一类非自治拟线性双曲方程的精确边界能观性

徐海文，于立新
（烟台大学数学与信息科学学院，山东 烟台 264005）

摘要：在非自治拟线性双曲方程混合初边值问题半整体C^2解存在唯一性的理论基础，本文主要解决一类具有两个非零异号特征值，且具一般非线性边界条件的非自治拟线性双曲方程的精确边界能观性，并将此应用到边界条件中未知函数没有耦合关系，但方程组本身具有某种耦合关系的一阶非自治拟线性双曲型方程组混合初边值问题的单侧精确边界能观性。

关键词：非自治拟线性双曲方程；半整体C^2解；精确边界能观性
中图分类号：O175.2

Excat Boundary Observability For A Kind Of Nonautonomous Quasilinear Hyperbolic Equation

Xu Haiwen, Yu Lixin
(School of Mathematics and Information Sciences, Yantai University, ShanDong YanTai 264005)

Abstract: By means of the theory on the semiglobal C^2 solution to the mixed initial-boundary value problem for nonautonomous quasilinear hyperbolic equation,we establish the local exact boundary observability for the mixed initial-boundary value problem for a kind of nonautonomous quasilinear hyperbolic equation with two different sign eigenvalues and the local exact boundary observability for the one-side exact boundary observability for first order nonautonomous quasilinear hyperbolic systems.

Keywords: nonautonomous second-order quasilinear hyperbolic equation; semiglobal C^2 solution; exact boundary observability

0 引言

考虑非自治拟线性方程

$$u_{tt}+a(t,x,u,u_x,u_t)u_{tx}+b(t,x,u,u_x,u_t)u_{xx}=c(t,x,u,u_x,u_t)，\quad (1.1)$$

其中$a(t,x,u,u_x,u_t)$， $b(t,x,u,u_x,u_t)$和$c(t,x,u,u_x,u_t)$是C^1函数，且

$$c(t,x,0,0,0)\equiv 0，\quad (1.2)$$

$$b(t,x,0,0,0)<0，\quad (1.3)$$

此时方程(1.1)有两个非零异号的特征值

$$\lambda=\frac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2}<0，\quad \mu=\frac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2}>0。\quad (1.4)$$

给定初始条件

$$t=0:(u,u_t)=(\varphi(x),\omega(x))\quad (1.5)$$

及边界条件

$$x=0:g_1(t,u,u_x,u_t)=h_1(t)，\quad (1.6)$$

基金项目：山东省自然科学基金（R2010AM012）
作者简介：徐海文，（1982-），男，硕士，主要研究方向：应用偏微分方程
通信联系人：于立新，（1973-），女，副教授，应用偏微分方程. E-mail: fdylx01@163.com

$x=1: g_2(t,u,u_x,u_t)=h_2(t)$，（1.7）

其中 g_1 和 g_2 是 C^1 函数,且

$g_i(t,x,0,0,0)\equiv 0(i=1,2)$。（1.8）

我们取定一个适当的时间 T 后,利用 u(或 u_x)在时间[0,T]内在边界上的观测值及给定的边界函数 $h_1(t)$ 和 $h_2(t)$ 来考察混合初边值问题的解在初始时刻的状态,并得到估计不等式。

目前关于线性波动方程的能观性及能观性已有大量结果,见(【1】-【5】).。对于一阶的拟线性双曲型方程组精确能控性及能观性，李大潜和他的合作者建立了一整套完善的理论体系，并进一步研究了自治拟线性波动方程的精确能观性,见(【6】-【10】)。随后王志强、郭丽娜等在【11】中进一步解决了非自治拟线性波动方程的精确能观性，尚培培在【12】中研究了关于具一般非线性边界条件自治拟线性双曲型方程的精确能观性，得到了相应的结果.关于自治的二阶拟线 性双曲方程组的精确能观性，于立新在【13】中得到了相应的单侧、双侧能观性结果。本文将采用类似的方法对一类具有一般边界条件的非自治拟线性双曲方程建立精确边界能观性,并将用本文的结论进一步解决一类边界条件中未知函数不具耦合关系，但方程组本身具有耦合关系的一阶非自治拟线性双曲型方程组的单侧精确边界能观性。

1 半整体 C^2 解

我们首先研究混合问题（1.1） 及（1.5）-（1.7）的半整体 C^2 解的存在唯一性。假设

$$\left.\frac{\partial g_1}{\partial u_x}-\mu\frac{\partial g_1}{\partial u_t}\right|_{(0,0,0)}\neq 0，（2.1）$$

$$\left.\frac{\partial g_2}{\partial u_x}-\lambda\frac{\partial g_2}{\partial u_t}\right|_{(0,0,0)}\neq 0。（2.2）$$

定理 1 半整体 C^2 解）\

假设(1.2)，(1.3)及(2.1)-(2.2)成立,进一步假设 $(\varphi,\omega)\in C^2\times C^1$，$(h_1,h_2)\in C^1\times C^1$，且在点(t,x)=(0,0)及(0,1)处分别满足 C^2 相容性条件,最后假设 $\frac{\partial g_1}{\partial t},\frac{\partial g_2}{\partial t}$ 关于 u,u_x,u_t 在 $(u,u_x,u_t)=(0,0,0)$ 附近满足局部李普希兹条件。则对任意给定且可能相当大的 T_0，只要 $\|(\varphi(x),\omega(x))\|_{C^2[0,1]\times C^1[0,1]}$ 及 $\|h_1,h_2\|_{C^1[0,T_0]\times C^1[0,T_0]}$ 充分小（依赖于 T_0），混合初边值问题（1.1）及（1.5）—（1.7）在区域 $R(T_0)=\{(t,x)\,|\,0\le x\le 1, 0\le t\le T_0\}$ 上存在唯一的半整体 C^2 解 u=u(t,x)，其 C^2 模充分小，且有如下能观不等式

$$\|u\|_{C^2[R(T_0)]}\le C_0(\|(\varphi(x),\omega(x))\|_{C^2[0,1]\times C^1[0,1]}+\|(h_1,h_2)\|_{C^1[0,T_0]\times C^1[0,T_0]})\quad，\qquad（2.3）$$

