多等级交通流 LWR 模型的双曲性

杨建伟, 王术
北京工业大学应用数理学院，北京 (100022)
E-mail (yjw@emails.bjut.edu.cn)

摘 要：本文基于一阶双曲守恒律的相关理论研究了多等级交通流 LWR 模型，给出了该模型双曲性的数学证明。

关键词：双曲守恒律；多等级交通流；LWR 模型；双曲性

中图分类号：O175

0 引 言

随着交通事业的日益发展，对交通流问题的研究已经引起数学、物理学等诸多领域学者的广泛注意[1]。早在 1955 年英国著名学者Lighthill 和Whitham[2] 在其名篇《论动力波》(On Kinetic Wave) 中，描述了适用于公路上交通流动的一维波运动学理论. Lighthill 和Whitham推导了交通分布中状态量的变化沿公路的传播规律，论证了交通激波的存在、特性及其在交通分析中的应用. 1956 年Richards[3]独立地提出了类似的交通流理论。这种描述交通流的一阶连续介质模型被称为LWR 理论(LWR Theory)模型，这一理论对以后交通流的研究产生了非常深远的影响，许多国内外学者对此作了大量研究,进行了各种各样的阐释和推广,并应用于交通工程实践。

但LWR模型只有一个连续性方程，且有解析解，虽然有它的优势，但对于真实的交通状况描述，又有很大的不精确性，从而缺乏现实意义。2002 年G. C. K. Wong 和S. C. Wong[4]将LWR模型加以推广，建立了多种车型混流的运动学模型。2007 年D.Ngoduy和R.Liu[5]研究了此模型的双曲性。

本文在此基础上运用一阶双曲守恒律的相关理论，对这一模型进行了研究，并针对交通流的各项同性和各向异性给出了证明。

1 模型介绍

1.1 LWR 模型

这种模型基于在所考虑的路段没有出入匝道时，路段内的车辆数目守恒，车辆密度的变化率等于进出口流量之差。用 $\mathrm{k}(x,t)$ 来表示交通密度，即时刻 t 在位置 x 附近每公里车辆的数目，单位是辆/千米；用 $\mathrm{u}(x,t)$ 来表示车辆平均速度，单位是千米/小时；另外一个容易观察和测量的量是交通流量，即在时刻 t 每小时通过某一位置 x 车辆的数目，用 $q(x,t)$ 来表示，单位是辆/小时。显见 $q(x,t)=k(x,t)\cdot u(x,t)$。根据车辆守恒易得以下关系

$$\frac{\partial k}{\partial t}+\frac{\partial q}{\partial x}=0 \tag{1.1}$$

LWR 理论进行了简化假设，即设车速依赖于密度， $u=u(k)$，交通密度增加时车速下

基金项目:北京工业大学研究生科技基金资助项目(ykj-2007-1890)

降（即$\frac{du}{dk}<0$）。在这一假设下，交通流量仅仅是交通密度的函数，$q=q(k)$。此时，车辆守恒（1.1）变为

$$\frac{\partial k}{\partial t}+c(k)\frac{\partial k}{\partial x}=0 \tag{1.2}$$

其中$c(k)=q'(k)$，这是一个拟线性偏微分方程，此处$c(k)$是未知解k的已知函数。

当所研究的路段有进出口匝道时，（1.1）式变为

$$\frac{\partial k}{\partial t}+\frac{\partial q}{\partial x}=s(x,t) \tag{1.3}$$

其中$s(x,t)$为源汇项，对进口匝道$s(x,t)>0$，对于出口匝道$s(x,t)<0$。

1.2 推广的多等级 LWR 模型

2002 年 G. C. K. Wong 和 S. C. Wong 将 LWR 模型加以推广，建立了多种车型混流的运动学模型，事实上这种设想从近来在对公路上多种车型混流的内部作用的观测调查和分析上来看是有效的 (Khan and Maini, 2000) 。推广的 LWR 模型将交通中的车辆根据其行驶速度不同将其分为n个等级。设$k_i(x,t)$、$u_i(x,t)$、$q_i(x,t)$分别表示第i相车流的密度、速度和交通流量，于是根据车辆的守恒有

$$\frac{\partial k_i}{\partial t}+\frac{\partial q_i}{\partial x}=0, \quad i=1\ldots,n. \tag{1.4}$$

