一类时滞种群差分方程的非负周期解的存在性

向占宏*
(湖南财经高等专科学校信息管理系，湖南 长沙，410205)

摘要 本文运用重合度理论,证明了一类时滞差分方程

$$y(k+1)=y(k)\exp\left\{r(k)-b(k)\ln y(k)-\sum_{i=1}^{m}a_i(k)\ln y(k-\tau_i(k,y(k)))\right\}$$

至少存在一个正周期解.

关键词 时滞种群;差分方程;重合度;正周期解
中图分类号 O175.4 **文献标识码** A

1.引 言

对数种群模型是生物数学中的一个基本模型,它的正周期解的存在性已被广泛地研究[1, 2, 3]。就我们所知的文献中，绝大部分文献只考虑了生物系统的微分模型[4, 5]，而事实上，我们很难连续地去研究和描述生态系统，通常的做法是每隔一定的时间我们去观察和做实验,因此利用差分模型描述生态系统更符合实际，也正因为如此，研究差分模型的正周期解的存在性具有重要的理论意义和现实意义[6, 7]。

本文主要研究如下的状态依赖时滞的单种群对数模型

$$y(k+1)=y(k)\exp\left\{r(k)-b(k)\ln y(k)-\sum_{i=1}^{m}a_i(k)\ln y(k-\tau_i(k,y(k)))\right\} \quad (1)$$

的正周期解的存在性。其中 $y(k)$ 表示种群在第 k 个时刻的密度，$\{r(k)\},\{b(k)\},\{a_i(k)\}(i=1,2,\cdots,m)$ 均为正 $\omega-$周期数列，τ_i 关于第一个变量是 $\omega-$周期的，τ_i 是有界变量。考虑到方程（1）的生物学意义，我们只考虑方程（1）的具有如下形式的初始条件的解，

$$y(s)=\phi(s),\phi(0)>0,\phi\in C((-\tau,0],R^{+}) \quad (2)$$

其中 $\tau=\max\limits_{1\le i\le m}\max\limits_{1\le k\le\omega-1}\tau_i(k,y(k))$

2．主要结论及证明

* 作者简介：向占宏（1970——），男，湖南平江人，湖南财经高等专科学校讲师，主要从事应用数学的教学和研究。 Email:xzhongcs@163.com

设 X,Z 是 $banach$ 空间，$L:Doml\subset X\to Z$ 是一个零指标的 $Fredholm$ 映射，$P:X\to X,Q:Z\to Z$ 是两个连续的投影算子，且 $\operatorname{Im}P=\ker L,\ \ker Q=\operatorname{Im}L,\ X=\ker L\oplus\operatorname{Im}Q,\ K_p:\operatorname{Im}L\to\ker P\cap DomL$ 为 L 的广义逆，J 是 $\operatorname{Im}Q$ 到 $\ker L$ 上的同构映射。

引理 1[8] 设 Ω 是一个有界开集，$N:X\to Z$ 是一个连续的 $L-$ 紧算子（即 $QN:\bar{\Omega}\to Z$ 和 $K_p(I-Q)N:\bar{\Omega}\to X$ 是相对紧集），假设

（a） $N:Lx\neq\lambda Nx$ 对任意的 $\lambda\in(0,1)$ 和 $x\in\partial\Omega$；

（b） $QNx\neq 0$，对任意的 $x\in\ker L\cap\partial\Omega$；

（c） $Brower$ 度 $\deg(JQN,\Omega\cap derL,0)\neq 0$；

则算子方程 $Lx=Nx$ 在 $DomL\cap\bar{\Omega}$ 中至少有一个解。

引理 2 设 $g:Z\to R,g(k+\omega)=g(k),\omega$ 是正整数，对任意的 $k_1,k_2\in\{1,2,\cdots,\omega\}$，和任意固定的 $k\in Z$ 有

$$g(k)\leq g(k_1)+\sum_{s=0}^{\omega-1}\left|g(s+1)-g(s)\right|$$

$$g(k)\geq g(k_2)-\sum_{s=0}^{\omega-1}\left|g(s+1)-g(s)\right|$$

定理 1 如果 $\left(\bar{b}+\sum_{i=1}^{m}\bar{a}_i\right)\omega<1$，

则初值问题（1），（2）至少有一个正周期解。

证明：用分步法很容易证明。方程(1)，(2)有唯一解 $y(k)$，且 $y(k)>0$，对 $k\ge 0$ 作变换

$$y(k)=e^{x(k)} \tag{3}$$

则方程（1）可化为下列的方程

$$\Delta x(k)=r(k)-b(k)x(k)-\sum_{i=1}^{m}a_i(k)x(k-\tau_i(k,e^{x(k)})) \text{ 。} \tag{4}$$