其中为一C_0正常数.。

自此以后文中的 $C_i(i=1,2,...)$ 为正常数。

证明 令 $v=u_x, w=u_t, U=(u,v,w)^T$，则方程（1.1）化为一阶拟线性方程组

$$\frac{\partial U}{\partial t}-A(t,x,U)\frac{\partial U}{\partial x}=F(t,x,U)，（2.4）$$

其中 $A(t,x,U)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&b&a\end{pmatrix}$， $F(t,x,U)=\begin{pmatrix}w\\0\\c\end{pmatrix}$，（2.5）

则 $F(t,x,0)\equiv 0$。（2.6）

初始条件（1.5）转化为

$t=0:u=(\varphi(x),\varphi'(x),\omega(x))$，（2.7）

此时方程\eqref{s12}具有三个互异的实特征值

$\lambda_1=\lambda<\lambda_2=0<\lambda_3=\mu$（2.8）

及一组线性无关的左特征向量

$$\begin{cases}l_1(t,x,U)=(0,\frac{\mu}{\mu-\lambda},\frac{1}{\mu-\lambda})\\ l_2(t,x,U)=(1,0,0)\\ l_3(t,x,U)=(0,\frac{\lambda}{\mu-\lambda},\frac{1}{\mu-\lambda})\end{cases}\quad(2.9)$$

和一组线性无关的右特征向量

$$\begin{cases}r_1(t,x,U)=(0,1,-\lambda)^T\\ r_2(t,x,U)=(1,0,0)^T\\ r_3(t,x,U)=(0,-1,\mu)^T,\end{cases}\quad(2.10)$$

从而方程组（2.4）为非自治的拟线性双曲型方程组。

令 $v_i=l_i(t,x,U)U$ ，有

$$\begin{cases}v_1=\frac{\mu}{\lambda-\mu}v+\frac{1}{\mu-\lambda}w\\ v_2=u\\ v_1=\frac{\lambda}{\mu-\lambda}v+\frac{1}{\lambda-\mu}w\end{cases}\quad(2.11)$$

且

$$\left.\frac{\partial(v_1,v_2,v_3)}{\partial(u,v,w)}\frac{\partial(v_1,v_2,v_3)}{\partial(u,v,w)}\right|_{(0,0,0)}\neq 0,\quad(2.12)$$

利用反函数定理可得

$(v_1,v_2,v_3)=(0,0,0)\Leftrightarrow(u,v,w)=(0,0,0)$ 。（2.13）

由（2.11）和（2.12），在(u,v,w)=(0,0,0)的某个邻域内利用隐函数定理可得

$$\begin{cases}u=v_2\\ v=v_1-v_3\\ w=p(t,x,v_1,v_2,v_3)\end{cases}\quad(2.14)$$

其中 p 是 C^1 函数，满足 p(t,x,0,0,0)=0。（2.15）

此时边界条件（1.6）及（1.7）可分别被等价改写为

$x=0:g_1(t,v_2,v_1-v_3,p(t,x,v_1,v_2,v_3))=h_1(t)$，（2.16）

$x=1:g_2(t,v_2,v_1-v_3,p(t,x,v_1,v_2,v_3))=h_2(t)$。（2.17）

注意到（1.8）和（2.1），利用隐函数定理， 边界条件（2.16）在 U=0 的一个邻域内可被等价改写为

$x=0:v_3=G_1(t,v_1,v_2)+H_1(t)$，（2.18）

其中G_1，H_1是C^1函数，$G_1(t,0,0)\equiv 0$，

且 $C_1\|h_1(t)\|_{C^1[0,T_0]}\le\|H_1(t)\|_{C^1[0,T_0]}\le C_2\|h_1(t)\|_{C^1[0,T_0]}$。（2.19）

类似地,由（1.8）及（2.2）可知,边界条件（2.17）可被等价改写为

$x=1:v_1=G_2(t,v_2,v_3)+H_2(t)$，（2.20）

其中G_2，H_2是C^1函数，$G_2(t,0,0)\equiv 0$，且

$C_3\|h_2(t)\|_{C^1[0,T_0]}\le\|H_2(t)\|_{C^1[0,T_0]}\le C_4\|h_2(t)\|_{C^1[0,T_0]}$。（2.21）

由于混合初边值问题（1.1）及（1.5）—（1.7）在(t,x)=(0,0)及(0,1)处分别满足C^2相容性条件，则混合初边值问题（2.4），（2.7），（2.18）及（2.20）在点(t,x)=(0,0)及(0,1)处分别满足C^1相容性条件.利用一阶非自治拟线性双曲型方程组的半整体C^1解理论（见【10】）。混合初边值问题（2.4），（2.7），（2.18）及（2.20）在$R(T_0)=\{(t,x)\,|\,0\le x\le 1,0\le t\le T_0\}$上存在唯一的半整体$C^1$解(u,v,w)=(u(t,x),v(t,x),w(t,x))，即混合初边值问题（1.1）及（1.5）—（1.7）在$R(T_0)=\{(t,x)\,|\,0\le x\le 1,0\le t\le T_0\}$上存在唯一的半整体$C^2$解 u=u(t,x)，且有如下能观不等式

