高阶 p-Laplacian 方程多点边值问题多个正解的存在性

车晓飞，刘丙镯

（中国矿业大学理学院，江苏 徐州 221116）

摘要：为研究不同形式的多点边值问题的正解存在性，利用锥中的 Avery-Peterson 不动点定理，讨论一类高阶 p-Laplacian 方程多点边值问题多个正解的存在性，得到了该问题至少存在三个正解的充分性条件，并将已有的 m 点边值问题推广到了双 m 点。

关键词：高阶；p-Laplacian 方程；多点边值问题；多个正解；Avery-Peterson 不动点定理

中图分类号：O175.8

Multiple positive solutions for high order multi-point boundary value problems with p-Laplacian

Che Xiaofei, Liu Bingzhuo

(School of Science, China university of Mining and Technology,JiangSu XuZhou 221116)

Abstract: In order to research different forms of the existence of positive solutions for multi-point boundary value problems, the existence of at least three positive solutions for high order multi-point boundary value problems is considered. By means of Avery-Peterson fixed point theorem, sufficient conditions for the existence of this problem are established, and spread the conclusion from m points to double m points.

Keywords: High order;p-Laplacian operator;Multi-point boundary value problems;Multiple positive solutions;Avery-peterson fixed point theorem.

0 引言

p-Laplacian 方程边值问题在应用数学、物理、力学中的广泛应用使其具有了深厚的研究背景[1-3]。近年来，p-Laplacian 方程非线性边值问题正解的存在性得到了广泛关注[4-12]。已经有大量文献研究 p-Laplacian 方程两到四点边值条件下正解的存在性[4-6]，也有部分文献研究 p-Laplacian 方程 m 点边值问题正解的存在性[7,8]。

Li Xiangfeng[4]运用 Leggett-Williams 不动点定理及 Avery-Peterson 不动点定理研究了两点边值问题

$$\begin{cases}(\varphi_p(u'(t)))'+q(t)g(u(t),u'(t))=0, 0\le t\le 1\\ \alpha\varphi_p(u(0))-\beta\varphi_p(u'(\xi))=0, \gamma\varphi_p(u(1))+\delta\varphi_p(u'(\eta))=0\end{cases}$$

三个正解的存在性。Feng Hanying[7]运用 Krasnoselskiis 不动点定理讨论了 m 点边值问题

$$\begin{cases}(\varphi_p(u'))'+q(t)f(t,u)=0, t\in(0,1)\\ u(0)=\sum_{i=1}^{m-2}a_iu(\xi_i), u(1)=\sum_{i=1}^{m-2}b_iu(\xi_i)\end{cases}.$$

至少一个正解存在性。

受文献[4],[7]的启发，笔者运用 Avery-Peterson 不动点定理讨论了以下高阶 p-Laplacian 方

作者简介：车晓飞（1985-），男，硕士，研究方向：微分方程、动力系统. E-mail: cxfsx0401@163.com

程双 m 点边值问题：

$$(\varphi_p(u^{(n-1)}(t)))' + q(t)g(u(t),u'(t),\cdots,u^{(n-1)}(t)) = 0, t\in(0,1) \quad (0.1)$$

$$\begin{cases} u^{(j)}(0)=0, 0\le j\le n-3 \\ u^{(n-2)}(0)=\sum_{i=1}^{m-2} a_i u^{n-2}(\xi_i), n\ge 3 \\ u^{(n-2)}(1)=\sum_{i=1}^{m-2} b_i u^{(n-2)}(\eta_i), n\ge 3 \end{cases} \quad (0.2)$$

满足$\varphi_p(x)=|x|^{p-2}x, p>1, (\varphi_p)^{-1}=\varphi_q, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, \xi_i\in(0,1)$,并且$a_i, b_i$满足：

(H_1) $a_i, b_i\in(0,1)$且$0\le\sum_{i=1}^{m-2}a_i\le 1, 0\le\sum_{i=1}^{m-2}b_i\le 1, \xi_i,\eta_i\in(0,1)$, 且$0<\xi_1<\eta_1<\xi_2<\eta_2<\cdots<\xi_{m-2}<\eta_{m-2}<1$,

(H_2) 设$g\in C([0,+\infty)^{n-1}\times(-\infty,+\infty),[0,+\infty)); q(t)\in L^1[0,1]$在$[0,1]$上非负，且$q(t)\neq 0, \forall q(t)\in(0,1)$并有$0<\int_0^1 q(t)\mathrm{d}t<\infty$。

本文利用锥中的 Avery-Peterson 不动点定理证明了该边值问题多个正解的存在性,是将文献[4]中的二阶方程推广到了高阶，并将文献[7]中的 m 点边值问题推广到了双 m 点进行了讨论。

