非齐型空间上的反向 Hölder 不等式

严苗苗，钮鹏程
（西北工业大学应用数学系，教育部空间应用物理与化学重点实验室，西安 710129）

摘要：欧氏空间上经典调和分析以及齐型空间上的调和分析理论已经取得了许多重要的成果。我们注意到在欧氏空间和齐型空间中，一个关键的假设是测度满足二重性条件。当测度不满足二重性条件，而仅满足增长性条件时，就导致与齐型空间有本质区别的非齐型空间。本文通过给出这里适用的与非齐型空间相关的 Besicovich 覆盖引理和 Calderón-Zygmund 分解引理，结合文献中已有齐型空间中的方法，建立了非齐型空间上的反向 Hölder 不等式。

关键词：Radon 测度；非齐型空间；反向 Hölder 不等式
中图分类号：O175.2

A Reverse Hölder Inequality on the Nonhomogeneous Space

YAN Miaomiao, NIU Pengcheng
(Department of Applied mathematics; Key laboratory of Space Applied physics and chemistry, Ministry of Education, Xi'an 710129)

Abstract: Classical harmonic analysis on Euclidean spaces and homogeneous spaces have involved many important results. In Euclidean spaces and homogeneous spaces, a key assumption is that the measure satisfies the doubling condition. If the measure does not satisfy the doubling condition and only satisfy the growth condition, then it yields a nonhomogeneous space, which is different from any homogeneous space. In this paper, we establish a reverse Hölder inequality on the nonhomogeneous space by applying useful Besicovich covering lemma and Calderón-Zygmund decomposition lemma with respect to the nonhomogeneous space, and the known method on homogeneous spaces.

Keywords: Radon measures; nonhomogeneous; reverse Hölder inequality

1 引言和主要结论

欧氏空间 R^d 上经典的调和分析已经完善了。在经典调和分析中，一个关键的假设是测度 μ 满足二重性条件，即存在常数 $C>0$，使得对任意的 $x\in \operatorname{supp}\ \mu$ 及 $r>0$，都有

$$\mu B(x,2r)\le C\mu B(x,r),$$

其中 $B(x,r)=\{x\in R^d:|y-x|<r\}$。Coifman 和 Weiss([1, 2])根据二重性条件，引入了齐型空间的概念，把 R^d 上的函数空间、奇异积分算子等理论推广到齐型空间上。目前，齐型空间上的调和分析理论已经取得了许多瞩目的成果，参见[3, 4, 5, 6, 7, 8]。近年来的研究进一步表明，当欧氏空间 R^d 上的 Radon 测度不满足二重性条件，而仅满足增长性条件时，许多经典的结果仍然成立， 参见[9, 10, 11, 12, 13]。

我们先回忆一下 Radon 测度的定义。

定义 1.1 设空间 X 是一拓扑空间，称 μ 为 X 上的 Radon 测度，是指当 μ 为定义在 $\sigma-$ 代数的 Borel 集 $B(X)$ 上的一个有限测度，并满足以下性质：对任意 $\varepsilon>0$，存在一个紧集 $K=K_\varepsilon\subseteq X$ 使得 $\mu(X\setminus K_\varepsilon)<\varepsilon$。

基金项目：高等学校博士学科点专项科研基金（200806990032）；国家自然科学基金（批准号 10871157，11001221）
作者简介：严苗苗，（1985-），女，硕士，偏微分方程
通信联系人：钮鹏程，（1962-），男，教授，偏微分方程. E-mail: pengchengniu@nwpu.edu.cn

Radon 测度是 Hausdorff 拓扑空间上重要的一类测度，是 Bourbaki 和 Schwartz 关于积分理论发展的一个基础。它包括欧氏空间 R^d 中的 Lebesgue 测度；任意局部紧拓扑群上的 Haar 测度；任意拓扑空间上的 Dirac 测度等。此外也有不是 Radon 测度的例子，如欧氏空间 R^d 上的可数测度不是 Radon 测度，因为它不是局部有限的。

我们称 Radon 测度 μ 满足增长性条件，是指存在常数 $C_0>0$，使得对任意 $x\in supp\ \mu$，$r>0$，有

$$\mu B(x,r)\le C_0 r^n, \tag{1.1}$$

其中 $0<n\le d$ 。

定义 1.2 设 Ω 为欧氏空间 R^d 中的一个有界开集，ρ 为欧氏空间 R^d 中的距离，Ω 上的 Radon 测度满足增长性条件(1.1)，则 (Ω,ρ,μ) 被称为非齐型空间。

已经知道在欧氏空间中反向 Hölder 不等式成立，其证明可见陈亚浙、吴兰成[14]。U. Gianazza 在文[5]中，证明了在齐型空间中反向 Hölder 不等式也是成立的。它们在研究椭圆和退化椭圆方程解的正则性时起着关键作用。 一个自然的问题是这类不等式在非齐型空间上是否也成立？