$\|u\|_{C^2[R(T_0)]}\le C_5(\|(\varphi(x),\omega(x))\|_{C^2[0,1]\times C^1[0,1]}+\|(h_1,h_2)\|_{C^1[0,T_0]\times C^1[0,T_0]})$。（2.22）

注 1 若 x=0 处边界条件为

$x=0:u=h_1(t)$，（2.23）

其中h_1是C^2函数。 由点(t,x)=(0,0)处的C^0相容性条件$h_1(0)=\varphi(0)$，可知边界条件（2.23）可被等价改写为

$x=0:u_t=h_1'(t)$，（2.24）

此边界条件满足（2.1）。混合初边值问题（1.1），（1.5），（1.7）及（2.23）等价于混合初边值问题（1.1），（1.5），（1.7）及（2.24）。在假设（2.2）下，利用上面的定理证明可知混合初边值问题（1.1），（1.5，（1.7）及（2.24）存在唯一的半整体C^2解 u=u(t,x), 且满足估计式

$\|u\|_{C^2[R(T_0)]}\le C_6(\|(\varphi(x),\omega(x))\|_{C^2[0,1]\times C^1[0,1]}+\|(h_1,h_2)\|_{C^2[0,T_0]\times C^1[0,T_0]})$。

类似地,若 x=1 处边界条件为

若 x=1 处边界条件为

$x=0:u=h_2(t)$，（2.25）

其中h_2是C^2函数。由点(t,x)=(0,1)处的C^0相容性条件$h_2(0)=\varphi(1)$，知边界条件（2.25）可被等价改写为

$x=1:u_t=h_2'(t)$，（2.26）

此边界条件满足（2.2）。合初边值问题（1.1），1.5），（1.7）及（2.23）等价于混合初边值问题（1.1），（1.5），（1.7）及（2.24）。在假设（2.2）下，利用上面的定理证明可知混合初边值问题（1.1），（1.5），（1.6）及（2.25）存在唯一的半整体C^2解 u=u(t,x),

且满足估计式

$$\|u\|_{C^2[R(T_0)]} \le C_7(\|(\varphi(x),\omega(x))\|_{C^2[0,1]\times C^1[0,1]} + \|(h_1,h_2)\|_{C^1[0,T_0]\times C^2[0,T_0]})。$$

类似地,我们可以得到方程（1.1）的后向混合初边值问题的半整体C^2解及柯西问题解的存在唯一性定理.

定理 2（后向混合初边值问题的半整体C^2解）

假设（1.2）及（1.3）成立，进一步假设

$$\left.\frac{\partial g_1}{\partial u_x} - \lambda\frac{\partial g_1}{\partial u_t}\right|_{(0,0,0)} \ne 0$$

$$\left.\frac{\partial g_2}{\partial u_x} - \mu\frac{\partial g_2}{\partial u_t}\right|_{(0,0,0)} \ne 0$$

对任意给定且可能相当大的T_0,给定终端条件

$t = T_0 : (u,u_t) = (\phi(x),\psi(x))$ （2.29），

其中$(\phi(x),\psi(x)) \in C^2 \times C^1$，$(h_1,h_2) \in C^1 \times C^1$，点(t,x)=（$T_0$,0)及（$T_0$,1)处分别满足$C^2$相容性条件，并假设$\frac{\partial g_1}{\partial t},\frac{\partial g_2}{\partial t}$关于$u,u_x,u_t$在$(u,u_x,u_t)=(0,0,0)$附近满足局部李普希兹条件。则对任意给定且可能相当大的T_0，只要$\|(\phi(x),\psi(x))\|_{C^2[0,1]\times C^1[0,1]}$及$\|h_1,h_2)\|_{C^1[0,T_0]\times C^1[0,T_0]}$充分小（依赖于$T_0$），向混合初边值问题（1.1），（2.29）及（1.6）—（1.7）在区域$R(T_0)=\{(t,x) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le t \le T_0\}$上存在唯一的半整体$C^2$解 u=u(t,x),其$C^2$模充分小，且有估计式

$$\|u\|_{C^2[R(T_0)]} \le C_8(\|(\phi(x),\psi(x))\|_{C^2[0,1]\times C^1[0,1]} + \|(h_1,h_2)\|_{C^1[0,T_0]\times C^1[0,T_0]})。$$

定理 3 （柯西解的存在定理）

假设（1.2）成立.对任意给定的$(\varphi(x),\omega(x)) \in C^2 \times C^1$,只要$\|(\varphi(x),\omega(x))\|_{C^2[0,1]\times C^1[0,1]}$充分小，柯西问题（1.1）及（1.5）在其最大决定区域上存在唯一的C^2解 u=u(t,x)，且

$$\|u(t,x)\|_{C^2} \le C_9(\|(\varphi(x),\omega(x))\|_{C^2[0,1]\times C^1[0,1]})。$$

2 主要结果及其证明

定理 4(双侧精确能观性)