1 预备知识

定义 1.1 设$(E,\|\cdot\|)$是一个实 Banach 空间。如果存在一个非空凸闭集$P\subset E$满足：若$u\in P,\lambda\ge 0$，则$\lambda u\in P$;若$u\in P, -u\in P$,则$u=0$，那么 P 是一个闭锥。

定义 1.2 我们称映射α为实 Banach 空间 E 中的锥 P 上的一个非负连续凹函数，如果$\alpha: P\to[0,+\infty)$

连续并且$\alpha(tx+(1-t)y)\ge t\alpha(x)+(1-t)\alpha(y), \forall x,y\in P, t\in[0,1]$。

类似地，我们称映射β为实 Banach 空间 E 中的锥 P 上的一个非负连续凸函数，如果$\beta: P\to[0,+\infty)$

连续并且$\beta(tx+(1-t)y)\le t\beta(x)+(1-t)\beta(y), \forall x,y\in P, t\in[0,1]$。

定义 1.3 设γ,θ为 P 上的非负连续凸函数，α为 P 上非负连续凹函数，ψ为 P 上非负连续函数。那么，对于正实数r_1,r_2,r_3,r_4，我们定义以下凸集：

$$P(\gamma, r_3) = \{u \in P : \gamma(u) < r_3\}$$

$$\overline{P(\gamma, r_3)} = \{u \in P : \gamma(u) \le r_3\}$$

$$P(\gamma, \alpha, r_2, r_3) = \{u \in P : \alpha(u) > r_2, \gamma(u) < r_3\}$$

$$\overline{P(\gamma, \alpha, r_2, r_3)} = \{u \in P : \alpha(u) \ge r_2, \gamma(u) \le r_3\}$$

$$P(\gamma, \theta, \alpha, r_2, \frac{r_2}{\omega}, r_3) = \left\{u \in P : \alpha(u) \ge r_2, \gamma(u) \le r_3, \theta(u) \le \frac{r_2}{\omega}\right\}$$

$$\overline{P(\gamma, \theta, \alpha, r_2, \frac{r_2}{\omega}, r_3)} = \left\{u \in P : \alpha(u) \ge r_2, \gamma(u) \le r_3, \theta(u) \le \frac{r_2}{\omega}\right\}$$

以及一个凸闭集

$R(\gamma, \psi, r_1, r_3) = \{u \in P : \psi(u) \ge r_1, \gamma(u) \le r_3\}$。

设 $E = \{u(t) \in C^{n-1}[0,1] : u^{(j)}(0) = 0, 0 \le j \le 3\}$ 且满足

$\|u\| = \max\left\{\max\limits_{0\le t\le 1}|u^{(n-2)}(t)|, \max\limits_{0\le t\le 1}|u^{(n-1)}(t)|\right\}$。

显然，E 为 Banach 空间。由 $(\varphi_p(u^{(n-1)}(t)))' = -q(t)g(u(t), u'(t)) \le 0$ 可知，$u^{(n-2)}(t)$ 在 $[0,1]$ 是凹的。那么，定义锥 $P \subset E$ 为

$$P = \left\{\begin{array}{l} u(t) \in E : u^{(n-2)}(t) \ge 0, u^{(n-2)}(0) = \sum_{i=1}^{m-2} a_i u^{(n-2)}(\xi_i), \\ u^{(n-2)}(1) = \sum_{i=1}^{m-2} b_i u^{(n-2)}(\eta_i), u^{(n-2)}(t) \text{在}[0,1]\text{是凹的。} \end{array}\right\}$$

在锥 P 上做如下定义：

$\gamma(u) = \max\limits_{0\le t\le 1}|u^{(n-1)}(t)|, \psi(u) = \theta(u) = \max\limits_{0\le t\le 1}|u^{(n-2)}(t)|, \alpha(u) = \min\limits_{\omega\le t\le 1-\omega}|u^{(n-2)}(t)|, \omega \in [0, \frac{1}{2}]$。

设(H1),(H2)条件成立。定义 $C^n[0,1] = \{u(t) \in C^n[0,1] : u^{(n-2)}(t) \ge 0, t \in [0,1]\}$。

$\forall u(t) \in C^n[0,1]$，假设 $u(t)$ 是以下边值问题的一个解：

$$(\varphi_p(u^{(n-1)}(t)))' + q(t)g(u(t), u'(t), \cdots, u^{(n-1)}(t)) = 0, 0 \le t \le 1 \tag{1.1}$$

$$\begin{cases} u^{(j)}(0) = 0, 0 \le j \le n-3 \\ u^{(n-2)}(0) = \sum_{i=1}^{m-2} a_i u^{(n-2)}(\xi_i), n \ge 3 \\ u^{(n-2)}(1) = \sum_{i=1}^{m-2} b_i u^{(n-2)}(\eta_i), n \ge 3 \end{cases} \tag{1.2}$$