本文的目的就是要在非齐型空间 (Ω,ρ,μ) 中证明反向 Hölder 不等式成立，即

定理 1.1 设非齐型空间 (Ω,ρ,μ) 上的非负函数 g 和 f 满足

$$g\in L^q(\Omega), q>1;\quad f\in L^r(\Omega), r>q 。$$

在 Ω 中固定一个以 R^* 为半径，x_0 为中心的立方体 $Q_1=Q(x_0,R^*)$，其中立方体的半径为其边长的一半。假设对任意 $x\in Q_1$ 和 $R<\frac{1}{2}dist(x,\partial Q_1)$，成立

$$\frac{1}{\mu(Q(x,R))}\int_{Q(x,R)} g^q d\mu \le b\{(\frac{1}{\mu\left(Q(x,\frac{4}{3}R)\right)}\int_{Q(x,\frac{4}{3}R)} g d\mu)^q+\frac{1}{\mu\left(Q(x,\frac{4}{3}R)\right)}\int_{Q(x,\frac{4}{3}R)} f^q d\mu\}$$

$$+\theta\frac{1}{\mu\left(Q(x,\frac{4}{3}R)\right)}\int_{Q(x,\frac{4}{3}R)} g^q d\mu, \tag{1.2}$$

其中 R,θ 都是正常数，$0\le\theta<1$， $b>1$。则存在正常数 C 和 ε（依赖于 b,θ,q,r 和维数 d ），使得 $g\in L^p_{loc}(Q),\ p\in[q,q+\varepsilon]$，并且对 $Q\subset Q_1, R<R^*$,成

$$\left(\frac{1}{\mu(Q(x,R))}\int_{Q(x,R)} g^p d\mu\right)^{1/p}\le C\left(\frac{1}{\mu(Q(x,2R))}\int_{Q(x,2R)} g^q d\mu\right)^{1/q}$$

$$+C\left(\frac{1}{\mu(Q(x,2R))}\int_{Q(x,2R)} f^p d\mu\right)^{1/p} 。 \tag{1.3}$$

本文的结构如下：第二节给出与非齐型空间相关的 Besicovich 覆盖引理和 Calderón-Zygmund 分解引理；第三节给出定理 1.1 的证明。我们在证明过程中使用了第二节的结果，并综合运用文献[14]和[5]中的方法。

2 预备知识

本节首先给出非齐型空间情形下的的 Besicovich 覆盖引理，在文[13,15]中对由拟距离和 Lebesgue 测度所导致的非齐型空间情形给出了这类覆盖引理的叙述。

引理 2.1(Besicovich 覆盖引理) 设(Ω,ρ,μ)是非齐型空间，它被球族$\{B(x_\alpha,r(x_\alpha))\}$ $(x_\alpha\in\Omega,r(x_\alpha)>0)$所覆盖，则能够从该球族$\{B(x_\alpha,r(x_\alpha))\}$中选取出两两不相交的子列$\{B_i\}(B_i=B(x_i,r_i)\subset\Omega,x_i\in\Omega,r_i>0,i=1,2,\ldots)$，使得

(1) $\bigcup_i B_i^*=\Omega$，其中$B_i^*=B(x_i,C^*r_i),C^*>1$是常数；

(2) 存在正常数M，使得Ω中每一点至多属于球族$\{B_i^*\}$中M个球B_i^*；

(3) 对每一个i，都有$B_i^{**}\cap C\Omega\neq\varnothing$。其中$B_i^{**}=B(x_i,C^{**}r_i),C^{**}>1$是常数。

(4) 进一步，存在两两不相交的立方体族$\{Q_i\}$使得

$B_i\subset Q_i\subset B_i^*,\bigcup_i Q_i=\Omega$.

注 2.1 在引理 2.1 中，集合Ω是有界的条件是必须的，例如令$\Omega=[0,+\infty)\subset R$，对所有的$x\in\Omega$，考虑$Q_x=[0,2x]$。这样就产生了矛盾。

设$h(t)$是定义于$(0,+\infty)$上的有界函数，对于$p\in(0,+\infty)$，记

$$\Phi_p(t,h)=-\int_t^{+\infty}s^p dh(s), \tag{2.7}$$

如果上述积分有意义。

给定一个立方体Q，对于Q内部的每一点x都定义

$$C_Q(x)=\{Q_x(r)\}_{r>0},$$

其中$Q_x(r)$是半径为r且包含在立方体Q中的立方体，使得从x到该立方体的中心的距离为最小。立方体Q的半径定义为边长的一半。

定义 2.1 设Q是一立方体，$f\geq0,f\in L^1(\mu(Q))$。与函数f相关的局部极大函数定义为

$$M_Q f(x)=\sup_{R:R\in C_Q(x)}\frac{1}{\mu(R)}\int_R|f(y)|d\mu(y)。$$

测度μ蕴含了下列函数

$$h_x(r):=\frac{1}{\mu(Q_x(r))}\int_{Q_x(r)}|f|d\mu,$$

对于立方体Q内的所有x在$\left[0,\frac{l(Q)}{2}\right]$是连续的(见[12])。

函数$M_Q f$的水平集表示为

$$\Omega_\lambda=\{x\in Q:M_Q f(x)>\lambda\}。$$

一个伪不相交的立方体族$\left\{Q_j\right\}$是指若存在一个常数C，使得

$$\sum_j \chi_{Q_j} \le C,$$

其中χ_E表示集合E的特征函数。

J.Orobitg, C Pérez [10]在欧氏空间R^d中 Lebesgue 测度意义下的非齐型空间上证明了一个 Calderón-Zygmund 分解引理。我们现在叙述在 Radon 测度导致的非齐型空间上的 Calderón-Zygmund 分解引理，证明与[10]类似。

