随机赋范模上开映射定理的研究

郭铁信，王娟
（北京航空航天大学数学与系统科学学院，北京 100083）

摘要：局部 L^0-凸拓扑下随机赋范模的研究是随机赋范模理论研究的全新视角，对金融数学中条件风险度量的研究起到推动作用。本文主要对局部 L^0-凸拓扑下随机赋范模上的开映射定理进行研究。根据随机赋范模赋予准范数时为赋准范空间，给出了完备随机赋范模的闭子模构成的商空间也是完备的随机赋范模，同时通过构造商空间，运用逆算子定理的方法证明了如下的开映射定理——在局部 L^0 -凸拓扑下，X 与 Y 是数域 K 上以（Ω，F，P）为基的完备的随机赋范模，T: X→Y 是几乎处处有界的模同态且为满映射，则 T 是开映射。

关键词：基础数学；局部 L^0-凸拓扑；随机赋范模；商空间；开映射定理

中图分类号：O177.3

The Research of Open Mapping Theorem on Random Normed Module

Guo Tiexin, Wang Juan
(School of Mathematics and Systems Science, Beihang University, Beijing 100083)

Abstract: It is a new perspective of studying random normed module under locally L^0-convex topology, which plays an important role in researching on conditional risk measures in financial mathematics. The main result of this paper is to proof the open mapping theorem on random normed module under locally L^0-convex topology. Based on the truth that random normed module is a quasi-normed space when given quasi norm, the paper gives the quotient space constituted by closed sub-module of complete random normed module is complete and shows following basic open mapping theorem: let X and Y be complete random normed modules over the scalar field K with base（Ω，F，P）under locally L^0-convex topology, the mapping T from X to Y is a.s. bounded module homomorphism and surjective, then T is a open mapping, through the methods of quotient space and inverse operator theorem.

Keywords:fundamentalmathematics;locallyL^0-convextopology;randomnormedmodule;quotient space; open mapping theorem

0 引言

随机度量空间（Random Metric spaces，简记 RM-空间）理论起源于概率度量空间（Probabilistic Metric spaces，简记 PM-空间）理论[1]。沿着泛函分析的方向随机度量理论发展了随机赋范模与随机内积模[2,3]。在随机赋范模上赋予$(\varepsilon,\lambda)-$拓扑的研究在过去的十年里已经取得了许多深刻的结果[4,5]。

在金融数学中，条件风险度量已经大部分用到了数学中凸分析[6]的知识，随着其进一步的发展，必将涉及到内部拓扑结构的分析，因而在随机赋范模上赋予局部L^0-凸拓扑[6,7]的研究是有很大意义的。

本文将基于此，对局部L^0-凸拓扑下随机赋范模上的开映射定理进行研究。由于局部L^0-凸拓扑是一种比$(\varepsilon,\lambda)-$拓扑更强的拓扑，在该拓扑下随机赋范模不再是线性拓扑空间[8]，

基金项目：国家自然科学基金（10871016）
作者简介：郭铁信（1965-），男，教授，博士生导师，主要研究方向：泛函分析，随机分析，金融数学
通信联系人：王娟（1984-），女，硕士研究生，主要研究方向：随机分析. E-mail: wangjuanbuaa@126.com

因而经典开映射定理[9]采用纲推理的证明不能平移。本文通过构造商空间的方法给出了开映射定理全新的证明。

1 预备知识

为了行文与读者的方便，本节给出必要的符号说明与基本概念。N 表示自然数全体，K 表示实数域 R 或复数域 C，$\overline{R}=[-\infty,+\infty]$，$(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为一给定的概率空间，$L^0(\mathcal{F},K)$ 表示 Ω 上的 $K-$值 $\mathcal{F}-$可测函数的 $\mathcal{F}-$等价类全体形成的代数。关于 $\mathcal{F}-$可测函数、$\mathcal{F}-$可测集、$\mathcal{F}-$等价类等术语，均参见文献[12]。$\forall\xi\in L^0(\mathcal{F},K)$，$|\xi|$ 总表示 $|\xi^0|$ 决定的 $\mathcal{F}-$等价类，其中 ξ^0 为 ξ 的任一代表元，$|\xi^0|$ 按下式定义：$|\xi^0|(\omega)=|\xi^0(\omega)|,\forall\omega\in\Omega$。