那么由(1.1)可得

$$u^{(n-1)}(t) = \varphi_p^{-1}(A_u - \int_0^t q(\tau)g(u(\tau), u'(\tau), \cdots, u^{(n-1)}(\tau))\mathrm{d}\tau) = I(t, u, u', \cdots u^{(n-1)})$$

$$u^{(n-2)}(t)=u^{(n-2)}(0)+\int_0^t I(s,u,u',\cdots u^{(n-1)})ds$$

$$u^{(n-2)}(t)=u^{(n-2)}(1)-\int_t^1 I(s,u,u',\cdots u^{(n-1)})ds$$

由边值条件（1.2）得

$$u^{(n-2)}(t)=\frac{1}{1-\sum_{i=1}^{m-2}a_i}\sum_{i=1}^{m-2}a_i\int_0^{\xi_i}I(s,u,\cdots,u^{(n-1)})ds+\int_0^t I(s,u,\cdots,u^{(n-1)})ds \tag{1.3}$$

或

$$u^{(n-2)}(t)=-\frac{1}{1-\sum_{i=1}^{m-2}b_i}\sum_{i=1}^{m-2}b_i\int_{\eta_i}^{1}I(s,u,\cdots,u^{(n-1)})ds-\int_t^1 I(s,u,\cdots,u^{(n-1)})ds \tag{1.4}$$

可设

$$H_u(c)=\frac{1-\sum_{i=1}^{m-2}b_i}{1-\sum_{i=1}^{m-2}a_i}\sum_{i=1}^{m-2}a_i\int_0^{\xi_i}\varphi_q(c-\int_0^s q(\tau)g(u(\tau),\cdots,u^{(n-1)}(\tau))d\tau)ds$$

$$+(1-\sum_{i=1}^{m-2}b_i)\int_0^1\varphi_q(c-\int_0^s q(\tau)g(u(\tau),\cdots,u^{(n-1)}(\tau))d\tau)ds$$

$$+\sum_{i=1}^{m-2}b_i\int_{\eta_i}^1\varphi_q(c-\int_0^s q(\tau)g(u(\tau),\cdots,u^{(n-1)}(\tau))d\tau)ds$$

则有 $H_u(A_u)=0$

引理 1.1 设(H1),(H2)成立。$\forall u(t)\in C^n[0,1]$，存在唯一的 $A_u\in(-\infty,+\infty)$ 满足 $H_u(A_u)=0$，那么存在唯一的 $\sigma\in(0,1)$ 满足 $A_u=\int_0^\sigma q(\tau)g(u(\tau),u'(\tau),\cdots,u^{(n-1)}(\tau))d\tau$，则有

$$I(t,u,u',\cdots u^{(n-1)})=\varphi_q(\int_t^\sigma q(\tau)g(u(\tau),u'(\tau),\cdots,u^{(n-1)}(\tau))d\tau)$$ 。

证明：$\forall u(t)\in C^n[0,1]$, 由 $H_u(c)$ 定义易知，$H_u:R\to R$ 连续且严格单调递增，且有

$$H_u(0)<0,H_u(\int_0^1 q(\tau)g(u,u',\cdots,u^{(n-1)})d\tau)>0$$ 。

因此，存在唯一的 $A_u\in(0,\int_0^1 q(\tau)g(u,u',\cdots,u^{(n-1)})d\tau)\subset(-\infty,+\infty)$ 满足 $H_u(A_u)=0$。

设 $F(t)=\int_0^t q(\tau)g(u,u',\cdots,u^{(n-1)})d\tau$，那么 $F(t)$ 在 $[0,1]$ 上连续且严格单调递增，且有 $F(0)=0,F(1)=\int_0^1 q(\tau)g(u,u',\cdots,u^{(n-1)})d\tau$ 所以，

$0=F(0)<A_u<F(1)=\int_0^1 q(\tau)g(u,u',\cdots,u^{(n-1)})d\tau$，从而，存在唯一的 $\sigma\in(0,1)$ 满足

$A_u=\int_0^\sigma q(\tau)g(u(\tau),u'(\tau))\mathrm{d}\tau$ 又 $\varphi_p^{-1}(A_u-\int_0^t q(\tau)g(u(\tau),u'(\tau),\cdots,u^{(n-1)}$

$(\tau))\mathrm{d}\tau)=I(t,u,u',\cdots u^{(n-1)})$，故有

$I(t,u,u',\cdots u^{(n-1)})=\varphi_q(\int_t^\sigma q(\tau)g(u(\tau),u'(\tau),\cdots,u^{(n-1)}(\tau))\mathrm{d}\tau)$。