引理 2.6 (Calderón-Zygmund 分解) 设Q是一立方体，$f \in L^1\left(\mu(Q)\right)$是一非负函数，$\lambda$是一个正常数。令$f_Q = \frac{1}{\mu(Q)}\int_Q f d\mu < \lambda$，其中$\mu$满足(1.1)，使得$\Omega_\lambda$是非空集合。则存在一个伪不相交的立方体族$\left\{Q_j\right\}$，使得对于每一个$j$，$Q_j$满足：，

(i) $Q_j \subseteq Q$;

(ii) $f\left(x\right) \le \lambda \quad x \in Q \setminus \bigcup_j Q_j, \mu - a.e.$;

(iii) $\frac{1}{\mu\left(Q_j\right)}\int_{Q_j} f d\mu \le \lambda$;

(iv) $\bigcup_j Q_j = \bigcup_{k=1}^{B(n)} \bigcup_{i \in \delta_k} Q_i$，

其中$\bigcup_{i \in \delta_k} Q_i$中的立方体是两两不相交的，$\delta_k$是一个与$k$有关的整数集，$B\left(n\right)\left(>1\right)$是 Besicovich 覆盖常数。

3 反向 Hölder 不等式

定理 1.1 的证明 让我们考虑立方体Q_1：

$$Q_1 = Q(3\bar{R}, x_0),$$

其中$3\bar{R} = R^*$，并定义立方体列$\{C_k\}$如下

$$C_0 = Q(\bar{R}, x_0);$$

$$C_k = \{x \in R^d : 2^{1-k}\bar{R} < dist(x, \partial Q_1) \le 2^{2-k}\bar{R}\},\quad k = 1, 2, \cdots。$$

显然有

$$Q(3\bar{R}, x_0) = \bigcup_{k \ge 0} C_k。$$

现在我们引入记号：

$\alpha_k = (K_1 2^k)$，K_1是一个大于 0 的常数；

$$G(x)=\frac{g(x)}{(g^q)_{Q_1}^{1/q}}，\ \mathfrak{G}_k(x)=\frac{G(x)}{\alpha_k}\quad \text{在} C_k \text{上；}$$

$$F(x)=\frac{f(x)}{(g^q)_{Q_1}^{1/q}}，\ \mathfrak{F}_k(x)=\frac{F(x)}{\alpha_k}\quad \text{在} C_k \text{上；}$$

$$E(h,t)=\{x\in Q_1:h>t\}，\quad t>1，\ h \text{为任意一个正函数，}$$

其中 $(g^q)_{Q_1}=\dfrac{1}{\mu(Q_1)}\int_{Q_1}g^q d\mu$。固定 $t\in[1,+\infty)$，并为了方便起见，选择 $s=K_2t$，其中 $K_2=\dfrac{5q}{q-1}\sqrt[q]{64b}$，即

$$s^q=64b(\frac{5q}{q-1}t)^q。$$

并由函数 $G(x)$ 的定义有

$$\int_{Q_1}G^q d\mu=\mu(Q_1)。$$

对于每个 C_k，我们用边长为 $2^{1-k}\overline{R}$ 的立方体来等分，得到互不重叠的立方体 $\{P_{k,j}\}$，使得

$$\bigcup_j P_{k,j}=C_k。$$

在每个 $P_{k,j}$ 上应用引理 2.6，得到一族伪不相交的立方体 $\{Q_{k,j}^i(x_i,r_i)\}$，使得：

(i) $Q_{k,j}^i(x_i,r_i)\subset P_{k,j}$；

(ii) $G\le\alpha_k s$ *a.e.*, 在 $P_{k,j}-\bigcup_i Q_{k,j}^i(x_i,r_i)$ 中；

(iii) $\dfrac{1}{\mu(Q_{k,j}^i)}\displaystyle\int_{Q_{k,j}^i}G^q(t)d\mu(t)\le K_3(\alpha_k s)^q$，

其中 K_3 是一个常数。上述(i)—(iii)蕴含着，对于每个 C_k，可得到伪不相交的立方体列 $\{Q_k^i(x_i,r_i)\}$，使得

(i)’ $Q_k^i(x_i,r_i)\subset C_k$；

(ii)’ $G\le\alpha_k s$ *a.e.*, 在 $C_k-\bigcup_i Q_k^i(x_i,r_i)$ 中；

(iii)’ $\dfrac{1}{\mu(Q_{k,j}^i)}\displaystyle\int_{Q_k^i}G^q(t)d\mu(t)\le K_3(\alpha_k s)^q$。

在(iii)’中的不等式两边同时除以 α_k^q，得到

$$\frac{1}{\mu(Q_k^i)}\int_{Q_k^i}\frac{G^q(t)}{\alpha_k^q}d\mu(t)\le K_3 s^q，$$

即

$$\frac{1}{\mu\left(Q_k^i\right)}\int_{Q_k^i}\mathfrak{G}_k^q d\mu \le K_3 s^q 。$$