在假设（1.2），（1.3）及（2.1）-（2.2）下，进一步假设

$$\left.\frac{\partial g_1}{\partial u_x}\right|_{(0,0,0)} \ne 0，\quad（3.1）$$

$$\left.\frac{\partial g_2}{\partial u_x}\right|_{(0,0,0)} \ne 0，\quad（3.2）$$

最后假设观测时间 T 满足

$$\int_0^T \min_{x\in[0,1]}\{\mu(t,x,0,0,0),|\lambda(t,x,0,0,0)|\}dt>1$$ 。（3.3

对任意的 $(\varphi,\omega)\in C^2\times C^1$， $(h_1,h_2)\in C^1\times C^1$，其模 $\|(\varphi(x),\omega(x))\|_{C^2[0,1]\times C^1[0,1]}$ 及 $\|h_1,h_2)\|_{C^1[0,T_0]\times C^1[0,T_0]}$（依赖于 T_0）充分小，在(t,x)=(0,0)及(0,1)处分别满足 C^2 相容性条件，假设 $\frac{\partial g_1}{\partial t},\frac{\partial g_2}{\partial t}$ 关于 u,u_x,u_t 在 $(u,u_x,u_t)=(0,0,0)$ 附近满足局部李普希兹条件。则初值 $(\varphi(x),\omega(x))$ 可以被 u 在 x=0 处时间[0,T]上的观测值 p(t)，u 在 x=1 处时间[0,T]上的观测值 $\overline{p}(t)$ 以及给定的边界函数（ $h_1(t)$， $h_2(t)$ ）唯一确定，且成立如下能观不等式

$$\|(\varphi,\omega)\|_{C^2[0,T]\times C^2[0,T]}\le C_{10}(\|(p(t),\overline{p}(t))\|_{C^2[0,T]\times C^2[0,T]}+\|(h_1,h_2)\|_{C^1[0,T]\times C^1[0,T]})$$ 。

证明 由于 $\|(\varphi(x),\omega(x))\|_{C^2[0,1]\times C^1[0,1]}$ 及 $\|h_1,h_2)\|_{C^1[0,T_0]\times C^1[0,T_0]}$ 充分小，且（2.1）—（2.2）成立,则混合初边值问题（1.1）及（1.5）—（1.7）在 $R(T)=\{(t,x)\,|\,0\le x\le 1, 0\le t\le T\}$ 上存在唯一的半整体 C^2 解 u=u(t,x),其 C^2 模充分小,从而 $\|p(t)\|_{C^2[0,T]}$ 及 $\|\overline{p}(t)\|_{C^2[0,T]}$ 亦充分小,由

（1.8）及（3.1），边界条件（1.6）可被等价改写为

$x=0:u_x=R(t,u,u_t,h_1(t))$，（3.4）

其中 $R\in C^1$， $R(t,0,0,0)\equiv 0$，从而可以得到 u_x 在 x=0 处的值 q(t)为

$q(t)=u_x(t,0)=R(t,p(t),p'(t),h_1(t))$，（3.5）

且 $\|q(t)\|_{C^2[0,T]}\le C_{11}(\|p(t)\|_{C^2[0,T]}+\|h_1\|_{C^1[0,T]})$。（3.6）

由（1.8）和（3.2），边界条件（1.7）可被等价改写为

$x=1:u_x=\overline{R}(t,u,u_t,h_2(t))$，（3.7）

其中 $\overline{R}\in C^1$， $\overline{R}(t,0,0,0)\equiv 0$，从而可以得到 u_x 在 x=0 处的值 $\overline{q}(t)$ 为

$\overline{q}(t)=u_x(t,0)=R(t,\overline{p}(t),\overline{p}'(t),h_2(t))$，（3.8）

且 $\|\overline{q}(t)\|_{C^2[0,T]}\le C_{11}(\|\overline{p}(t)\|_{C^2[0,T]}+\|h_2\|_{C^1[0,T]})$。（3.9）

注意到 b(t,x,0,0,0)<0,在 $(u,u_x,u_t)=(0,0,0)$ 附近交换 t 与 x 的地位，程（1.1）可以被等价改写为

$$u_{xx}+\frac{a(t,x,u,u_x,u_t)}{b(t,x,u,u_x,u_t)}u_{tx}+\frac{1}{b(t,x,u,u_x,u_t)}u_{tt}=\frac{c(t,x,u,u_x,u_t)}{b(t,x,u,u_x,u_t)}$$ 。（3.10）

由定理 3 知，方程（3.10）具初始条件

$x=0:(u,u_x)=(p(t),q(t))$（3.11）

的右向柯西问题在其最大决定区域 R_r 上存在唯一的 C^2 解 $u=u_r(t,x)$ 其 C^2 模充分小，并注意到（3.6）有

$\|u_r\|_{C^2[R_r]}\le C_{12}(\|p(t)\|_{C^2[0,T]}+\|h_1\|_{C^1[0,T]})$。（3.12）

类似地,方程（3.10）具初始条件

$x=1:(u,u_x)=(\overline{p}(t),\overline{q}(t))$， （3.13）

的左向柯西问题在其最大决定区域 R_l 上存在唯一的 C^2 解 $u=u_l(t,x)$，其 C^2 模充分小,注意到 3.9 我们有

$\|u_l\|_{C^2[R_l]}\le C_{13}(\|\overline{p}(t)\|_{C^2[0,T]}+\|h_2\|_{C^1[0,T]})$。（3.14）

显然 $u=u_r(t,x)$ 及 $u=u_l(t,x)$ 分别是原混合初边值问题（1.1）及（1.5）—（1.7）的解在相应的最大决定区域上的限制。

由 $\|(\varphi(x),\omega(x))\|_{C^2[0,1]\times C^1[0,1]}$ 充分小，注意到（3.3），则 R_r 与 R_l 必互相交截。