由(1.3),(1.4)以及引理 1.1 可得

$$u^{(n-2)}(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\sum_{i=1}^{m-2}a_i}\sum_{i=1}^{m-2}a_i\int_0^{\xi_i}\varphi_q(\int_s^\sigma q(\tau)g(u(\tau),\cdots,u^{(n-1)}(\tau))\mathrm{d}\tau)\mathrm{d}s\\ +\int_0^t\varphi_q(\int_s^\sigma q(\tau)g(u(\tau),\cdots,u^{(n-1)}(\tau))\mathrm{d}\tau)\mathrm{d}s,0\le t\le\sigma\\ \dfrac{1}{1-\sum_{i=1}^{m-2}b_i}\sum_{i=1}^{m-2}b_i\int_{\eta_i}^{1}\varphi_q(\int_\sigma^s q(\tau)g(u(\tau),\cdots,u^{(n-1)}(\tau))\mathrm{d}\tau)\mathrm{d}s\\ +\int_t^1\varphi_q(\int_\sigma^s q(\tau)g(u(\tau),\cdots,u^{(n-1)}(\tau))\mathrm{d}\tau)\mathrm{d}s,\sigma\le t\le 1\end{cases}\qquad(1.5)$$

令 $v(t)=u^{(n-2)}(t)$, 则对两边在 $[0,1]$ 上进行 $n-2$ 次积分可得

$u(t)=\int_0^t\int_0^{s_1}\cdots\int_0^{s_{n-3}}v(s_{n-2})\mathrm{d}s_{n-2}\mathrm{d}s_{n-3}\cdots\mathrm{d}s_1$。

为方便起见，特做出以下定义：

$$\varphi_1(\sigma)=\frac{1}{1-\sum_{i=1}^{m-2}a_i}\sum_{i=1}^{m-2}a_i\int_0^{\xi_i}\varphi_q(\int_s^\sigma q(\tau)g(u(\tau),\cdots,u^{(n-1)}(\tau))\mathrm{d}\tau)\mathrm{d}s$$

$$\varphi_2(t)=\int_0^t\varphi_q(\int_s^\sigma q(\tau)g(u(\tau),\cdots,u^{(n-1)}(\tau))\mathrm{d}\tau)\mathrm{d}s,0\le t\le\sigma$$

$$\varphi_3(\sigma)=\frac{1}{1-\sum_{i=1}^{m-2}b_i}\sum_{i=1}^{m-2}b_i\int_{\eta_i}^{1}\varphi_q(\int_\sigma^s q(\tau)g(u(\tau),\cdots,u^{(n-1)}(\tau))\mathrm{d}\tau)\mathrm{d}s$$

$$\varphi_4(t)=\int_t^1\varphi_q(\int_\sigma^s q(\tau)g(u(\tau),\cdots,u^{(n-1)}(\tau))\mathrm{d}\tau)\mathrm{d}s,\sigma\le t\le 1$$

引理 1.2[9] 设 $u(t)\in P$，则 $\exists\omega\in(0,\frac{1}{2})$，使得

$u^{(n-2)}(t)\ge\omega\max_{0\le t\le 1}\left|u^{(n-2)}(t)\right|,t\in[\omega,1-\omega]$

引理 1.3 设 $u(t)\in P$，则存在 $L>0$ 满足 $\max_{0\le t\le 1}\left|u^{(n-2)}(t)\right|\le L\max_{0\le t\le 1}\left|u^{(n-1)}(t)\right|$。

证明：由 $u^{(n-2)}(t)=u^{(n-2)}(0)+\int_0^t u^{(n-1)}(s)\mathrm{d}s$ 得

$\max_{0\le t\le 1}\left|u^{(n-2)}(t)\right|\le\left|u^{(n-2)}(0)\right|+\max_{0\le t\le 1}\left|u^{(n-1)}(t)\right|$

另外，由(1.2)的第二个式子，可得

$$\left|u^{(n-2)}(0)\right|=\left|\sum_{i=1}^{m-2}a_iu^{(n-2)}(\xi_i)\right|\le\sum_{i=1}^{m-2}a_i\left|u^{(n-2)}(\xi_i)\right|\le\sum_{i=1}^{m-2}a_i\max_{0\le t\le1}\left|u^{(n-2)}(t)\right|$$

则有

$$\max_{0\le t\le1}\left|u^{(n-2)}(t)\right|\le\frac{1}{1-\sum_{i=1}^{m-2}a_i}\max_{0\le t\le1}\left|u^{(n-1)}(t)\right|$$

。

因此，令

$$L=\frac{1}{1-\sum_{i=1}^{m-2}a_i}$$

即可得证。

引理 1.4 设(H1),(H2)成立。$\forall u(t)\in P,$ 定义算子 $T:P\to C^n[0,1]$ 满足 $u(t)=\int_0^t\int_0^{s_1}\cdots\int_0^{s_{n-3}}v(s_{n-2})\,\mathrm{d}s_{n-2}\mathrm{d}s_{n-3}\cdots\mathrm{d}s_1,$ 那么 $T:P\to C^n[0,1]$ 是全连续的。