由

$$E(\mathfrak{G}_k, s) = \left\{x \in C_k : \mathfrak{G}_k > s\right\},$$

可得 $\mu\left(\bigcup_k E(\mathfrak{G}_k, s) - \bigcup_{i,k} Q_k^i\right) = 0$，故有

$$\sum_k \int_{E(\mathfrak{G}_k, s)} \mathfrak{G}_k^q d\mu \le \sum_k \sum_i \int_{Q_k^i} \mathfrak{G}_k^q d\mu \le K_3 s^q \sum_k \sum_i \mu\left(Q_k^i\right) \le K_4 s^q \sum_k \mu\left(\Omega_k\right) \quad (3.1)$$

其中上面求和都是有限项求和（因为立方体是两两伪不相交的，则每一个立方体都之多有限次被重叠)；而且

$$K_4 = K_3 C,$$

这里 C 是不等式 $\sum_k \sum_i \mu\left(Q_k^i\right) \le C \sum_k \mu\left(\Omega_k\right)$ 中的常数；我们还用到记号

$$\Omega_k = \left\{x \in C_k : M_{C_k} G^q(x) > s^q \alpha_k^q\right\}。$$

因此，对每个 $x \in \Omega_k$，存在一个立方体 $\bar{Q}_k^i(x, \bar{r}) \subseteq \Omega_k$，满足

$$\frac{1}{\mu\left(\bar{Q}_k^i\right)}\int_{\bar{Q}_k^i} G^q(t) d\mu(t) \ge s^q \alpha_k^q, \quad (3.2)$$

故

$$\bar{Q}_k^i(x, \bar{r}) \subseteq \Omega_k \subseteq C_k,$$

所以

$$\bar{Q}_0^i \subseteq C_0 \subseteq C_0 \cup C_1 \cup C_2; \ \bar{Q}_k^i \subseteq C_k \subseteq \bigcup_{l=k-1}^{k+2} C_l. \quad (3.3)$$

将与立方体 $\bar{Q}_k^i(x, \bar{r})$ 同心，边长为 $\tilde{r} = \frac{4}{3}\bar{r}$ 的立方体表示为 $\tilde{Q}_k^i(x, \tilde{r})$，其中 $k = 0, 1, 2, \cdots$。

由 C_k 的定义，我们可知 C_0 的半径和 C_1 的半径相等，$C_k\left(k = 1, 2, \cdots\right)$ 的半径是 C_{k+1} 的半径的 2 倍，所以有

$$\tilde{Q}_0^i \subseteq \bigcup_{l=0}^{2} C_l \subseteq \bigcup_{l=0}^{4} C_l, \quad (3.4)$$

$$\tilde{Q}_k^i \subseteq \bigcup_{l=k-1}^{k+2} C_l \subseteq \bigcup_{l=k-1}^{k+4} C_l 。 \quad (3.4)'$$

由于（3.3）和（3.3）’式，我们有

$$\bar{Q}_k^i = (\bar{Q}_k^i \cap C_k) \cup (\bar{Q}_k^i \cap C_{k+1}) \cup (\bar{Q}_k^i \cap C_{k+2})。$$

因此

$$\int_{\bar{Q}_k^i(x,\bar{r})} G^q d\mu = \int_{\bar{Q}_k^i(x,\bar{r}) \cap C_{k+1}} G^q d\mu + \int_{\bar{Q}_k^i(x,\bar{r}) \cap C_{k+1}} G^q d\mu + \int_{\bar{Q}_k^i(x,\bar{r}) \cap C_{k+2}} G^q d\mu 。$$

利用（3.2）式，得到

$$s^q \le \frac{1}{\mu\left(\bar{Q}_k^i(x,\bar{r})\right)}\left[\int_{\bar{Q}_k^i(x,\bar{r})\cap C_k}\frac{G^q}{\alpha_k^q}d\mu+\int_{\bar{Q}_k^i(x,\bar{r})\cap C_{k+1}}\frac{G^q}{\alpha_k^q}d\mu+\int_{\bar{Q}_k^i(x,\bar{r})\cap C_{k+2}}\frac{G^q}{\alpha_k^q}d\mu\right]$$

$$=\frac{1}{\mu\left(\bar{Q}_k^i(x,\bar{r})\right)}\left[\int_{\bar{Q}_k^i(x,\bar{r})\cap C_k}\mathfrak{G}_k^q d\mu+2\int_{\bar{Q}_k^i(x,\bar{r})\cap C_{k+1}}\mathfrak{G}_{k+1}^q d\mu+4\int_{\bar{Q}_k^i(x,\bar{r})\cap C_{k+2}}\mathfrak{G}_{k+2}^q d\mu\right]$$

$$\le\frac{4}{\mu\left(\bar{Q}_k^i(x,\bar{r})\right)}\int_{\bar{Q}_k^i(x,\bar{r})}\mathfrak{G}_k^q d\mu 。\tag{3.5}$$

将（1.2）式改写成

$$\frac{1}{\mu\left(\bar{Q}_k^i(x,\bar{r})\right)}\int_{\bar{Q}_k^i(x,\bar{r})}g^q d\mu\le b\left\{\left(\frac{1}{\mu\left(\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})\right)}\int_{\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})}g d\mu\right)^q+\frac{1}{\mu\left(\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})\right)}\int_{\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})}f^q d\mu\right\}$$

$$+\theta\frac{1}{\mu\left(\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})\right)}\int_{\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})}g^q d\mu 。$$