为了能应用引理 1，我们取 $X=Z=\left\{x(k)\in R\,\middle|\,x(k+\omega)=x(k)\right\}$，且在 X 中定义范数 $\|x\|=\max\limits_{0\le k\le\omega-1}|x(k)|$，则 X,Z 是 $banach$ 空间，令

$$Lx=\Delta x(k),Px=Qx=\frac{1}{\omega}\sum_{k=0}^{\omega-1}x(k)$$

$$Nx=r(k)-b(k)x(k)-\sum_{i=1}^{m}a_i(k)x(k-\tau_i(k,e^{x(k)}))\text{，}$$

则 $\ker L=R$ 且 $\operatorname{Im}L=\left\{x\in X\,\middle|\,\sum_{k=0}^{\omega-1}x(k)=0\right\}$ 是 X 中的闭集，并且 $\dim KerL=co\dim\operatorname{Im}L=1$，因此，$L$ 是一个零指标的 $Fredholm$ 映射，定义 $K_p:\operatorname{Im}L\to\ker P\cap DomL$，则：

$$K_px=\sum_{j=0}^{k-1}x(j)-\frac{1}{\omega}\sum_{k=0}^{\omega-1}\sum_{i=0}^{k-1}x(i)\text{，}$$

不难证明 QN 和 $K_p(I-Q)N$ 在 X 中的任何有界开集上是相对紧集，故 N 是 $L-$ 紧的。

对应算子方程 $Lx=\lambda Nx,\lambda\in(0,1)$，我们有

$$\Delta x(k)=\lambda\left\{r(k)-b(k)x(k)-\sum_{i=1}^{m}a_i(k)x(k-\tau_i(k,e^{x(k)}))\right\}\text{，} \tag{5}$$

设 $x(k)\in X$ 是方程（4）的一个解，则

$$\Delta x(k)=\lambda\left\{r(k)-b(k)x(k)-\sum_{i=1}^{m}a_i(k)x(k-\tau_i(k,e^{x(k)}))\right\},\tag{6}$$

将（6）式两边从 0 到 $\omega-1$ 求和，得

$$\sum_{k=0}^{\omega-1}r(k)=\sum_{k=0}^{\omega-1}b(k)x(k)+\sum_{k=0}^{\omega-1}\sum_{i=1}^{m}a_i(k)x(k-\tau_i(k,e^{x(k)}))。\tag{7}$$

记

$$\bar{r}=\frac{1}{\omega}\sum_{k=0}^{\omega-1}r(k),\bar{a}_i=\frac{1}{\omega}\sum_{k=0}^{\omega-1}a_i(k),\bar{b}=\frac{1}{\omega}\sum_{k=0}^{\omega-1}b(k),$$

由（7）知必存在 $k^*\in\{0,1,\ldots,\omega-1\}$ 以及常数 $M_1>0,$ 使得

$x(k^*)<M_1$ 或者 $x(k^*-\tau_i(k^*,\exp\{x(k^*)\}))<M_1$ 对某个 $i\in\{1,2,\ldots,m\}$，

若是 $x(k^*-\tau_i(k^*,\exp\{x(k^*)\}))<M_1$，则记 $k^*-\tau_i(k^*,\exp\{x(k^*)\})=k_3+n\omega$

$k_3\in\{0,1,\ldots,\omega-1\}$， n 是某正整数。于是可知总存在 $k_4\in\{0,1,\ldots,\omega-1\}$ 以及常数 $M_1>0,$ 使得

$$x(k_4)<M_1,\tag{8}$$

又由（7）式易知必存在 $k^{**}\in\{0,1,\ldots,\omega-1\}$ 以及常数 $M_2>0,$ 使得

$x(k^{**})>-M_2$ 或者 $x(k^{**}-\tau_i(k^{**},\exp\{x(k^{**})\}))>-M_2$ 对某个 $i\in\{1,2,\ldots,m\}$

于是类似前面可知总存在 $k_5\in\{0,1,\ldots,\omega-1\}$ 以及常数 $M_2>0,$ 使得

$$x(k_5)>-M_2,\tag{9}$$

由（8）式和（9）式可知存在 $k_0 \in \{0,1,\ldots,\omega-1\}$ 使得

$$|x(k_0)| < \max\{M_1, M_2\} := M_3。 \quad (10)$$

由引理 2 可知 $x(k) \le x(k_0) + \sum_{n=0}^{\omega-1} \left|\Delta x(n)\right|$，

从而 $$|x(k)| \le |x(k_0)| + \sum_{n=0}^{\omega-1} \left|\Delta x(n)\right| \le M_3 + \sum_{n=0}^{\omega-1} \left|\Delta x(n)\right| \quad (11)$$