证：易证 $(Tu)^{n-2}(t)\ge0(0\le t\le1),(\varphi_p((Tu)^{n-1}(t)))'\le0,$ 并且 $\varphi_p(s)$ 非减，那么 $(Tu)^{n-2}(t)$ 在 $[0,1]$ 上是凹的。由(H1),(H2)及 $u\in P$ 有

$$(Tu)^{(n-2)}(0)-\sum_{i=1}^{m-2}a_i(Tu)^{n-2}(\xi_i)=0,(Tu)^{(n-2)}(1)-\sum_{i=1}^{m-2}b_i(Tu)^{(n-2)}(\eta_i)=0$$

。因此，$TP\subset P$，且 T 的每一个不动点都是(1.1),(1.1)的解。由 $Arzela-Ascoli$ 定理易知 $T:P\to C^n[0,1]$ 是全连续的。

注 1.1 由(1.5)及引理 1.4 得

$$(Tu)^{(n-1)}(t)=\begin{cases}\varphi_q(\int_t^\sigma q(\tau)g(u(\tau),u'(\tau),\cdots,u^{(n-1)}(\tau))\mathrm{d}\tau),0\le t\le\sigma\\-\varphi_q(\int_\sigma^t q(\tau)g(u(\tau),u'(\tau),\cdots,u^{(n-1)}(\tau))\mathrm{d}\tau),\sigma\le t\le1\end{cases}\tag{1.6}$$

则 $(Tu)^{(n-1)}(\sigma)=0$，其中 $\sigma\in[\xi_i,\eta_i)\subset(0,1)$，由 $(Tu)^{n-2}(t)$ 的凹性可得，

$(Tu)^{(n-2)}(\sigma)=\max_{0\le t\le1}(Tu)^{(n-2)}(t)$。

为方便起见，定义以下记号：

$$N=\max\left\{\varphi_q(\int_0^{\eta_i}q(\tau)\mathrm{d}\tau),\varphi_q(\int_{\xi_i}^1q(\tau)\mathrm{d}\tau)\right\}$$

$$m=\min\left\{\int_0^{\xi_i}\varphi_q(\int_s^\sigma q(\tau)\mathrm{d}\tau)\mathrm{d}s,\int_{\eta_i}^1\varphi_q(\int_\sigma^s q(\tau)\mathrm{d}\tau)\mathrm{d}s\right\}$$

$$M=\max\left\{\int_0^{\eta_i}\varphi_q(\int_s^\sigma q(\tau)\mathrm{d}\tau)\mathrm{d}s+\frac{1}{1-\sum_{i=1}^{m-2}a_i}\sum_{i=1}^{m-2}a_i\int_0^{\xi_i}\varphi_q(\int_s^\sigma q(\tau)\mathrm{d}\tau)\mathrm{d}s,\right.$$

$$\left.\int_{\xi_i}^{1}\varphi_q(\int_{\sigma}^{s}q(\tau)\mathrm{d}\tau)\mathrm{d}s+\frac{1}{1-\sum_{i=1}^{m-2}b_i}\sum_{i=1}^{m-2}b_i\int_{\eta_i}^{1}\varphi_q(\int_{\sigma}^{s}q(\tau)\mathrm{d}\tau)\mathrm{d}s\right\}$$

定理 1.1[10](Avery-Peterson 不动点定理) 设 P 是实 Banach 空间 E 中的锥，γ,θ 为 P 中的非负连续凸函数，α 为 P 上非负连续凹函数，ψ 为 P 上非负连续函数且满足 $\psi(\lambda u)=\lambda\psi(u),0\le\lambda\le 1$。$\exists K>0,d>0$ 使得

$$\alpha(u)\le\psi(u)\text{ 以及 }\|u\|\le K\gamma(u),\ \forall(u)\in\overline{P(\gamma,d)} \tag{1.7}$$

假设 $T:\overline{P(\gamma,d)}\to\overline{P(\gamma,d)}$ 全连续，且存在 $a,b,c>0,a<b$ 满足

（H3）$\{u\in P(\gamma,\theta,\alpha,b,c,d):\alpha(u)>b\}\neq\phi$，且 $\alpha(Tu)>b,\forall u\in P(\gamma,\theta,\alpha,b,c,d)$；

（H4）若 $\theta(Tu)>c$，则 $\alpha(Tu)>b,\forall u\in P(\gamma,\alpha,b,d)$；

（H5）若 $\psi(u)=a$，则 $0\notin R(\gamma,\psi,a,d),\psi(Tu)<a$。

那么，T 至少有三个不动点 $u_1,u_2,u_3\in\overline{P(\gamma,d)}$，满足

$\gamma(u_i)\le d,i=1,2,3$ 且 $b<\alpha(u_1),a<\psi(u_2),\alpha(u_2)<b,\psi(u_3)<a$。