在上式两边同时除以 $(g^q)_{Q_k}\alpha_k^q$，并结合（3.5）式得

$$\frac{s^q}{4}\le\frac{1}{\mu\left(\bar{Q}_k^i(x,\bar{r})\right)}\int_{\bar{Q}_k^i(x,\bar{r})}\mathfrak{G}_k^q d\mu$$

$$\le b\left\{\left(\frac{1}{\mu\left(\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})\right)}\int_{\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})}\frac{G}{\alpha_k}d\mu\right)^q+\frac{1}{\mu\left(\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})\right)}\int_{\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})}\frac{F^q}{\alpha_k^q}d\mu\right\}$$

$$+\frac{\theta}{\mu\left(\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})\right)}\int_{\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})}\frac{G^q}{\alpha_k^q}d\mu$$

$$=:b\left\{\left(I_1\right)^q+I_2\right\}+I_3 。\tag{3.6}$$

对上式右端 I_1, I_2 和 I_3 做估计：

$$I_1=\frac{1}{\mu\left(\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})\right)}\left[\int_{\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})\cap C_k}\frac{G}{\alpha_k}d\mu+\int_{\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})\cap C_{k+1}}\frac{G}{\alpha_k}d\mu\right.$$

$$\left.+\int_{\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})\cap C_{k+2}}\frac{G}{\alpha_k}d\mu+\int_{\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})\cap C_{k+3}}\frac{G}{\alpha_k}d\mu+\int_{\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})\cap C_{k+4}}\frac{G}{\alpha_k}d\mu\right]$$

$$=\frac{1}{\mu\left(\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})\right)}\left[\int_{\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})\cap C_k}\mathfrak{G}_k d\mu+2\int_{\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})\cap C_{k+1}}\mathfrak{G}_{k+1}d\mu\right.$$

$$\left.+4\int_{\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})\cap C_{k+2}}\mathfrak{G}_{k+2}d\mu+8\int_{\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})\cap C_{k+3}}\mathfrak{G}_{k+3}d\mu+16\int_{\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})\cap C_{k+4}}\mathfrak{G}_{k+4}d\mu\right]$$

$$\le\frac{16}{\mu\left(\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})\right)}\int_{\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})}\mathfrak{G}_k d\mu ;\tag{3.7}$$

$$I_2=\frac{1}{\mu\left(\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})\right)}\Big[\int_{\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})\cap C_k}\mathfrak{F}_k^q d\mu+\int_{\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})\cap C_{k+1}}\mathfrak{F}_k^q d\mu$$

$$+\int_{\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})\cap C_{k+2}}\mathfrak{F}_k^q d\mu+\int_{\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})\cap C_{k+3}}\mathfrak{F}_k^q d\mu+\int_{\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})\cap C_{k+4}}\mathfrak{F}_k^q d\mu\Big]$$

$$=\frac{1}{\mu\left(\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})\right)}\Big[\int_{\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})\cap C_k}\mathfrak{F}_k^q d\mu+2\int_{\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})\cap C_{k+1}}\mathfrak{F}_{k+1}^q d\mu$$

$$+4\int_{\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})\cap C_{k+2}}\mathfrak{F}_{k+2}^q d\mu+8\int_{\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})\cap C_{k+3}}\mathfrak{F}_{k+3}^q d\mu+16\int_{\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})\cap C_{k+4}}\mathfrak{F}_{k+4}^q d\mu\Big]$$

$$\leq\frac{16}{\mu\left(\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})\right)}\int_{\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})}\mathfrak{F}_k^q d\mu\,; \tag{3.8}$$

$$I_3=\frac{1}{\mu\left(\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})\right)}\Big[\int_{\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})\cap C_k}\mathfrak{G}_k^q d\mu+\int_{\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})\cap C_{k+1}}\mathfrak{G}_k^q d\mu$$

$$+\int_{\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})\cap C_{k+2}}\mathfrak{G}_k^q d\mu+\int_{\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})\cap C_{k+3}}\mathfrak{G}_k^q d\mu+\int_{\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})\cap C_{k+4}}\mathfrak{G}_k^q d\mu\Big]$$

$$=\frac{1}{\mu\left(\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})\right)}\Big[\int_{\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})\cap C_k}\mathfrak{G}_k^q d\mu+2\int_{\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})\cap C_{k+1}}\mathfrak{G}_{k+1}^q d\mu$$

$$+4\int_{\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})\cap C_{k+2}}\mathfrak{G}_{k+2}^q d\mu+8\int_{\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})\cap C_{k+3}}\mathfrak{G}_{k+3}^q d\mu+16\int_{\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})\cap C_{k+4}}\mathfrak{G}_{k+4}^q d\mu\Big]$$

$$\leq\frac{16}{\mu\left(\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})\right)}\int_{\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})}\mathfrak{G}_k^q d\mu\,。 \tag{3.9}$$