因此，必存在 T_0 (0< T_0 <T)，使得 $t=T_0$ 上 u 和 u_t 的值 $u=\phi(x)$ \$和 $u_t=\psi(x)$ 可被 u_r 和 u_l 唯一确定。并由（3.12）及（3.14）可得

$\|(\phi,\psi)\|_{C^2[0,T]\times C^1[0,T]}\le C_{14}(\|\overline{p}(t)\|_{C^2[0,T]}+\|p(t)\|_{C^2[0,T]}+\|(h_1,h_2)\|_{C^1[0,T]\times C^1[0,T]})$。（3.15）

最后考虑方程（1.1）具终端条件

$x=0:(u,u_x)=(\phi,\psi)$（3.16）

及边界条件

$x=0:u=p(t)$（3.17）

$x=1:u=\overline{p}(t)$（3.18）

的后向混合初边值问题。由定理 2 可知上述后向混合初边值问题在区域 $R(T_0)=\{(t,x)\,|\,0\le x\le 1,0\le t\le T_0\}$ 上存在唯一的半整体 C^2 解,而 u=u(t,x)作为上述的唯一半整体 C^2 解，满足

$\|u\|_{C^2[R(T)]}\le C_{16}(\|\overline{p}(t)\|_{C^2[0,T]}+\|p(t)\|_{C^2[0,T]}+\|(h_1,h_2)\|_{C^1[0,T]\times C^1[0,T]})$，

特别地

$\|(\varphi,\omega)\|_{C^2[0,1]\times C^2[0,1]}\le C_{17}(\|(p(t),\overline{p}(t))\|_{C^2[0,T]\times C^2[0,T]}+\|(h_1,h_2)\|_{C^1[0,T]\times C^1[0,T]})$。

注 2 若 x=0 处边界条件为

$x=0:u=h_1(t)$，（3.19）

其中 h_1 是 C^2 函数。x=1 处边界条件为（1.7）时，我们需要在 x=0 处对 u_x 进行观测.若在 x=0 处 u_x 的观测值为 q(t)，结合（3.19）可得在 x=0 上(u, u_x)的一组值为

(u, u_x)=（$h_1(t)$，q(t)）(3.20)

而 x=1 处的观测值类似于定理 4 中的给出形式。由注 1 并结合上面的定理,我们可得混合初边值问题（1.1），（1.5），（1.6）及（3.19）的精确能观性,相应的能观不等式为

$\|(\varphi,\omega)\|_{C^2[0,1]\times C^2[0,1]}\le C_{18}(\|(p(t),\overline{p}(t))\|_{C^2[0,T]\times C^2[0,T]}+\|(h_1,h_2)\|_{C^2[0,T]\times C^1[0,T]})$。

类似地,若 x=1 处的边界条件取为

$u=h_2(t)$，(3.21)

其中h_1是C^2函数，x=0 处的边界条件为（1.6）时，我们需要在 x=1 处对u_x进行观测. 若在 x=1 处u_x的观测值为$\overline{q}(t)$，结合（3.21）可得在 x=1 上(u, u_x)的一组值为

x=1:(u, u_x)=（$h_2(t)$，$\overline{q}(t)$），（3.22）

而 x=0 处的观测值类似于定理 4 中的给出形式。由注 1 并结合上面的定理,我们可得混合初边值问题（1.1），（1.5），（1.6）及（3.21）的精确能观性,相应的能观不等式为

$$\|(\varphi,\omega)\|_{C^2[0,1]\times C^2[0,1]}\le C_{18}(\|(q(t),\overline{q}(t))\|_{C^2[0,T]\times C^2[0,T]}+\|(h_1,h_2)\|_{C^1[0,T]\times C^2[0,T]})。$$

定理 5 (x=0 处单侧精确能观性)

假设（1.2），（1.3），（2.1）-（2.2），（2.28）及（3.1）成立,进一步假设存在时间 T>T_1满足

$$\int_0^{T_1}\min_{x\in[0,1]}\mu(t,x,0,0,0)dt>1 \quad（3.24）$$

$$\int_{T_1}^{T}\min_{x\in[0,1]}|\lambda(t,x,0,0,0)|dt>1 \quad（3.25）$$

对任意的$(\varphi,\omega)\in C^2\times C^1$，$(h_1,h_2)\in C^1\times C^1$，其模$\|(\varphi(x),\omega(x))\|_{C^2[0,1]\times C^1[0,1]}$及$\|h_1,h_2)\|_{C^1[0,T]\times C^1[0,T]}$（依赖于$T_0$）充分小，在(t,x)=(0,0)及(0,1)处分别满足C^2相容性条件，并假设$\dfrac{\partial g_1}{\partial t},\dfrac{\partial g_2}{\partial t}$关于$u,u_x,u_t$在$(u,u_x,u_t)=(0,0,0)$附近满足局部李普希兹条件。则初值$(\varphi(x),\omega(x))$可以被 u 在 x=0 处时间[0,T]上的观测值 p(t)以及给定的边界函数（$h_1(t)$，$h_2(t)$）唯一确定,且成立如下能观不等式

$$\|(\varphi,\omega)\|_{C^2[0,1]\times C^2[0,1]}\le C_{19}(\|p(t)\|_{C^2[0,T]}+\|(h_1,h_2)\|_{C^1[0,T]\times C^1[0,T]})。$$