于是 $$\|x\| \le M_3 + \sum_{n=0}^{\omega-1} \left|\Delta x(n)\right|。 \quad (12)$$

由（6），（11）式，我们有

$$|\Delta x(k)| \le r(k) + b(k)|x(k)| + \sum_{i=1}^{m} a_i(k) \left|x(k-\tau_i(k, e^{x(k)}))\right|$$

$$\le r(k) + \left(b(k) + \sum_{i=1}^{m} a_i(k)\right)\left(M_3 + \sum_{n=0}^{m} |\Delta x(n)|\right)$$

从而 $$\sum_{k=0}^{\omega-1} |\Delta x(k)| \le \frac{\omega(\bar{r} + \bar{b} + \sum_{i=1}^{m} \bar{a}_i)}{1 - \omega\bar{b} - \omega\sum_{i=1}^{m} \bar{a}_i} := M_4 ,$$

所以

$$\|x\| \le M_3 + M_4 := M_5 . \quad (13)$$

由 Q 及 N 的定义，当 $x \in \ker L$ 时，方程 $QNx = 0$ 等价于下列代数方程

$$\bar{r}-\bar{b}x-\sum_{i=1}^{m}\bar{a}_i x=0 \tag{14}$$

方程（14）的解为 $x=\dfrac{\bar{r}}{\bar{b}+\sum_{i=1}^{m}\bar{a}_i}$.

记 $M=\max\left\{\dfrac{\bar{r}}{\bar{b}+\sum_{i=1}^{m}\bar{a}_i},M_5\right\}$,

显然，M 与 λ 无关，令 $\Omega=\left\{x\in X\,\|x\|<M\right\}$，则 Ω 显然满足引理 1 的条件(a),(b),且 $\deg(JQN,\ker L\cap DomL,0)=1\neq 0$,由引理1,方程 $Lx=Nx$ 在 Ω 中至少存在一个 $\omega-$ 周期解，再由变换（3）知方程（1),（2）至少存在一个正 $\omega-$ 周期解。

显然，本文将文[1，2，3]中相应的微分时滞模型推广到了离散模型，而且所得结论也很简洁，这说明要求生态模型各指标连续变化实际上是一个比较高的要求，因此本文的结论更符合实际。

参考文献

[1]李琼，曹进德.关于中立型时滞模型的周期正解[J].数学研究与评论2000，(4)：562-566；

[2]李永昆.时滞种群模型的正周期解对所有正解的吸引性[J].高校应用数学学报，1997，12（3)：279-282；

[3]陈凤德，陈晓星等.状态依赖时滞种群模型的正周期解[J].福州大学学报（自然科学版)，2003，31（3)：261-264；

[4]李永昆.关于一个多滞量周期方程[J].数学进展,1999,(2)：135-142

[5]李永昆.具有扰动项的时滞 Logistic 方程的周期解[J]数学杂志，1998，(2)：175-178；

[6]刘智钢，凡爱平.多时滞 Logistic 差分方程正周期解的存在性[J].郴州师范高等专科学校学报，2003，24（2）：1-4；

[7]Zhang Xiao-ying, Bai Ling, Fan Meng, Wang Ke.Existence lf Positive Periodic Solution for Predator-Prey Difference System with Holling III Functional Response[J].Mathematica Applicata.2002,15(3):25-31;

[8]Gaines R.E. and Mawhim J.L. Coincidence Degree and Non-linear Differential Equations[M].Berlin:Springer,1997;

Existence of Positive Periodic Solution

of a Delay Population Difference Equations

Xiang Zhan-hong

(Department of Information Management, Hunan Financial and Economic College, Changsha, Hunan, 410205, China)

Abstract This paper proves that sufficient conditions for the existence of Positive periodic Solution of a delay population difference equations

$$y(k+1) = y(k)\exp\left\{r(k) - b(k)\ln y(k) - \sum_{i=1}^{m} a_i(k)\ln y(k-\tau_i(k, y(k)))\right\}$$

are obtained by means of coincidence degree theory.

Keywords Delay Population model; difference equation; coincidence degree; Positive periodic Solution

Subject Classification O175.4