离散非线性 Jacobi 算子方程的周期解和次调和解[1]

石海平[1]，刘忠志[1]，张弘强[2]

1. 广东白云学院基础部，广州 （510450）

2. 长沙理工大学数学与计算科学学院，长沙 （410076）

E-mail：shp7971@163.com

摘 要：应用临界点理论中著名的山路引理，获得了一类具有 Jacobi 算子类型的二阶非线性泛函差分方程周期解和次调和解的存在性和多重性的一些充分条件。所用的证明方法主要是基于山路引理结合变分技巧，这为具有超前和滞后的二阶非线性泛函差分方程周期解和次调和解的存在性及多重性问题的研究提供了一个有效的解决方法。

关键词： 周期解和次调和解；山路引理；Jacobi 算子；离散变分理论

中图分类号： 39A11, 65Q05

1 引言

记 $\mathbf{N}$，$\mathbf{Z}$ 及 $\mathbf{R}$ 分别表示自然数集、整数集和实数集。任取 $a,b\in\mathbf{Z}$ 满足 $a\le b$，定义 $\mathbf{Z}(a)=\{a,a+1,\cdots\}$，$\mathbf{Z}(a,b)=\{a,a+1,\cdots,b\}$。$k$ 为某个正整数。$*$表示向量的转置。

考虑二阶差分方程

$$Lu_n=f(n,u_{n+1},u_n,u_{n-1}),\ n\in\mathbf{Z}, \tag{1}$$

的周期解和次调和解。其中 L 是 Jacobi 算子

$$Lu_n=a_nu_{n+1}+a_{n-1}u_{n-1}+b_nu_n,$$

a_n 与 b_n 是 $\mathbf{Z}$ 上的实值函数，$f\in C(\mathbf{R}^4，\mathbf{R})$，$A$ 和 B 是常数。对于给定的正整数 T，a_n, b_n 及 f 都是 T 周期的。

近年来，作为描述众多实际问题的数学模型，差分方程已广泛出现在科学研究的各个领域中，如概率论、矩阵论、电路分析、组合分析、排队论、数论、心理学与社会学等(参见文献[1-3])。

方程(1)可看作如下微分方程的离散化:

$$Su(t)=f\big(t,u(t+1),u(t),u(t-1)\big),\ t\in\mathbf{R} \tag{2}$$

其中 S 是 Sturm-Liouville 微分算子，$f\in C(\mathbf{R}^4，\mathbf{R})$。方程(3)是方程

$$c^2u''(t)=V'\big(u(t+1)-u(t)\big)-V'\big(u(t)-u(t-1)\big),\ t\in\mathbf{R} \tag{3}$$

的更一般形式。方程(3)受到许多学者的广泛关注。例如，SMETS 和 WILLEM[4]得到了方程(3)孤立波的存在性。

许多学者对方程(1)的一些特殊情形进行了深刻的讨论，得出了一系列有意义的结果，参阅[1-3,5-8]。文献中研究这类问题的主要方法是各种形式的不动点定理与 Green 函数法等，例如参见文献[1-3,6-8]。

本文的主要目的是应用临界点理论中著名的山路引理建立方程(1)周期解和次调和解存在性和多重性的准则。主要方法是将方程(1)解的存在性转化为某个泛函临界点的存在性。

本文的主要结果如下。

定理 1 假设下列条件成立：

(L) $a_n\ne 0, b_n-|a_{n-1}|-|a_n|>0, \forall n\in Z$；

(F_1) 存在泛函 $F\in C^1(\mathbf{Z}\times\mathbf{R}^2,\mathbf{R})$ 且 $F(0,\cdot)\ge 0$，满足

$F(n+T,v_1,v_2)=F(n,v_1,v_2)$，

[1]本课题得到湖南省自科基金资助项目(项目编号：05jj30013)的资助。

$$\frac{\partial F(n-1,v_2,v_3)}{\partial v_2}+\frac{\partial F(n,v_1,v_2)}{\partial v_2}=f(n,v_1,v_2,v_3);$$

(F_2) 对任意的 $n\in\mathbf{Z}$,

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{F(n,v_1,v_2)}{\rho^2}=0,\quad \rho=\sqrt{v_1^2+v_2^2};$$

(F_3) 存在常数 $\beta>2$，使得

$$0<\beta F(n,v_1,v_2)\le\frac{\partial F(n,v_1,v_2)}{\partial v_1}v_1+\frac{\partial F(n,v_1,v_2)}{\partial v_2}v_2\quad,\quad\forall(v_1,v_2)\ne 0\quad。$$