证明 由于$\|(\varphi(x),\omega(x))\|_{C^2[0,1]\times C^1[0,1]}$及$\|h_1,h_2)\|_{C^1[0,T_0]\times C^1[0,T_0]}$充分小，且（2.1）-（2.2）成立，则混合初边值问题（1.1）及（1.5）-（1.7）在$R(T)=\{(t,x)\,|\,0\le x\le 1,0\le t\le T\}$上存在唯一的半整体$C^2$解 u=u(t,x),从而$\|p(t)\|_{C^2[0,T]}$亦充分小。由（1.8）及（3.1），界条件（1.6）可被等价改写为

$$x=0:u_x=R(t,u,u_t,h_1(t))，\quad（3.26）$$

其中$R\in C^1$，$R(t,0,0,0)\equiv 0$，从而可以得到u_x在 x=0 处的值 q(t)为

$$q(t)=u_x(t,0)=R(t,p(t),p'(t),h_1(t))，\quad（3.27）$$

且 $\|q(t)\|_{C^2[0,T]}\le C_{20}(\|p(t)\|_{C^2[0,T]}+\|h_1\|_{C^1[0,T]})$ 。（3.28）

由于 b(t,x,0,0,0)<0,在$(u,u_x,u_t)=(0,0,0)$附近,我们交换 t 和 x 的位置,方程（1.1）可被等价改写为

$$u_{xx}+\frac{a(t,x,u,u_x,u_t)}{b(t,x,u,u_x,u_t)}u_{tx}+\frac{1}{b(t,x,u,u_x,u_t)}u_{tt}=\frac{c(t,x,u,u_x,u_t)}{b(t,x,u,u_x,u_t)}。\quad（3.29）$$

由定理 3 知，方程（3.29）具初始条件

$$x=0:(u,u_x)=(p(t),q(t)) \quad（3.30）$$

的右向柯西问题在其最大决定区域R_r上存在唯一的C^2解$u=u_r(t,x)$其C^2模充分小，并注意到（3.27）有

$\|u_r\|_{C^2[R_r]}\le C_{21}(\|p(t)\|_{C^2[0,T]}+\|h_1\|_{C^1[0,T]})$，（3.31）

显然$u=u_r(t,x)$是原混合初边值问题（1.1）及（1.5）-（1.7）的C^2解 u=u(t,x)在

最大决定区域R_r的限制。由$\|u_r\|_{C^2[R_r]}$充分小，并注意到（3.24），可知最大决定区域R_r与 x=1 相交截.故存在T_0 (0<T_0<T)使得 t=T_0上u和u_t的值$u=\phi(x)$ $和$u_t=\psi(x)$可被$u_r$和$u_l$唯一确定，且由（3.31）可得

$\|(\phi,\psi)\|_{C^2[0,T]\times C^1[0,T]}\le C_{22}(\|p(t)\|_{C^2[0,T]}+\|h_1\|_{C^1[0,T]})$。（3.32）

现考虑方程（1.1）具终端条件

$x=0:(u,u_x)=(\phi,\psi)$（3.33）

及边界条件

$x=0:u=p(t)$（3.34）

和（1.7）的后向混合初边值问题。注意到（2.27）-（2.28），由定理 2 可知上述后向混合初边值问题在区域$R(T_0)=\{(t,x)\,|\,0\le x\le 1,0\le t\le T_0\}$上存在唯一的半整体$C^2$解 u=$u_b(t,x)$，且由（3.32）有

$\|u_b\|_{C^2[R(T_0)]}\le C_{23}(\|p(t)\|_{C^2[0,T]}+\|(h_1,h_2)\|_{C^1[0,T]\times C^1[0,T]})$，

从而 u=u(t,x)作为上述问题的唯一半整体C^2解满足

$\|u\|_{C^2[R(T_0)]}\le C_{24}(\|p(t)\|_{C^2[0,T]}+\|(h_1,h_2)\|_{C^1[0,T]\times C^1[0,T]})$，

特别地

$\|(\varphi,\omega)\|_{C^2[0,T]\times C^1[0,T]}\le C_{25}(\|p(t)\|_{C^2[0,T]}+\|(h_1,h_2(t))\|_{C^1[0,T]\times C^1[0,T]})$。

类似我们有如下定理

定理 6(x=1 处的单侧精确能观性定理)

假设（1.2），（1.3），（2.1）—（2.2），（2.27）及（3.2）成立，一步假设存在时间 T>T_1满足

$\int_0^{T_1}\min_{x\in[0,1]}|\lambda(t,x,0,0,0)|dt>1$，（3.38）

$\int_{T_1}^{T}\min_{x\in[0,1]}\mu(t,x,0,0,0)dt>1$。（3.39）

对任意的$(\varphi,\omega)\in C^2\times C^1$，$(h_1,h_2)\in C^1\times C^1$，其模$\|(\varphi(x),\omega(x))\|_{C^2[0,1]\times C^1[0,1]}$及$\|h_1,h_2)\|_{C^1[0,T_0]\times C^1[0,T_0]}$（依赖于$T_0$）充分小，且在(t,x)=(0,0)及(0,1)处分别满足C^2相容性条件，并假设$\frac{\partial g_1}{\partial t},\frac{\partial g_2}{\partial t}$关于$u,u_x,u_t$在$(u,u_x,u_t)=(0,0,0)$附近满足局部李普希兹条件。则初值$(\varphi(x),\omega(x))$可以被 u 在 x=1 处时间[0,T]上的观测值$\overline{p}(t)$以及给定的边界函数（$h_1(t)$，$h_2(t)$）唯一确定，且成立如下能观不等式