记 $L^0(\mathcal{F},\overline{R})$ 为 Ω 上的广义实值 $\mathcal{F}-$可测函数的 $\mathcal{F}-$等价类全体。熟知，在偏序 $\le:\xi\le\eta$ 当且仅当 $\xi^0(\omega)\le\eta^0(\omega)\,P-a.s.$ 之下，$L^0(\mathcal{F},\overline{R})$ 成一完备格，其中 ξ^0 与 η^0 分别为 ξ 与 η 的任意选取的代表元，而且 $(L^0(\mathcal{F},\overline{R}),\le)$ 中的任一子集 A 有最小上界 $\vee A$ 和最大下界 $\wedge A$。显然 $L^0(\mathcal{F},R)$ 是 $L^0(\mathcal{F},\overline{R})$ 的一个子格，也是一个完备格[12]。

记 $L^0_+=\{\xi\in L^0(\mathcal{F},R):\xi\ge 0\}$，$L^0_{++}=\{\xi\in L^0(\mathcal{F},R):\xi>0\ on\ \Omega\}$，其中 $\xi>0\ on\ \Omega$ 表示对 ξ 的任意代表元 ξ^0，$\xi^0(\omega)>0\,P-a.s.$。

定义 1[8] 称有序对 $(S,\|\cdot\|)$ 为数域 K 上以 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为基的随机赋范空间(简称 $RN-$空间)，如果 S 是数域 K 上的线性空间，而且映像 $\|\cdot\|:S\to L^0_+(\mathcal{F})$ 满足如下三个条件：

$RN-1)$ $\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|,\forall\alpha\in K,x\in S$；

$RN-2)$ $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|,\forall x,y\in S$；

$RN-3)$ $\|x\|=0\Rightarrow x=\theta(S中的零元)$。

进一步，若 S 是代数 $L^0(\mathcal{F},K)$ 上的左模且 $\|\cdot\|$ 满足：

$RNM-1)$ $\|\xi x\|=|\xi|\|x\|,\forall\xi\in L^0(\mathcal{F},K),x\in S$。

那么，$(S,\|\cdot\|)$ 称为数域 K 上以 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为基的随机赋范模（简称为 $RN-$模）。

定义 2[8] $(S,\|\cdot\|)$ 为数域 K 上以 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为基的随机赋范模，$B(\varepsilon)=\{x\in S:\|x\|\le\varepsilon\}$，$\forall\varepsilon\in L^0_{++}$，$U_\theta=\{B(\varepsilon):\varepsilon\in L^0_{++}\}$，集合 $G\subset S$ 称为局部 L^0-开的，若对 $\forall x\in G$，$\exists B(\varepsilon)\in U_\theta$，使得 $x+B(\varepsilon)\subset G$。一族局部 L^0-开集组成的拓扑为 Hausdorff 拓扑，称为局部 L^0-凸拓扑。

定义 3[11] 称有序对 $(S,|||\cdot|||)$ 为数域 K 上的赋准范空间（Quasi-Normed Space），若 S 是 K 上的一个线性空间，$|||\cdot|||$ 是 S 到 $[0,+\infty)$ 中的映象满足如下条件：

（1）$|||x|||=0\Leftrightarrow x=\theta(向量零元)$；

（2）$|||-x|||=|||x|||$，$\forall x\in S(对称性)$；

（3）$\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$，$\forall x,y\in S$；

（4）若$\alpha_n\to 0$，则$\|\alpha_n x\|\to 0,\forall x\in S$且若$x_n\to\theta$，则$\|\alpha x_n\|\to 0,\forall\alpha\in K$。

注：若$(S,\|\cdot\|)$为数域K上以$(\Omega,\mathcal{F},P)$为基的$RN-$空间，定义$\|\|\cdot\|\|:S\to[0,+\infty)$如下