（4）

则对任意给定的正整数 $p>0$，方程(1)至少存在两个非平凡 pT-周期解。

注 1 (4)蕴涵存在常数 $a_1>0$，$a_2>0$，使得

(F_3') $F(n,v_1,v_2)\ge a_1\left(\sqrt{v_1^2+v_2^2}\right)^{\beta}-a_2$，$\forall n\in\mathbf{Z}$。

注 2 虽然定理 1 所得到的周期解是非平凡的，但是可能是非零常数。要得到非常数的周期解，只要把非零常数的周期解去掉即可。因此，我们得到下面的推论。

推论 1 若条件（L）及 $(F_1)-(F_3)$ 成立，且

(F_4) 对任意的 $n\in\mathbf{Z}$, $f(n,v_1,v_2,v_3)=0$ 当且仅当 $v_1=v_2=v_3=0$。

则对任意给定的正整数 $p>0$，方程(1)至少存在两个非常数 pT-周期解。

2 变分框架及基本引理

为了应用临界点理论，我们将引进适当的变分框架及给出一些证明结论所需的引理。首先，我们介绍一些基本的概念。

设 S 是如下序列空间

$$S=\{\{u_n\}\,|\,u_n\in R,n\in Z\}。$$

对任意给定的正整数 p 及 T，定义 E_{pT} 为 S 的子空间

$$E_{pT}=\{\{u\in S\}\,|\,u_{n+pT}=u_n,\forall n\in Z\}。$$

在 E_{pT} 上定义内积

$$\langle u,v\rangle=\sum_{j=1}^{pT}u_jv_j,\forall u,v\in E_{pT},$$

并由此诱导出 E_{pT} 上的范数 $\|\cdot\|$ 为

$$\|u\|=\left(\sum_{j=1}^{pT}u_j^2\right)^{\frac{1}{2}},\forall u\in E_{pT}。\qquad（5）$$

易知 E_{pT} 是有限维 Hilbert 空间并且与 $\mathbf{R}^{pT}$ 线性同构。

另一方面，定义对任意的 $r>1$,我们在 E_{pT} 上定义 $\|\cdot\|_r$ 为

$$\|u\|_r=\left(\sum_{j=1}^{pT}|u_j|^r\right)^{\frac{1}{r}},\forall u\in E_{pT}。\qquad（6）$$

由于 $\|\cdot\|_r$ 与 $\|\cdot\|_2$ 等价，存在常数 c_1,c_2 使得 $c_2\ge c_1>0$，且

$$c_1\|u\|_1\le\|u\|_r\le c_2\|u\|_2,\forall u\in E_{pT}。\qquad（7）$$

考虑定义在 E_{pT} 上的泛函 J

$$J(u)=\sum_{n=1}^{k}\left[\frac{1}{2}Lu_n-F(n,u_{n+1},u_n)\right]。 \tag{8}$$

因此，u 是 J 在 E_{pT} 的临界点，即 $J'(u)=0$ 当且仅当

$$\frac{\partial J}{\partial u_n}=Lu_n-f(n,u_{n+1},u_n,u_{n-1}),\quad n\in\mathbf{Z}。$$

综上所述，我们将寻求方程(1) pT-周期解的存在性转化为寻求定义在 $\mathbf{R}^{pT}$ 上泛函 J 临界点的存在性。

对任意的 $u\in E_{pT}$, $J(u)$ 改写为

$$J(u)=\frac{1}{2}\langle \mathrm{Pu},\ \mathrm{u}\rangle-\sum_{n=1}^{k}F(n,u_{n+1},u_n),$$

其中

$$\mathrm{P}=\begin{pmatrix} b_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & a_0\\ a_1 & b_2 & a_2 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{pT-1} & a_{pT-1}\\ a_{pT} & 0 & 0 & \cdots & a_{pT-1} & b_{pT}\end{pmatrix}_{pT\times pT}。$$

取 $\underline{\lambda}=\min\limits_{n\in Z(1,T)}\left(b_n-|a_{n-1}|-|a_n|\right)>0$，$\overline{\lambda}=\max\limits_{n\in Z(1,T)}\left(b_n+|a_{n-1}|+|a_n|\right)$。由矩阵理论知，$P$ 的特征值满足 $\underline{\lambda}\le\lambda_i\le\overline{\lambda}$，$i\in Z(1,pT)$。因此

$$\underline{\lambda}\|u\|_2^2\le\langle \mathrm{Pu},\ \mathrm{u}\rangle\le\overline{\lambda}\|u\|_2^2。 \tag{9}$$