$\|(\varphi,\omega)\|_{C^2[0,1]\times C^2[0,1]} \le C_{26}(\|\overline{p}(t)\|_{C^2[0,T]} + \|(h_1,h_2)\|_{C^1[0,T]\times C^1[0,T]})$。

3 应用

考虑如下的一阶非自治的拟线性双曲型方程组混合初边值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial r}{\partial t} + \lambda(t,x,r,s)\frac{\partial r}{\partial x} = f(t,x,r,s) \\ \frac{\partial s}{\partial t} + \mu(t,x,r,s)\frac{\partial s}{\partial x} = g(t,x,r,s) \end{cases} \quad (4.1)$$

其中

$\lambda(t,x,0,0) < 0 < \mu(t,x,0,0)$（4.2），

$f(t,x,0,0) = g(t,x,0,0) \equiv 0$（4.3）。

给定初始条件

$t = 0 : (r,s) = (r_0(x), s_0(x))$（4.4）

及边界条件

$x = 0 : s = h_1(t)$，（4.5）

$x = 1 : r = h_2(t)$。（4.6）

由于边界条件中未知函数不具有耦合关系，我们不能利用已知的一阶非自治拟线性双曲型方程组精确边界能观性的方法实现上述混合初边值问题单侧精确边界能观性(参见【6】,【10】),

但是当方程组中的方程具有某种适当耦合关系时，用本文的结论可以实现混合初边值问题（4.1）及（4.4）—（4.6）的单侧精确边界能观性。

定理 7

（x=1 处单侧精确能观性）假设（4.2）—（4.3）成立，一步假设

$g_r(t,x,0,0) \neq 0$，（4.7）

$g_t(t,x,0,0) + \lambda(t,x,0,0) g_x(t,x,0,0) = 0$，（4.8）

最后假设存在时间 T>T_1>满足

$\int_0^{T_1} \min_{x\in[0,1]} \mu(t,x,0,0,0)dt > 1$，（4.9）

$\int_{T_1}^{T} \min_{x\in[0,1]} |\lambda(t,x,0,0,0)| dt > 1$ 。（4.10）

对任意给定的 (r_0,s_0) 和 $(h_1(t),h_2(t))$，其模 $\|(r_0(x),s_0(x))\|_{C^1[0,1]\times C^2[0,1]}$ 及 $\|h_1,h_2)\|_{C^2[0,T]\times C^1[0,T]}$（依赖于 T）充分小，并且在(t,x)=(0,0)及(0,1)处分别满足 C^2 及 C^1 相容性条件，则初始状态 (r_0,s_0) 可以被 s 在 x=1 处区间[0,T]上的观测值 q(t)和给定的边界函数 $(h_1(t),h_2(t))$ 唯一决定，且有如下的能观不等式

$\|(r_0,s_0)\|_{C^1[0,1]\times C^2[0,1]} \le C_{27}(\|q(t)\|_{C^2[0,T]} + \|(h_1,h_2)\|_{C^2[0,T]\times C^1[0,T]})$ 。

证明 由于（4.3）及（4.7）,利用隐函数定理可知方程组（4.1）中的第二个方程在 $(s,s_x,s_t) = (0,0,0)$ 附近可以被等价地改写为

$r = R(t,x,s,s_x,s_t)$，（4.11）

其中 $R\in C^2$， $R(t,x,0,0,0)\equiv 0$， 利用隐函数的求导法则，我们可以得到函数 $R(t,x,s,s_x,s_t)$ 对于 t,x,s,s_x,s_t 的偏导数,分别极为记为：

$$R_1=\frac{\mu_t s_x-g_t}{g_r-\mu_r s_x},\quad R_2=\frac{\mu_x s_x-g_x}{g_r-\mu_r s_x},\quad R_3=\frac{\mu_s s_x-g_s}{g_r-\mu_r s_x},$$

$$R_4=\frac{\mu}{g_r-\mu_r s_x},\quad R_5=\frac{1}{g_r-\mu_r s_x}。\text{（4.12）}$$

现将 $r=R(t,x,s,s_x,s_t)$ 及上式带入方程组（4.1）的第一个方程可得 $s_{tt}+(\lambda+\mu)s_{tx}+\lambda\mu s_{xx}=c(t,x,s,s_x,s_t)$，（4.13）

其中

$$c(t,x,s,s_x,s_t)=(g_r-\mu_r s_x)f-(\mu_r s_x-g_t)-(\mu_s s_x-g_s)s_t-\lambda(\mu_s s_x-g_x)-\lambda(\mu_s s_x-g_s)s_x$$

注意到（4.11），有 $c(t,x,0,0,0)\equiv 0$。结合（4.2）可知方程（4.13）具有两个非零异号的特征值 λ 及 μ，故方程（4.13）为双曲型方程.。 因此我们将混合问题（4.1）及（4.4）-（4.6）的能观性转化为方程（4.13）具初始条件

$t=0:(s,s_t)=(\varphi(x),\omega(x))$（4.14）

及边界条件

$x=0:s=h_1(t)$（4.15）

$x=1:R(t,s,s_x,s_t)=h_2(t)$（4.16）

的精确边界能观性，其中

$\varphi(x)\overset{def}{==}s_0(x)$， $\omega(x)\overset{def}{==}g(t,x,r_0,s_0)-\mu(t,x,r_0,s_0)s_0'(x)$，4.17）