2 主要结果及其证明

定理 2.1 设(H_1),(H_2)成立。假设$\exists r_1,r_2,r_3>0$, 满足$0<r_1<r_2<\frac{r_2}{\omega}<Lr_3$。再假设 g 满足以下条件：

（H_6）$g(u,u',\cdots,u^{(n-1)})<\varphi_p(\frac{r_1}{M}),(u,u',\cdots,u^{(n-1)})\in(0,\frac{r_1}{\omega})^{n-2}\times[0,r_1]\times[-r_3,r_3]$;

（H_7）$g(u,u',\cdots,u^{(n-1)})>\varphi_p(\frac{r_2}{\omega m}),(u,u',\cdots,u^{(n-1)})\in[0,\frac{r_2}{\omega^2}]^{n-2}\times[r_2,\frac{r_2}{\omega}]\times[-r_3,r_3]$;

（H_8）$g(u,u',\cdots,u^{(n-1)})\le\varphi_p(\frac{r_3}{N}),(u,u',\cdots,u^{(n-1)})\in[0,\frac{Lr_3}{\omega}]^{n-2}\times[0,Lr_3]\times[-r_3,r_3]$。

那么，边值问题(1.1),(1.2)至少有三个正解 u_1,u_2,u_3 满足

$$\gamma(u_i)\le r_3,i=1,2,3\text{ 且 }\psi(u_1)<r_1,r_1<\psi(u_2)<\frac{r_2}{\omega},\alpha(u_2)<r_2,\psi(u_3)\le Lr_3,\alpha(u_3)>r_2。$$

证明： 由引理 1.4 可知，$T:P\to C^n[0,1]$ 是全连续的，且 T 的每一个不动点都是(1.1),(1.2)的解。那么，我们只需要验证 T 满足定理 1.1 的条件即可。

首先，取 $u_i\in\overline{P(\gamma,r_3)}$，那么 $\gamma(u_i)=\max_{0\le t\le 1}\left|u^{(n-1)}(t)\right|\le r_3$。由引理 1.3 可知，

$\psi(u)=\max_{0\le t\le 1}\left|u^{(n-2)}(t)\right|\le Lr_3$。那么由条件（$H_8$）可得，

$g(u,u',\cdots,u^{(n-1)})\le\varphi_p(\frac{r_3}{N}),0\le t\le 1$。同时注意到 $\max_{0\le t\le 1}\left|(Tu)'(t)\right|=\max\{(Tu)'(0),(Tu)'(1)\}$。再由条件（1.6）可得

$$\gamma(Tu)=\max_{0\le t\le 1}\left|(Tu)^{(n-1)}(t)\right|=\max_{0\le t\le 1}\left\{\varphi_q(\int_0^{\sigma}q(\tau)g(u,u',\cdots,u^{(n-1)})\mathrm{d}\tau),\varphi_q(\int_{\sigma}^{1}q(\tau)g(u,u',\cdots,u^{(n-1)})\mathrm{d}\tau)\right\}$$

$$\le\max_{0\le t\le 1}\left\{\varphi_q(\int_0^{\eta_i}q(\tau)g(u,u',\cdots,u^{(n-1)})\mathrm{d}\tau),\varphi_q(\int_{\xi_i}^{1}q(\tau)g(u,u',\cdots,u^{(n-1)})\mathrm{d}\tau)\right\}$$

$$\le\frac{r_3}{N}\max_{0\le t\le 1}\left\{\varphi_q(\int_0^{\eta_i}q(\tau)\mathrm{d}\tau),\varphi_q(\int_{\xi_i}^{1}q(\tau)\mathrm{d}\tau)\right\}=r_3$$

这就证明了$T:\overline{P(\gamma,r_3)}\to\overline{P(\gamma,r_3)}$，并且通过以上证明过程可知$T:\overline{P(\gamma,r_3)}\to\overline{P(\gamma,r_3)}$是全连续的。

由引理 1.2,1.3 及$\alpha,\gamma,\theta,\psi$ 的定义可得

（2.1）

$$\|u\|=\max\{\theta(u),\gamma(u)\}\le L\gamma(u),\forall u\in P$$

且$\psi(\lambda u)=\max_{0\le t\le 1}\left|\lambda u^{(n-2)}(t)\right|=\lambda\max_{0\le t\le 1}\left|u^{(n-2)}(t)\right|=\lambda\psi(u),0\le\lambda\le 1$

因此，定理 1.1 中的条件（1.7）满足。

其次，取$u(t)\equiv\dfrac{r_2}{2\omega},t\in[0,1]$，则有

$$\alpha(u(t))=\max_{\omega\le t\le 1-\omega}\left|u^{(n-2)}(t)\right|=\frac{r_2}{2\omega}>r_2$$

$$\gamma(u(t))=\max_{0\le t\le 1}\left|u^{(n-1)}(t)\right|=0<r_3$$

$$\theta(u(t))=\max_{0\le t\le 1}\left|u^{(n-2)}(t)\right|=\frac{r_2}{2\omega}<\frac{r_2}{\omega}$$