这里

$$q_i(x,t)=k_i(x,t)\cdot u_i(x,t) \tag{1.5}$$

写成向量的形式就是

$$\frac{\partial K}{\partial t}+\frac{\partial Q}{\partial x}=0 \tag{1.6}$$

其中$K=(k_{1u},\ldots,k_n)^T, Q=(q_1,\ldots,q_n)^T$。

2 多等级交通流 LWR 模型的双曲性

在上一节的（1.6）式描述了沿着没有匝道的单向公路上多等级车流的守恒。这个推广的多相 LWR 模型其核心是假设某一特定等级车流速度的选择不仅依赖其自身，而且还依赖于公路上行驶的所有其他各级车流。一般的密度-速度关系可以记为：

$$u_i(x,t)=U_i(k_1\ldots,k_n), \quad i=1\ldots,n. \tag{2.1}$$

2.1 各向同性的情况

对于各向同性的情况，即第i级$(i=1\ldots,n)$车流只依赖于所有等级车流的总密度k，上述关系可以表示为以下简单的函数形式

$$u_i(x,t)=U_i(k), i=1\ldots,n. \tag{2.2}$$

这里

$$k=k(x,t)=\sum_{i=1}^{n}k_i(x,t) \tag{2.3}$$

综合上述方程，这个问题可以归结为下列偏微分方程

$$\frac{\partial K}{\partial t}+A\frac{\partial K}{\partial x}=0 \tag{2.4}$$

其中

$$A=(a_{ij})=\frac{\partial Q}{\partial K},\quad a_{ij}=U_i\delta_{ij}+z_i,i,j=1,\dots n,$$

是（1.6）的 $Jacobian$ 矩阵。

这里

$$\delta_{ij}=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 1 & i=j\end{cases},\quad z_i=k_i\frac{\partial U_i}{\partial k}\cdot\frac{\partial k}{\partial k_j}=k_i\frac{\partial U_i}{\partial k}$$

由前面可以知道 $z_i<0$， $i=1\dots,n.$

注： $a_{ij}=U_i\delta_{ij}+z_i,i,j=1,\dots n$，表示第 i 级车流对于第 j 级车流的运动波速。

现在我们可以找到一个正定的对角矩阵 $S=diag(s_1,\dots,s_n)$，其中 $s_i=\frac{z_1}{z_i}$，$i=1\dots,n$，使得 $SA=\tilde{A}=(\tilde{a}_{ij}),i,j=1\dots,n$ 为一对称矩阵，

其中

$$\tilde{a}_{ij}=\begin{cases}s_i(U_i+z_i) & i=j\\ z_1 & i\neq j\end{cases}。$$

于是根据双曲守恒律的理论，可以知道（2.4）是对称双曲的，下面证明其还是双曲的。

因为（2.4）是对称双曲的，所以正如前文它可以重新写为以下形式

$$S\frac{\partial K}{\partial t}+\tilde{A}\frac{\partial K}{\partial x}=0 \tag{2.5}$$

因为 $S=diag(s_1,\dots,s_n)$ 是正交对角阵，故存在一个可逆矩阵 C，事实上使得 $S=C\cdot C^T$，令 $Y=C^TK$，则 Y 满足（注：这里运用了 $(C^{-1})^T=(C^T)^{-1}$）

$$\frac{\partial Y}{\partial t}+C^{-1}\tilde{A}(C^{-1})^T\frac{\partial Y}{\partial x}=0 \tag{2.6}$$

从而 $C^{-1}\tilde{A}(C^{-1})^T$ 是实对称矩阵，从而它可以对角化而且仅有实特征值，因此它是双曲的。

事实上，对于各向同性的情况我们还可以从相应的特征方程 $|\lambda I-A|=0$ 来判定 A 是可对角化的，也只有实特征值，从而是双曲的。

2.2 各向异性的情况

对于各向异性的情况，也即第 i 级 $(i=1\dots,n)$ 车流依赖于所有各级车流的密度 $k_i,i=1,\dots n$，此时（1.6）的 $Jacobian$ 矩阵 $A=(a_{ij})$，

其中

$$a_{ij}=U_i\delta_{ij}+k_i\frac{\partial U_i}{\partial k_j},i,j=1,\dots n \tag{2.7}$$

当 $n=2$ 很容易找到一个正定的对角阵 $\bar{S}=diag(\bar{s}_1,\bar{s}_2)$，其中 $\bar{s}_i=\frac{k_1}{k_i}\cdot\frac{\partial U_1}{\partial k_i}\Big/\frac{\partial U_i}{\partial k_1}, i=1,2$，

