G(t,s)\big(p(s)\omega(s)+q(s)v(s)+r(s)u(s)\big)ds$$

$$\frac{\left|\frac{d}{dt}(Ty(t)-Tx(t))\right|}{v(t)} \le \frac{1}{v(t)}\int_a^b G_t(t,s)\left|f(s,y(s),y'(s),y''(s)) - f(s,x(s),x'(s),x''(s))\right|ds$$

$$\le \|y-x\|\frac{1}{v(t)}\int_a^b G_t(t,s)\big(p(s)\omega(s)+q(s)v(s)+r(s)u(s)\big)ds$$

$$\frac{\left|\frac{d^2}{dt^2}(Ty(t)-Tx(t))\right|}{u(t)} \le \frac{1}{u(t)}\int_a^b G_{tt}(t,s)\left|f(s,y(s),y'(s),y''(s)) - f(s,x(s),x'(s),x''(s))\right|ds$$

$$\le \|y-x\|\frac{1}{u(t)}\int_a^b G_{tt}(t,s)\big(p(s)\omega(s)+q(s)v(s)+r(s)u(s)\big)ds$$

我们看出，$\|Ty-Tx\| \le \alpha\|y-x\|$而$\alpha<1$，则$\omega, v$及$u$需满足不等式

$$\frac{1}{\omega(t)}\int_a^b G(t,s)\big(p(s)\omega(s)+q(s)v(s)+r(s)u(s)\big)ds \le \alpha < 1 \tag{4}$$

$$\frac{1}{v(t)}\int_a^b G_t(t,s)\big(p(s)\omega(s)+q(s)v(s)+r(s)u(s)\big)ds \le \alpha < 1 \tag{5}$$

$$\frac{1}{u(t)}\int_a^b G_{tt}(t,s)\big(p(s)\omega(s)+q(s)v(s)+r(s)u(s)\big)ds \le \alpha < 1 \tag{6}$$

1 主要结果

定理 假设$f(\mathrm{t},y,y',y'')$在$[a,b]\times(-\infty,\infty)\times(-\infty,\infty)\times(-\infty,\infty)$上连续且满足广义Lipschitz条件（3），如果方程

$$y'''(t)+r(t)y''(t)+q(t)y'(t)+p(t)y(t)=0 \tag{7}$$

在$[a,b]$上存在满足条件$y(a)=0, y'(a)=0, y''(t)>0$的解，则BVP

（III） $$\begin{cases} y'''(t)+f\left(t,y(t),y'(t),y''(t)\right)=0 \\ y(a)=0,y'(a)=0,y''(b)=0 \end{cases}$$

存在一且唯一解。这一结果是最优的。

证明 下面试图由（3）（4）（5）中的等式求得合适的 ω,v 和 u 。回到等价的方程，问题就化成求满足

$$\omega'''(t)+\frac{1}{\alpha}\left(r(t)\omega''(t)+q(t)\omega'(t)+p(t)\omega(t)\right)=0 \tag{8}$$

的 $\omega(t)$ 与 $\omega'(t)=v(t)$，$\omega''(t)=u(t)$ 在 $[a,b]$ 上严格为正。

如果方程（7）满足定理的假设，$y''(t)$ 的下界不为零。根据参数对解的连续依赖性定理, α 可选取为充分接近 1 但小于 1，于是，(8)有解 $\omega(t)$，$\omega'(a)>0$，$\omega(a)>0$，且 $\omega''(t)$ 在 $[a,b]$ 上可以任意接近 $y''(t)$。特别是，由于 y'' 的下界不为 0，就可使 ω'' 在 $[a,b]$ 上严格为正,则 $\omega'(t)$ 在 $[a,b]$ 上严格为正, $\omega(t)$ 在 $[a,b]$ 上严格为正。对于这样的 α，$\omega(t)$，$v(t)=\omega'(t)$，$u(t)=\omega''(t)$，（3）（4）（5）中的等式成立。由 Banach 压缩映射定理即可证明 BVP（III）的解的存在性与唯一性。

下证最优性：

如果 b 如此之大，使（8）具有满足条件：$y(a)=0,y'(a)=0$，在 $[a,b)$ 上 $y''(t)$>0，但 $y''(b)=0$ 的解 $y(t)$，则 $y(t)$ 是问题（8）满足，$y(a)=0,y'(a)=0$，$y''(b)=0$ 的非平凡解。这个讨论表明，其结果是最优的。

因为 $f\left(\mathrm{t},y,y',y''\right)=r(t)y''(t)+q(t)y'(t)+p(t)y(t)$ 满足定理的条件。即唯一性遭到破坏。所以本定理的结果是最优的。 证毕

如果 $y(t)$ 是方程

$$y'''(t)+My''(t)+Ly'(t)+Ky(t)=0$$

的任一在 $t=a$ 为 0，导数在 $t=a$ 为 0，则其二阶导数在 $t=a+\alpha(M,L,K)$ 为零。称 $\alpha(M,L,K)$ 为零区间。则可得到上面定理的推论。

推论 假设 $f\left(\mathrm{t},y,y',y''\right)$ 在 $[a,b]\times(-\infty,\infty)\times(-\infty,\infty)\times(-\infty,\infty)$ 上连续且满足

Lipschitz 条件（3）。如果 $b-a<\alpha(M,L,K)$，则 BVP（III）存在一且唯一解。这结果是最优的。

[参考文献] (References)

[1]P.B.贝利，L.F.沙姆平等.非线性两点边值问题（黄启昌，史希福等）[M].呼和浩特：内蒙古人民出版社，1968.

[2] 王伟，史希福.三阶常微分方程两点边值问题解的存在性及单调迭代法[J].数学学报，1992，35（2）：

213-219.
[3] 葛渭高.三阶非线性常微分方程两点边值问题解的存在性[J].系统科学与数学，1996，16（2）：181-192
[4] 蒋达清.三阶非线性常微分方程正解的存在性[J].东北师范大学学报自然科学版，1996，28（4）：6-10
[5] 冯育强,刘三阳.关于三阶边值问题解的存在性[J].应用数学，2003，16（3）：108-111
[6] 王金枝，王伟.关于三阶常微分方程 $y'''=f\left(t,y,y',y''\right)$ 的两点边值问题[J].东北师大学报自然科学版，1989，（3）：21-28
[7] 葛渭高，李翠哲等.常微分方程与边值问题[M].北京：科学出版社，2008
[8] 丁同仁,李承志等.常微分方程教程[M].高等教育出版社,北京,2004