设 E 是实的 Banach 空间，$J\in C^1(E,\ \mathbf{R})$，即 J 是定义在 E 上的连续 Fréchet 可微的泛函。称泛函 J 满足 Palais-Smale 条件(简称 P.S.条件)，如果对任意的序列 $\{u^{(k)}\}\subset E$，若 $\{J(u^{(k)})\}$ 有界且 $J'(u^{(k)})\to 0(k\to\infty)$，则 $\{u^{(k)}\}$ 在 E 中存在收敛的子列。

记 B_ρ 表示在 E 上中心在原点半径为 ρ 的开球，∂B_ρ 表示 B_ρ 的边界。

引理 1(山路引理[9]) 设 E 是实 Banach 空间，且 $J\in C^1(E,R)$ 在 E 上满足 P.S.条件，$J(0)=0$，且有

(J_1) 存在常数 $\rho,\alpha>0$,使得 $J|_{\partial B_\rho}\ge\alpha$；

(J_2) 存在 $e\in E\setminus B_\rho$ 使得 $J(e)\le 0$。

则 J 存在一个临界值 $c\ge\alpha$，且

$$c=\inf_{g\in\Gamma}\max_{s\in[0,1]}J(g(s)),$$

其中 $\Gamma=\{g\in C([0,1],R)\,|\,g(0)=0,g(1)=e\}$。

引理 2 若条件(L)及 $(F_1)-(F_3)$ 成立，则 $J(u)$ 在 E_{pT} 上满足 P.S.条件。

证明 设 $u^{(k)}\in E_{pT}$ 使得 $\{J(u^{(k)})\}$ 有界且 $J'(u^{(k)})\to 0,k\to\infty$。则存在常数 $K>0$，使

得 $-K\le J(u^{(k)})\le K$。由(8)及 (F_3)，对充分大的 k，有

$$\beta\mathrm{K}+\|u^{(k)}\|_2$$

$$\ge\beta J(u^{(k)})-\langle J'(u^{(k)}),u^{(k)}\rangle$$

$$=\frac{\beta-2}{2}\left\|u^{(k)}\right\|_2+\sum_{n=1}^{pT}\left[\frac{\partial F\left(n-1,u_n^{(k)},u_{n-1}^{(k)}\right)}{\partial v_2}u_n^{(k)}+\frac{\partial F\left(n,u_{n+1}^{(k)},u_n^{(k)}\right)}{\partial v_2}u_n^{(k)}-\beta F\left(n,u_{n+1}^{(k)},u_n^{(k)}\right)\right]$$

$$=\frac{\beta-2}{2}\left\|u^{(k)}\right\|_2+\sum_{n=1}^{pT}\left[\frac{\partial F\left(n,u_{n+1}^{(k)},u_n^{(k)}\right)}{\partial v_1}u_{n+1}^{(k)}+\frac{\partial F\left(n,u_{n+1}^{(k)},u_n^{(k)}\right)}{\partial v_2}u_n^{(k)}-\beta F\left(n,u_{n+1}^{(k)},u_n^{(k)}\right)\right]$$

$$\geq\frac{\beta-2}{2}\left\|u^{(k)}\right\|_2\text{。}$$

由$\beta>2$知，$\left\{u^{(k)}\right\}$是E_{pT}上的有界序列。从而在E_{pT}中$\left\{u^{(k)}\right\}$存在收敛子列，即 P.S.条件成立。

3 结论及证明

定理 1 的证明 由假设易知，$J(0)=0$。由引理 2 知，J 满足 P.S.条件。由(F_2),对$\varepsilon=\frac{1}{8}\underline{\lambda}$，存在$\delta>0$，使得当$\sqrt{v_1^2+v_2^2}\leq\delta$时,

$$\left|F(n,v_1,v_2)\right|\leq\tfrac{1}{8}\underline{\lambda}\left(v_1^2+v_2^2\right),\quad\forall n\in\mathbf{Z}\text{。}$$