使得 $\bar{S}A=\bar{A}=\begin{pmatrix} U_1+k_1\frac{\partial U_1}{\partial k_1} & k_1\frac{\partial U_1}{\partial k_1} \\ k_1\frac{\partial U_1}{\partial k_1} & \frac{k_1}{k_i}\cdot\frac{\partial U_1}{\partial k_i}\Big/\frac{\partial U_i}{\partial k_1}\cdot\left(U_1+k_1\frac{\partial U_1}{\partial k_1}\right) \end{pmatrix}$ 为对称矩阵.同 **2.1** 的方法容易知道（1.6）是双曲的。

对于一般的情况,如果没有给出 Q 的显式,很难给出双曲性的证明。但是如果给出 Q 或者 $u_i\ (i=1\ldots,n)$ 的显式，有时是可以证明系统（1.6）的双曲性的。下面我们就给出一个具体的例子。

设 $u_i=u_i^f(1-\lambda k_i)\exp(-\mu k^2)$,其中 u_i^f 为第 i 级车流的畅行速度，$\lambda,\mu<<1$ 为一正的常数，此时 $q_i=u_ik_i=u_i^f(k_i-\lambda k_i^2)\exp(-\mu k^2)$，于是（1.6）的 $Jacobian$ 矩阵 $A=(a_{ij}), i,j=1\ldots,n$，其中

$$a_{ij}=\begin{cases}(1-2\lambda-2\mu kk_i-2\mu\lambda kk_i^2)u_i^f\exp(-\mu k^2), & i=j\\ -2\mu k(k_i-\lambda k_i^2)u_i^f\exp(-\mu k^2), & i\neq j\end{cases} \tag{2.8}$$

我们仍可以找到一个正定的矩阵 $S=diag(s_1,\ldots,s_n)$，其中 $s_i=\frac{z_1}{z_i}$，这里 $z_i=-2\mu k(k_i-\lambda k_i^2)u_i^f\exp(-\mu k^2), i=1\ldots,n$,使得 $SA=\tilde{A}=(\tilde{a}_{ij}), i,j=1\ldots,n$ 为一对称矩阵，从而在这个例子中（1.6）是对称双曲的,进而是双曲的。

3 结论

本文基于一阶双曲守恒律的相关知识和理论对多等级交通流的推广的LWR模型进行了研究，给出了其双曲性的证明。

4 致谢

本文得到了北京工业大学研究生科技基金委员会的大力支持(资助项目编号 ykj-2007-1890) ，在此深表谢意。

参考文献

[1] 戴世强，冯苏苇，顾国庆. 交通动力学：它的方法和意义[J]. 自然杂志，1977，**11**（4）：196-201

[2] Lighthill M H, Whitham G B. On kinematic waves 2:a theory of traffic flow on long,crowded roads[J]. Proc.R.Soc.London A, ser A,1955, **22**: 317- 345.

[3] Richards P I. Shock waves on the highway[J]. Operations Research, 1956, **4**(2):42-51

[4] Wong G C K, Wong S C,, A multi-class traffic flow model-an extension of LWR model with heterogeneous drivers[J]. Transportation Research Part A 36 (2002): 827-841.

[5] Ngodry D, Liu R, Multiclass first-order simulation model to explain non-linear traffic phenomena[J].

Physica A 385(2007): 667-682.
[6] Evens, Lawrence C, Partial Differential Equations[M. Providence, Rhode Island, American Mathematical Society, 1998.
[7] A.Majda, Compressible Fluid Flow and Systems of Conservation Laws in Several Space[M]. Applied Mathematical Sciences 53, Variables, Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg, 1980.
[8] Hsun-Jung Cho, Shih-Ching Lo, Modeling self-consistent multi-class dynamic traffic flow[J]. Physica A, 2002, **312** : 342-362.
[9] Haberman，R.，Applied Partial Differential Equations[M]. 郇中丹，李援南，刘歆等，北京，机械工业出版社，2007.2.

Hyperbolicity of a multi-class traffic flow LWR model

Yang Jianwei, Wang Shu
College of Science, Beijing University of Technology, Beijing, 100022

Abstract: In this paper we study a multi-class traffic flow LWR model based on the theory of one-order hyperbolic conservation laws and give a mathematic proof of the hyperbolicity for this model.

Keywords: hyperbolic conservation laws； multi-class traffic flow; LWR model; hyperbolicity