$\|\|x\|\|=\iint_\Omega\frac{\|x\|}{1+\|x\|}dP,\forall x\in S$，则$(S,\|\|\cdot\|\|)$是一个赋准范空间。

定理 1[11] 完备的赋准范空间的商空间是完备的。

定理 2[8] $(S,\|\cdot\|)$为数域K上以$(\Omega,\mathcal{F},P)$为基的随机赋范模，如果S在$(\varepsilon,\lambda)-$拓扑下是完备的，则在局部L^0-凸拓扑下也是完备的。

逆算子定理[13] $(S^1,\|\cdot\|)$与$(S^2,\|\cdot\|)$是数域K上以$(\Omega,\mathcal{F},P)$为基的完备的$RN-$模，$T:S^1\to S^2$是几乎处处有界的模同态，如果T是单射且为满映射，则T^{-1}是连续的。

2 主要结果

引理 1 $(S,\|\cdot\|)$是数域K上以$(\Omega,\mathcal{F},P)$为基的完备的$RN-$模，M为S的闭子模，则商空间S/M赋以范数$\|[x]\|=\wedge\{\|y\|:\forall y\in[x]\}$为$RN-$模。

证明：往证$\|[x]\|$是S/M上的$RN-$模，只需证

（1）$\forall\alpha\in K$，$\|\alpha[x]\|=\|[\alpha x]\|=\wedge\{\|y\|:y\in[\alpha x]\}=\wedge\{\|\alpha z\|:z\in[x]\}$

$=\wedge\{|\alpha|\|z\|:z\in[x]\}=|\alpha|\wedge\{\|z\|:z\in[x]\}=|\alpha|\|[x]\|$

（2）$\forall\bar{x}\in[x],\bar{y}\in[y]$，$\|[x]+[y]\|=\bigwedge_{\substack{x\in[x]\\ y\in[y]}}\|x+y\|\le\|\bar{x}+\bar{y}\|\le\|\bar{x}\|+\|\bar{y}\|$

$\le\bigwedge_{\bar{x}\in[x]}\|\bar{x}\|+\bigwedge_{\bar{y}\in[y]}\|\bar{y}\|\le\|[x]\|+\|[y]\|$

（3）根据定义我们可以知道$\|[x]\|=\wedge\{\|x-m\|:\forall m\in M\}$，当$\|[x]\|=0$时，存在$y_n\in M$，使得$\|x-y_n\|\to 0$，而$M$为闭子模，故$x\in M$，则$\|[x]\|=0\Rightarrow[x]=\theta$。

（4）由（2）的思想同理可证$\|[x]\|$为代数$L^0(\mathcal{F},K)$上的左模，且满足

$\|\xi[x]\|=|\xi|\|[x]\|,\forall\xi\in L^0(\mathcal{F},K)$。证毕。

引理 2 在局部L^0-凸拓扑下，$(S,\|\cdot\|)$是数域K上以$(\Omega,\mathcal{F},P)$为基的完备的$RN-$模，M为S的闭子模，定义$\|\cdot\|_M:S/M\to L^0_+$，$\|x\|_M=\wedge\{\|x-m\|:m\in M\}$，则$(S/M,\|\cdot\|_M)$为完备的$RN-$模。

证明：（1）首先证明在$(\varepsilon,\lambda)-$拓扑下，$(S/M,\|\cdot\|_M)$为完备的$RN-$模。

由于S为完备的$RN-$模，根据定义 3，S在$\|\|\cdot\|\|$下为赋准范空间，准范数$\|\|x\|\|$在S上

诱导的线性拓扑为$(S,\|\cdot\|)$上的$(\varepsilon,\lambda)-$拓扑，根据定理 1，则商空间S/M是完备的赋准范空间，记准范数导出的拓扑为τ，τ为商拓扑。

往证$(S/M,\|\cdot\|_M)$为完备的$RN-$模，只要证出$\|\cdot\|_M$导出的$(\varepsilon,\lambda)-$拓扑与τ相等即可。由于S/M上的商拓扑是使得π既是连续映射同时又是开映射的唯一拓扑，只需证