设$\rho=\frac{1}{\sqrt{2}}\delta$，对任意的$u\in E_{pT}$及$\|u\|\leq\rho$，有$|u_n|\leq\|u\|\leq\rho=\frac{1}{\sqrt{2}}\delta$， $\forall n\in\mathbf{Z}$。因此，有$u_n^2+u_{n+1}^2\leq\delta^2$， $\forall n\in\mathbf{Z}$。从而

$$\begin{aligned}J(u)&\geq\frac{1}{2}\underline{\lambda}\|u\|_2^2-\frac{1}{8}\underline{\lambda}\sum_{n=1}^{pT}\left(u_{n+1}^2+u_n^2\right)\\&\geq\frac{1}{2}\underline{\lambda}\|u\|_2^2-2\times\frac{1}{8}\underline{\lambda}\|u\|_2^2\\&\geq\frac{1}{4}\underline{\lambda}\|u\|_2^2,\end{aligned}$$

取$\sigma=\frac{1}{4}\underline{\lambda}\rho^2$，则$J(u)\big|_{\partial B_\rho}\geq\sigma>0$。山路引理的条件$(J_1)$成立。

为了利用山路引理，下面验证条件(J_2)。

由(F_3')，对任给$\tau\in R$及$w\in E_{pT}\setminus\{0\}$，$\|w\|_2=1$，有

$$\begin{aligned}J(\tau w)&\leq\frac{1}{2}\overline{\lambda}\tau^2-\sum_{n=1}^{pT}F(n,\tau w_{n+1},\tau w_n)\\&\leq\frac{1}{2}\overline{\lambda}\tau^2-a_1|\tau|^\beta\sum_{n=1}^{pT}\left[\sqrt{w_{n+1}^2+w_n^2}\right]^\beta+pTa_2\to-\infty,\tau\to+\infty\text{。}\end{aligned}$$

因$\beta>2$，可选择充分大的$\tau>\rho$，使得对$e=\tau w\in E_{pT}$，有$J(\tau w)<0$。

由山路引理,J有临界值$c>\sigma>0$,并且$c=\inf\limits_{g\in\Gamma}\max\limits_{s\in[0,1]}J(g(s))$，其中

$$\Gamma=\left\{g\in C([0,1],R)\,\middle|\,g(0)=0,g(1)=e\right\}\text{。}$$

设$\overline{u}\in E_{pT}$是临界值c对应的临界点，即$J(\overline{u})=c$。因$c>0$，显然$\|\overline{u}\|_2\neq0$。类似于条件(J_2)的证明，

$$J(u)\le\frac{1}{2}\overline{\lambda}\|u\|^2-\sum_{n=1}^{pT}F(n,u_{n+1},u_n)$$
$$\le\frac{1}{2}\overline{\lambda}\|u\|^2-a_1\sum_{n=1}^{pT}|u_n|^\beta+pTa_2\text{。}$$
$$\le\frac{1}{2}\overline{\lambda}\|u\|^2-a_1c_1^\beta\|u\|_2^\beta+pTa_2,\forall u\in E_{pT}\text{。}\qquad（10）$$

因此，J 有上界。定义 $c_{\max}$ 为 $\{J(u)|u\in E_{pT}\}$的上确界。由（10），知 $\lim_{\|u\|_2\to+\infty}J(u)=-\infty$。从而 $-J$ 是强制的，且 J 在点 $\tilde{u}$ 达到最大值。显然 $\|\tilde{u}\|_2\ne 0$。

若 $\tilde{u}\ne\overline{u}$,证毕。若 $\tilde{u}=\overline{u}$，有 $c=c_{\max}$。从而，对任意的 $g\in\Gamma$，$c_{\max}=\max_{s\in[0,1]}J(g(s))$。由 $J(g(s))$ 关于 s 的连续性，$J(0)\le 0$ 及 $J(e)<0$，知存在 $s_0\in(0,1)$ 使得 $J(g(s_0))=c_{\max}$。若选择 $g_1,g_2\in\Gamma$ 使得集合 $\{h_1(s)|s\in(0,1)\}\cap\{h_2(s)|s\in(0,1)\}$ 为空集，则存在 $s_1,s_2\in(0,1)$ 使得 $J(g(s_1))=J(g(s_2))=c_{\max}$。因此，可得到 J 在 E_{pT} 上两个不同的临界点 $u_1=g_1(s_1)$，$u_2=g_2(s_2)$。证毕。