将(3.7),(3.8)和(3.9)代入(3.6)得到

$$\frac{s^q}{4}\leq\frac{1}{\mu\left(\bar{Q}_k^i(x,\bar{r})\right)}\int_{\tilde{Q}_k^i(x,\bar{r})}\mathfrak{G}_k^q d\mu$$

$$\leq 16b\left\{\left(\frac{1}{\mu\left(\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})\right)}\int_{\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})}\mathfrak{G}_k d\mu\right)^q+\frac{1}{\mu\left(\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})\right)}\int_{\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})}\mathfrak{F}_k^q d\mu\right\}$$

$$+\frac{16\theta}{\mu\left(\tilde{Q}_k^i(r,x)\right)}\int_{Q^*}\mathfrak{G}_k^q d\mu\,。$$

回忆 s 的取法，将上式两边同时除以 $16b$，并开 q 次方，可得

$$\frac{5q}{q-1}t\mu\left(\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})\right)\leq\int_{\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})}\mathfrak{G}_k d\mu+\left(\mu\left(\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})\right)\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_{\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})}\mathfrak{F}_k^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\frac{\theta}{b}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})}\mathfrak{G}_k^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}\left(\mu\left(\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})\right)\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$=:I'+II'+III', \tag{3.10}$$

对（3.10）式的右端各项分别做估计。由 $E(\mathfrak{G}_k,s)$ 的定义，第一项容易估计为

$$I' \le \int_{E(\mathfrak{G}_k,t)\cap\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})} \mathfrak{G}_k d\mu + \int_{\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})\setminus\left(E(\mathfrak{G}_k,t)\cap\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})\right)} \mathfrak{G}_k d\mu$$

$$\le \int_{E(\mathfrak{G}_k,t)\cap\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})} \mathfrak{G}_k d\mu + t\mu\left(\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})\right);$$

与第一项的估计类似，再由带 $\varepsilon\left(\varepsilon=\left(t^{q-1}\right)^{\frac{p}{q}}\right)$ 的 Young 不等式，可得

$$II' \le \left(\mu\left(\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})\right)\right)^{1-\frac{1}{q}} \left\{\int_{E(\mathfrak{F}_k,t)\cap\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})} \mathfrak{F}_k^q d\mu + t^q\left(\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})\right)\right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$\le \left(\mu\left(\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})\right)\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_{E(\mathfrak{F}_k,t)\cap\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})} \mathfrak{F}_k^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\mu\left(\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})\right)\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(t^q\left(\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})\right)\right)^{1/q}$$

$$\le t^{1-q}\left[\left(\int_{E(\mathfrak{F}_k,t)\cap\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})} \mathfrak{F}_k^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}\right]^q + \left(t^{1-q}\right)^{-\frac{p}{q}}\left[\left(\mu\left(\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})\right)\right)^{1-\frac{1}{q}}\right]^p + t\mu\left(\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})\right)$$

$$\le t^{1-q}\int_{E(\mathfrak{F}_k,t)\cap\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})} \mathfrak{F}_k^q d\mu + t^{\left(1-\frac{1}{q}\right)p}\left[\left(\mu\left(\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})\right)\right)^{\frac{1}{p}}\right]^p + t\mu\left(\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})\right)$$

$$\le t^{1-q}\int_{E(\mathfrak{F}_k,t)\cap\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})} \mathfrak{F}_k^q d\mu + 2t\mu\left(\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})\right)$$

$$\le \int_{E(\mathfrak{F}_k,t)\cap\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})} \mathfrak{F}_k^q d\mu + 2t\mu\left(\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})\right);$$

由于 $\frac{\theta}{b}<1$，类似于第二项的估计，有

$$III' \le 2t\mu\left(\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})\right) + \frac{\theta}{b}t^{1-q}\int_{E(\mathfrak{G}_k,t)\cap\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})} \mathfrak{G}_k^q d\mu \text{。}$$

综合上面三项的估计，有

$$\frac{5}{q-1}t\mu\left(\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})\right)$$

$$\le \int_{E(\mathfrak{G}_k,t)\cap\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})} \mathfrak{G}_k d\mu + \int_{E(\mathfrak{F}_k,t)\cap\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})} \mathfrak{F}_k^q d\mu + \frac{\theta}{b}t^{1-q}\int_{E(\mathfrak{G}_k,t)\cap\tilde{Q}_k^i(x,\tilde{r})} \mathfrak{G}^q d\mu \text{。} \quad (3.11)$$

现在我们记

$$D_k = \bigcup_i \tilde{Q}_k^i \text{。} \quad (3.12)$$

结合（3.11）和（3.12），我们得到

$$\mu(D_k) \le \sum_i \mu\left(\tilde{Q}_k^i\right)$$

$$\le \frac{q-1}{5}\sum_{i=k-1}^{k+4}\left\{t^{-1}\int_{E(\mathfrak{G}_k,t)\cap C_i} \mathfrak{G}_k d\mu + t^{-1}\int_{E(\mathfrak{F}_k,t)\cap C_i} \mathfrak{F}_k^q d\mu + \frac{\theta}{b}t^{-q}\int_{E(\mathfrak{G}_k,t)\cap C_i} \mathfrak{G}_k^q d\mu\right\} \text{。} (3.13)$$