那么，$u(t)\equiv\dfrac{r_2}{2\omega}\in P(\gamma,\theta,\alpha,r_2,\dfrac{r_2}{\omega},r_3),\alpha(u(t))>r_2$。

因此，$\left\{u\in P(\gamma,\theta,\alpha,r_2,\dfrac{r_2}{\omega},r_3):\alpha(u)>r_2\right\}\ne\phi$，且

$\forall u(t)\in P(\gamma,\theta,\alpha,r_2,\dfrac{r_2}{\omega},r_3),\ r_2\le u(t)\le\dfrac{r_2}{\omega},\left|u'(t)\right|\le r_3,$

$t\in[\omega,1-\omega]$。

由（H₇）有$g(u,u',\cdots,u^{(n-1)})>\varphi_p(\dfrac{r_2}{\omega m}),\omega\le t\le 1-\omega$，再由引理 1.2 及锥 P 的定义可得

$$\alpha(Tu)=\min_{\omega\le t\le 1-\omega}\left|(Tu)(t)\right|\ge\omega\theta((Tu)(t))=\omega(Tu)(\sigma)$$

$$=\omega(\varphi_1(\sigma)+\varphi_2(\sigma))$$

$$=\omega(\varphi_3(\sigma)+\varphi_4(\sigma))$$

$$\ge\omega\min\{\varphi_2(\xi_i),\varphi_4(\eta_i)\}$$

$$>\omega\frac{r_2}{\omega m}\min\left\{\int_0^{\xi_i}\varphi_q(\int_s^{\sigma}q(\tau)\mathrm{d}\tau)\mathrm{d}s,\int_{\eta_i}^{1}\varphi_q(\int_{\sigma}^{s}q(\tau)\mathrm{d}\tau)\mathrm{d}s\right\}=r_2$$

所以有$\alpha(Tu)>r_2,\forall u\in P(\gamma,\theta,\alpha,r_2,\dfrac{r_2}{\omega},r_3)$ 。

则定理 1.1 的条件（H_3）满足。

再次，取 $u\in P(\gamma,\alpha,r_2,r_3)$ 使得 $\theta(Tu)>\dfrac{r_2}{\omega}$。由(2.1)有

$$\alpha(Tu)\ge\omega\theta(Tu)>\omega\cdot\frac{r_2}{\omega}=r_2$$

因此，定理 1.1 的条件（H_4）满足。

最后，证明定理 1.1 的条件（H_5）满足。显然 $\psi(0)=0<r_1$，因此 $0\notin R(\gamma,\psi,r_1,r_3)$。假设 $\psi(u)=r_1,u\in R(\gamma,\psi,r_1,r_3)$ 那么由（H_6）可得

$$\psi(Tu)=\max_{0\le t\le 1}\left|(Tu)(t)\right|=(Tu)(\sigma)$$

$$=\varphi_1(\sigma)+\varphi_2(\sigma)$$
$$=\varphi_3(\sigma)+\varphi_4(\sigma)$$
$$\le\max\{\varphi_1(\sigma)+\varphi_2(\eta_i),\varphi_3(\sigma)+\varphi_4(\xi_i)\}$$
$$\le\max\left\{\int_0^{\eta_i}\varphi_q(\int_s^{\sigma}q(\tau)\mathrm{d}\tau)\mathrm{d}s+\frac{1}{1-\sum_{i=1}^{m-2}a_i}\sum_{i=1}^{m-2}a_i\int_0^{\xi_i}\varphi_q(\int_s^{\sigma}q(\tau)\mathrm{d}\tau)\mathrm{d}s,\right.$$
$$\left.\int_{\xi_i}^{1}\varphi_q(\int_{\sigma}^{s}q(\tau)\mathrm{d}\tau)\mathrm{d}s+\frac{1}{1-\sum_{i=1}^{m-2}b_i}\sum_{i=1}^{m-2}b_i\int_{\eta_i}^{1}\varphi_q(\int_{\sigma}^{s}q(\tau)\mathrm{d}\tau)\mathrm{d}s\right\}=r_1$$

因此，定理 1.1 的条件（H_5）满足。

那么，由定理 1.1 可知，BVP(1.1),(1.2)至少有三个正解 u_1,u_2,u_3 满足

$\gamma(u_i)\le r_3,i=1,2,3$ 且 $\psi(u_1)<r_1,r_1<\psi(u_2)<\dfrac{r_2}{\omega},\alpha(u_2)<r_2,\psi(u_3)\le Lr_3,\alpha(u_3)>r_2$。