注 3 由定理 1，知推论 1 的结论显然成立。

注 4 最后,我们给出一个例子来应用我们主要的结论。

对任意的 $n\in\mathbf{Z}$，假设

$$\left[-1-\sin^2\left(\frac{\pi n}{T}\right)\right]u_{n+1}-\left[1+\sin^2\left(\frac{\pi(n-1)}{T}\right)\right]u_{n-1}+\left[2+\sin^2\left(\frac{\pi n}{T}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi(n-1)}{T}\right)\right]u_n$$
$$=\beta u_n\left[\left(1+\cos^2\left(\frac{\pi n}{T}\right)\right)\left(u_{n+1}^2+u_n^2\right)^{\frac{\beta}{2}-1}+\left(1+\cos^2\left(\frac{\pi(n-1)}{T}\right)\right)\left(u_n^2+u_{n-1}^2\right)^{\frac{\beta}{2}-1}\right],\qquad（11）$$

其中 $\beta>2$，T 是给定的正整数。

我们有

$$a_n=-1-\sin^2\left(\frac{\pi n}{T}\right),\quad b_n=2+\sin^2\left(\frac{\pi n}{T}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi(n-1)}{T}\right),$$

$$f(n,v_1,v_2,v_3)=\beta v_2\left[\left(1+\cos^2\left(\frac{\pi n}{T}\right)\right)\left(v_1^2+v_2^2\right)^{\frac{\beta}{2}-1}+\left(1+\cos^2\left(\frac{\pi(n-1)}{T}\right)\right)\left(v_2^2+v_3^2\right)^{\frac{\beta}{2}-1}\right],$$

且

$$F(n,v_1,v_2)=\left[1+\cos^2\left(\frac{\pi n}{T}\right)\right]\left(v_1^2+v_2^2\right)^{\frac{\beta}{2}}\text{。}$$

则

$$\frac{\partial F(n-1,v_2,v_3)}{\partial v_2}+\frac{\partial F(n,v_1,v_2)}{\partial v_2}$$
$$=\beta v_2\left[\left(1+\cos^2\left(\frac{\pi n}{T}\right)\right)\left(v_1^2+v_2^2\right)^{\frac{\beta}{2}-1}+\left(1+\cos^2\left(\frac{\pi(n-1)}{T}\right)\right)\left(v_2^2+v_3^2\right)^{\frac{\beta}{2}-1}\right]\text{。}$$

易证，定理 1 的所有条件成立，故对任意给定的正整数 $p>0$，方程(11)至少存在两个非平

凡 pT -周期解。

参考文献

[1] Elayadi S. An Introduction to Difference Equation [M]. New York: Springer, 1996.
[2] Kocic V L, Ladas G. Global Behavior of Nonlinear Difference Equations of Higher Order with Application [M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1993.
[3] Agarwal R P. Difference Equations and Inequalities: Theory, Methods and Applications[M]. New York: Marcel Dekker, 1992.
[4] Smets D, Willem M. Solitary waves with prescribed speed on infinite lattices[J]. J. Funct. Anal., 1997, 149: 266-275.
[5] Yu J S. The minimal period problem for the classical forced pendulum equation[J]. J. Differential Equations, 2009, 247: 672-685.
[6] Ma M J, Tang H S, Luo W. Periodic solutions for nonlinear second-order difference equations [J]. Appl. Appl. Math., 2007, 184: 685-694.
[7] Jing D Q, Agarwal R P. Existence of positive periodic solutions for a class of difference equations with several deviating arguments [J]. Appl. Appl. Math., 2003, 45: 1303-1309.
[8] Merdivenci Atici F, Guseinov G Sh. Positive periodic solutions for nonlinear difference equations with periodic coefficients [J]. J. Math.Anal. Appl., 1999, 232: 166-182.
[9] Rabinowitz P H. Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations[M]. New York: Amer. Math. Soc. Providence, RI, 1986.

Periodic and subharmonic solutions for discrete nonlinear equations with Jacobi operators

SHI Haiping[1]， LIU Zhongzhi[1]， ZHANG Hongqiang[2]
1. Basic Courses Department, Guangdong Baiyun Institute, Guangzhou (510450)
2. College of Mathematics and Computing Science, Changsha University of Science and Technology, Changsha (410076)

Abstract
In this paper, by using the notable Mountain Pass Lemma of critical point theory, some sufficient conditions for the existence and multiplicity of periodic and subharmonic solutions to a class of second order nonlinear functional difference equations with Jacobi operators are obtained. The proof is based on the Mountain Pass Lemma in combination with variational technique. The problem gives a practicable methods to solve the existence and multiplicity of periodic and subharmonic solutions of second order forward and backward functional difference equations.
Keywords: periodic and subharmonic solutions; mountain pass lemma; jacobi operators; discrete variational theory

作者简介：石海平，男，1979 年生，博士，主要研究方向：离散动力系统。