由 $\tilde{Q}_k^i$ 的选取可知

$$\Omega_k \subseteq \bigcup_i \tilde{Q}_k^i \text{，}$$

即 $D_k \supseteq \Omega_k$，所以

$$\sum_k \mu(\Omega_k) \le \sum_k \mu(D_k)。$$

当我们按 k 求和，因为每一个 C_i 上的积分至多进行 6 次，所以(3.13)式变为

$$\sum_k \mu(D_k) \le \frac{6}{5}(q-1)\left\{t^{-1}\int_{E(\mathfrak{G}_k,t)} \mathfrak{G}_k d\mu + t^{-1}\int_{E(\mathfrak{F}_k,t)} \mathfrak{F}_k^q d\mu + \frac{\theta}{b}t^{-q}\int_{E(\mathfrak{G}_k,t)} \mathfrak{G}_k^q d\mu\right\} 。\tag{3.14}$$

由(3.14)和(3.1)式，我们有

$$\int_{E(\mathfrak{G}_k,s)} \mathfrak{G}_k^q d\mu \le K_4 64b(\frac{5q}{q-1}t)^q \frac{6}{5}(q-1)$$
$$\times\left\{t^{-1}\int_{E(\mathfrak{G}_k,t)} \mathfrak{G}_k d\mu + t^{-1}\int_{E(\mathfrak{F}_k,t)} \mathfrak{F}_k^q d\mu + \frac{\theta}{b}t^{-q}\int_{E(\mathfrak{G}_k,t)} \mathfrak{G}_k^q d\mu\right\},$$

即

$$\int_{E(\mathfrak{G}_k,s)} \mathfrak{G}_k^q d\mu \le K_5 b t^{q-1}\left\{\int_{E(\mathfrak{G}_k,t)} \mathfrak{G}_k d\mu + \int_{E(\mathfrak{F}_k,t)} \mathfrak{F}_k^q d\mu\right\} + K_5\theta\int_{E(\mathfrak{G}_k,t)} \mathfrak{G}_k^q d\mu ，\tag{3.15}$$

其中

$$K_5 = K_4 64\frac{6}{5}(\frac{5q}{q-1})^q (q-1) .$$

另一方面，因为 $s>t$，所以在集合 $E(\mathfrak{G}_k,t)-E(\mathfrak{G}_k,s)$ 中函数 $\mathfrak{G}_k$ 满足

$$t < \mathfrak{G}_k \le s ,$$

于是

$$\begin{aligned}
&\int_{E(\mathfrak{G}_k,t)-E(\mathfrak{G}_k,s)} \mathfrak{G}_k^q d\mu \\
&= \int_{E(\mathfrak{G}_k,t)-E(\mathfrak{G}_k,s)} \mathfrak{G}_k \mathfrak{G}_k^{q-1} d\mu \\
&\le s^{q-1}\int_{E(\mathfrak{G}_k,t)-E(\mathfrak{G}_k,s)} \mathfrak{G}_k d\mu \\
&\le (64b)^{(q-1)/q}\left(\frac{5q}{q-1}t\right)^{q-1}\int_{E(\mathfrak{G}_k,t)} \mathfrak{G} d\mu \\
&\le K_6 b t^{q-1}\int_{E(\mathfrak{G}_k,t)} \mathfrak{G}_k d\mu ,
\end{aligned}\tag{3.16}$$

其中

$$K_6 = (64b)^{\frac{q-1}{q}}(\frac{5q}{q-1}t)^{q-1},$$

记

$$K_7 = \frac{(K_5+K_4)b}{1-K_5\theta} > 0 ,$$

其中

$$K_5\theta < 1 .$$

将(3.15)和(3.16)式相加，得

$$\int_{E(\mathfrak{G}_k,t)} \mathfrak{G}_k^q d\mu \le K_7 t^{q-1} \left\{ \int_{E(\mathfrak{G}_k,t)} \mathfrak{G}_k d\mu + \int_{E(\mathfrak{F}_k,t)} \mathfrak{F}_k^q d\mu \right\}, \tag{3.17}$$

现在记

$$h(t) = \int_{E(\mathfrak{G}_k,t)} \mathfrak{G}_k d\mu, \quad H(t) = \int_{E(\mathfrak{F}_k,t)} \mathfrak{F}_k^q d\mu .$$

类似于引理 2.3，我们有

$$\int_{E(\mathfrak{G}_k,t)} \mathfrak{G}_k^q d\mu = -\int_t^{+\infty} s^{q-1} dh(s) = \Phi_{q-1}(1,h), \tag{3.18}$$

其中 $\Phi_p(1,h)$ 定义于(2.7)。这样(3.17)式可以写成

$$\Phi_{q-1}(1,h) \le K_8 t^{q-1} \left[h(t) + H(t) \right],$$

其中

$$K_8 = K_7 a,$$

$a \in (1,+\infty)$。.应用引理 2.2，对于 $\varepsilon = \dfrac{q-1}{a-1}$，则

$$q + \varepsilon = q + \frac{q-1}{a-1} = \frac{a}{a-1} q,$$

所以对于 $p \in [q, q+\varepsilon)$，我们有

$$\Phi_{p-1}(t_0,h) \le K_9 t_0^{p-q} \left[\Phi_{q-1}(t_0,h) + \Phi_{p-1}(t_0,H) \right] . \tag{3.19}$$