3 应用举例

例 3.1 令 BVP(1.1),(1.2)中 $n=2$，则考虑以下 *p-Laplacian* 方程边值问题:

$$\begin{cases}(\varphi_p(u'(t)))'+\dfrac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}g(u(t),u'(t))=0,0<t<1\\ u(0)=\dfrac{1}{4}u(\dfrac{1}{3})+\dfrac{1}{4}u(\dfrac{2}{3}),u(1)=\dfrac{1}{3}u(\dfrac{1}{3})+\dfrac{1}{3}u(\dfrac{2}{3})\end{cases}\qquad(3.1)$$

满足 $p=\dfrac{2}{3},\xi_i=\dfrac{1}{4},\eta_i=\dfrac{1}{2},\omega=\dfrac{1}{4}$，且

$$g(u,u')=\begin{cases}\dfrac{7}{3}u+\dfrac{\sin u'}{50},(u,u')\in[0,1]\times(-\infty,+\infty)\\ \dfrac{7}{3}u^4+\dfrac{\sin u'}{50},(u,u')\in[1,2]\times(-\infty,+\infty)\\ 50+\dfrac{\sin u'}{50},(u,u')\in[2,10^4]\times(-\infty,+\infty)\\ 50+\dfrac{u-10^4}{\sqrt{u}}+\dfrac{\sin u'}{50},(u,u')\in[10^4,+\infty]\times(-\infty,+\infty)\end{cases}$$

则（3.1）至少有三个正解。

实际上，我们取 $L=2,N=\dfrac{1}{2},m=\dfrac{23}{24}-\dfrac{2}{3}\sqrt{2},M=\dfrac{43-8\sqrt{2}}{96}$。

显然，$(H_1),(H_2)$满足。

设 $r_1=1,r_2=2,r_3=5000$，则

$$g(u,u')\le\max g(u,u')=50+\frac{1}{50}<\varphi_p(\frac{r_3}{N})=100,(u,u')\in[0,10^4]\times[-5000,5000];$$

$$g(u,u')>\min g(u,u')=50+\frac{1}{50}>\varphi_p(\frac{r_2}{\omega m}),(u,u')\in[2,8]\times[-5000,5000];$$

$$g(u,u')<\max g(u,u')=\frac{7}{3}+\frac{1}{50}<\varphi_p(\frac{r_1}{M}),(u,u')\in[0,1]\times[-5000,5000]。$$

故定理 2.1 的条件$(H_6),(H_7),(H_8)$满足。由定理 2.1 可得，BVP (3.1)至少有三个正解 u_1,u_2,u_3 满足

$$\gamma(u_i)\le r_3,i=1,2,3 \text{ 且 } \psi(u_1)<r_1,r_1<\psi(u_2)<\frac{r_2}{\omega},\alpha(u_2)<r_2,\psi(u_3)\le Lr_3,\alpha(u_3)>r_2。$$

参考文献

[1] Wang H Y. On the existence of positive solutions for nonlinear equations in the annulus[J]. J Differential Equations,1994,109:1-7.

[2] Oruganti S, Shi J, Shivaji R. Logistic equation with p-Laplacian and constant yield harvesting[J]. Abstr.Appl.Anal,2004,9:723-727.

[3] Deimling K. Nonliear Functional Analysis[M].Berlin:Springer-Verlag,1980.

[4] Li Xiangfeng.Multiple positive solutions for some four-point boundary value problems with p-Laplacian[J]. Appl Math Comput,2008,202:413-426.

[5] Su H, Wei Z L, Wang B H. The existence of positive solutions for a nonlinear four-point singular boundary value problem with a p-Laplacian operator[J]. Nonlinear Anal,2007,66:2204-2217.

[6] Wu Hongyun, Zhang Jihui. Positive solutions of higher-order four-point boundary value problem with p-Laplacian operator[J]. J Comput Appl Math, 2010,233:2757-2766.

[7] Feng Hanying, Ge Weigao. Multiple positive solutions for m-point boundary value problems with a one-dimensional p-Laplacian[J]. Nonlinear Anal,2008,68:2269-2279.

[8] Su Hua. Positive solutions for n-order m-point p-Laplacian operator singular boundary value problems[J]. Appl Math Comput, 2008,199: 122-132.

[9] Su H, Wei Z L, Xu F Y. The existence of positive solutions for nonlinear singular boundary value problem with a p-Laplacian[J]. Appl Math Comput, 2006,181:826-836.

[10] Avery E I, Peterdon A C. Three positive fixed points of nonlinear operators on ordered Banach spaces[J].Comput Math Appl, 2001,42:313-322.

[11] Bai Z, Ge W. Existence of three positive solutions for some second-order boundary value problems[J].Comput Math Appl, 2004,48:699-707.

[12] Leggett R W, Willams L R. Multiple positive fixed points of nonlinear operators on ordered banach spaces[J],Indiana Univ. Math.J,1979,28:673-688.