注意到（4.11），易知

$$C_{28}\|(r_0,s_0)\|_{C^1[0,1]\times C^2[0,1]}\le\|(\varphi,\omega)\|_{C^2[0,1]\times C^1[0,1]}\le C_{29}\|(r_0,s_0)\|_{C^1[0,1]\times C^2[0,1]}。$$

由混合初边值问题（4.1）及（4.4）—（4.6）在(0,0)及(0,1)处满足 C^2 及 C^1 相容性条件，可知混合初边值问题（4.13）—（416）在(0,0)及(0,1)处满足 C^2 相容性条件，且易验证边界条件（4.16）满足 $\left.\frac{\partial R}{\partial s_x}-\lambda\frac{\partial R}{\partial s_t}\right|_{(0,0,0)}\ne 0$，由注 1 可知混合初边值问题（4.13）—（416）存在唯一的半整体 C^2 解 $s=s(t,x)$。注意到（4.12）中的 $R_4|_{(0,0,0)}\ne 0$，由定理 6 知,可利用在 x=1 处时间[0,T$内 $s=s(t,x)$ 的观测值 q(t) 及边界函数 $(h_1(t),h_2(t))$ 唯一确定方程（4.13）的解 $s=s(t,x)$ 在 t=0 的初始值（4.14），并有如下的能观不等式

$$\|(\varphi,\omega)\|_{C^2[0,1]\times C^1[0,1]}\le C_{30}(\|q(t)\|_{C^2[0,T]}+\|(h_1,h_2)\|_{C^2[0,T]\times C^1[0,T]})。$$

令 $r(t,x)=R(t,x,s,s_x,s_t)$,则易验证(r(t,x),s(t,x))是混合初边值问题（4.1）及（4.4）-（4.6）的半整体 $C^2\times C^1$ 解，意到（4.11）可知 (r_0,s_0) 被 s=s(t,x)在 x=1 处的观测值 q(t)及边界函数 $(h_1(t),h_2(t))$ 唯一确定，结合（4.18）及（4.19）可得

$$\|(r_0,s_0)\|_{C^1[0,1]\times C^2[0,1]}\le C_{31}(\|q(t)\|_{C^2[0,T]}+\|(h_1,h_2)\|_{C^2[0,T]\times C^1[0,T]})。$$

注 3 在【11】中郭丽娜、王志强考虑了具有特殊边界条件的拟线性非自治波动方程的精确边界能观性,可以验证,其特殊的边界条件满足本文中的（2.1）,（2.2）及（2.27）-（2.28）. 这样，线性非自治波动方程的精确边界能观性可以被看做为本文的一种特例。在【12】及【14】中，他们考虑了自治情形下的精确边界能观性,本文将他们的结果推广到了非自治情形下的精确边界能观性。

[参考文献] (References)

[1] Zuazua E,Boundary observability for the finite-difference space semi-discretizations of the 2-D wave equation in the square[J].Journal de Mathmatiques Pures et Appliquees 78(1999),523-563.

[2] P.F.Yao, on the observability inequalities for exact controllability of wave equations with variable coefficients[J].SIAM Journal on Control and Optimization 37(1999),1568-1599.

[3] Bardos C, Lebeau G,Rauch J, Sharp sufficient conditions for the observation,control and stabilization of waves from the boundary. SIAM Journal on Control and Optimization 1992; 30:1024-1065. 3.

[4] Russell DL,Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations. Recent progress and open questions. SIAM Review 1978; 20:639-739. 6.

[5] Zuazua E, Boundary observability for the space-discretization of the 1-D wave equation. Comptes Rendus de l'Acad′emie des Sciences Paris, Serie I 1998; 326:713-718. 9.

[6] T.T. Li, Controllability and Observability for quasilinear hyperbolic systems[J].AIMS on Aplied Mathematics, vol. 3,American Institute of Mathematical Sciences and Higher Education Press, 2010.

[7] T.T. Li, Exact boundary observability for 1-D quasilinear wave equations[J]. Math. Methods Appl. Sci. 29 (2006) 1543-1553.

[8] Lina guo, Zhiqiang wang,Exact boundary observability for nonoautonomous first-order quasilinear hyperbolic systems[J].Math.Meth.Appl31(2008), 1956-1971.

[9] T.T. Li, L.X. Yu, Exact boundary controllability for 1-D quasilinear wave equations[J]. SIAM J. Control Optim. 45 (2006) 1074-1083.

[10] Zhiqiang Wang, Exact boundary controllability for Nonautonomous First Order Quasilinear Hyperbolic Systems[J].Chin.Ann.Math 27B(6),2006,643-656.

[11] Lina Guo, Zhiqiang Wang,Exact boundary observability for nonoautonomous quasilinear wave equations[J]. Methods Appl. Sci., 31(2008), 1956--1971.

[12] 尚培培,庄凯丽,二阶拟线性双曲型方程的精确能观性[J].工程学报 26 卷 4 期（2009）,618-636.

[13] Lixin Yu,Exact boundary observability for a kind of second order quasilinear hyperbolic systems and its applications.Nonlinear Analysis :Theory,mathods and Applications volum 72,issue 12,15 June 2010,pages 4452-4465.

[14] Tatsien Li, Bopeng Rao, and Zhiqiang Wang,A note on the one-side exact boundary observability for quasilinear hyperbolic systems[J]. Georgian Math. J., 15 (2008), 571--580.