其中 K_9 是一个与 a, p, q 有关的常数。

由(3.18)(令 $t = t_0$)和(3.19)式，利用引理 2.2，我们可得到

$$\begin{aligned}
&\int_{Q(x,R)} \mathfrak{G}_k^q d\mu \\
&\le \int_{Q(x,R)-E(\mathfrak{G}_k,t_0)} \mathfrak{G}_k^q d\mu + \int_{E(\mathfrak{G}_k,t_0)} \mathfrak{G}_k^q d\mu \\
&\le t_0^p \mu\left(Q(x,R)\right) + \Phi_{p-1}(t_0,h) \\
&= t_0^p \mu\left(Q(x,R)\right) + K_9 t_0^{p-q} \left[\Phi_{q-1}(t_0,h) + \Phi_{p-1}(t_0,H) \right] \\
&= t_0^p \mu\left(Q(x,R)\right) + K_9 t_0^{p-q} \left[\int_{E(\mathfrak{G}_k,t_0)} \mathfrak{G}_k^q d\mu + \int_{E(\mathfrak{G}_k,t_0)} \mathfrak{F}_k^q d\mu \right] \\
&\le K_{10} \left[\int_{Q(x,R)} \mathfrak{G}_k^q d\mu + \int_{Q(x,R)} \mathfrak{F}_k^q d\mu \right] \\
&\le \mu\left(Q(x,R)\right) + K_{11} \left[\int_{Q(x,R)} \mathfrak{G}_k^q d\mu + \int_{Q(x,R)} \mathfrak{F}_k^q d\mu \right]。
\end{aligned} \tag{3.20}$$

由(3.20)式可得

$$\frac{1}{\mu(Q(x,R))}\int_{Q(x,R)} g^p d\mu$$
$$\le K_{11}\left\{\frac{1}{\mu(Q(x,R))}\int_{Q_{Q(x,R)}} g^q d\mu+\frac{1}{\mu(Q(x,R))}\int_{Q(x,R)} f^q d\mu\right\}.$$

在两边开 p 次方，

$$\left(\frac{1}{\mu(Q(x,R))}\int_{Q(x,R)} g^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\le K_{13}\left\{\left(\frac{1}{\mu(Q(x,2R))}\int_{Q(x,2R)} g^q d\mu\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\frac{1}{\mu(Q(x,2R))}\int_{Q(x,2R)} f^q d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right\}.$$

因为 $p>q$，所以

$$\left(\frac{1}{\mu(Q(x,R))}\int_{Q(x,R)} g^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\le K_{14}\left(\frac{1}{\mu(Q(x,2R))}\int_{Q(x,2R)} g^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{1}{\mu(Q(x,2R))}\int_{Q(x,2R)} f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

其中 $K_{10},K_{11},K_{12},K_{13}$ 都是常数。定理 1.1 证明完毕。

[参考文献] (References)

[1] Coifman R R, Weiss G , Analyse harmonique non-commutative sur certains espaces homogènes[M]. Lecture Notes in Mathematics, 242, Springer-Verlag, 1971.

[2] Coifman R R,Weiss G , Extension of Hardy spaces and their use in analysis[J]. Bull Amer Math Soc, 1977, 83:569-645.

[3] 程民德,邓东皋,龙瑞麟,实分析(第二版)[M]. 北京:高等教育出版社,2008.

[4] 邓东皋，韩永生，齐型空间上的 Calderón 型再生公式[J]. 中国科学 A 辑, 1994, 37(12): 1260-1269.

[5] Gianazza U, Regulariaty for nonlinear equations involving square Hörmander operators [J]. Nonlinear Anal, 1994(1),23:49-73.

[6] 刘宗光,曾岳生，齐型空间上的 Herz 空间及其应用[J]. 数学物理学报 A 辑, 1999, 19(3): 270-277.

[7] Macias R A, Segovia C A, A decomposition into atoms of distribution on space of homogeneous type[J]. Adv in Math, 1979, 33: 271-309.

[8] 杨乐，龙瑞麟，齐型空间上的 BMO 函数[J].中国科学 A 辑, 1984, 4:301-312.

[9] Nazarov F, Treil S, Volberg A. Tb theorem on nonhomogeneous spaces[J]. Duck Math J, 2002, 113: 259-312.

[10] Orobitg.J, Pérez.C, weight for nondoubling measures in and applications[J]. Tran Amer Math Soc, 2002 (5),354:2013-2033.

[11] Tolsa X, Littlewood-Paley theory and the T(1)theorem with non-doubling measures[J]. Adv Math, 2001,164: 57-116.

[12] Tolsa X, BMO, H1 and CZO for non doubling measures [J]. Ann Math, 2000, 319: 89-149.

[13] Tolsa X, A proof of the weak(1,1)inequality for dingular integrals with non doubling measures based on Calderón-Zygmund decomposition [J]. Matje, atocs Subject Classification, 2000.

[14] 陈亚浙,吴兰成，二阶椭圆型方程和方程组(第二版)[M]. 北京:科学出版社,1997.

[15] Bramanti M, Singular integrals in nonhomogeneous spaces: and continuity from Hölder estimates [J]. Revista Matemática Iberoamericana, 2010. to appear.