$\pi:(S,\|\cdot\|)\to(S/M,\|\cdot\|_M)$为开映射且为连续映射。$\pi$为连续映射显然。

设 $N_\theta(\varepsilon,\lambda)=\{x\in S:P(\|x\|<\varepsilon)>1-\lambda\}$，$\forall\varepsilon>0,0<\lambda<1$，则$\{N_\theta(\varepsilon,\lambda):\varepsilon>0,0<\lambda<1\}$为$S$中$\theta$点邻域基，$S/M$中$\theta'$点邻域基为

$N_{\theta'}(\varepsilon,\lambda)=\{x\in S:P(\|[x]\|_M<\varepsilon)>1-\lambda\}$，其中$\theta'=[\theta]$，$\forall A\subset S$为开集，设$\theta\in A$，由定义，$\exists N_\theta(\varepsilon,\lambda)$，使得$N_\theta(\varepsilon,\lambda)\subset A$，从而

$\theta'\in\pi(N_\theta(\varepsilon,\lambda))=N_{\theta'}(\varepsilon,\lambda)\subset\pi(A)$，则$\pi$为开映射，故由$\|\cdot\|_M$导出的$(\varepsilon,\lambda)-$拓扑与$\tau$相等，则$(\varepsilon,\lambda)-$拓扑下，$(S/M,\|\cdot\|_M)$为完备的$RN-$模。

（2）其次证明在局部L^0-凸拓扑下，$(S/M,\|\cdot\|_M)$为完备的$RN-$模。根据定理 2 和（1）可得在局部L^0-凸拓扑下，$(S/M,\|\cdot\|_M)$为完备的$RN-$模。

引理 3 在局部L^0-凸拓扑下，$(S,\|\cdot\|)$是数域K上以$(\Omega,\mathcal{F},P)$为基的完备的$RN-$模，M为S的闭子模，则π：$S\to S/M$为开映射。

证明：设$B_\theta(\varepsilon)=\{x\in X:\|x\|<\varepsilon\},\varepsilon\in L^0_{++}$为零点的邻域，

$\pi(B_\theta(\varepsilon))=B_\theta(\varepsilon)+M=B_M(\varepsilon)\subset X/M$，则$\pi$为开映射。

开映射定理：在局部L^0-凸拓扑下，$(S^1,\|\cdot\|)$与$(S^2,\|\cdot\|)$是数域K上以$(\Omega,\mathcal{F},P)$为基的完备的$RN-$模，$T:S^1\to S^2$是几乎处处有界的模同态且为满映射，则T是开映射。

证明：由于$T:S^1\to S^2$是满射，定义对S^2中的零元θ，$T^{-1}(\theta)=\{x\in S^1\mid Tx=\theta\}$，则$T^{-1}(\theta)$为$S^1$的子模，且满足$T(\xi x)=\xi T(x)=\theta$，则$T^{-1}(\theta)$为闭子模。

定义商映射$\pi:S^1\to S^1/T^{-1}(\theta),\pi(x)=[x]$，根据引理 3，$\pi$为开映射。

定义映射$\hat{T}:S^1/T^{-1}(\theta)\to S^2$，根据引理 2，$S^1/T^{-1}(\theta)$为完备的随机赋范模，$\hat{T}$为模同态。

$\hat{T}([x])=\hat{T}([y])\Rightarrow[x]=[y]$，则$\hat{T}$为单射，且$\hat{T}$为满射，根据逆算子定理，$(\hat{T})^{-1}$为连续的。

由于$T=\hat{T}\circ\pi$，设$A\subset S^1$为开集，则$\pi(A)$为开集。$((\hat{T})^{-1})^{-1}(\pi(A))=\hat{T}(\pi(A))$为开集，故$T(A)$为开集，则$T$是开映射。

3 结论

本文对局部 L^0-凸拓扑下随机赋范模上开映射定理进行研究，通过构造商空间证明了开映射定理，证明思路是全新的。局部 L^0-凸拓扑下随机赋范模的研究对金融数学中条件风险度量的研究具有重要的意义。

[参考文献] (References)

[1] Schweizer, SklarA. Probabilistic Metric Space[M]. Dover Publication, INC, Mineola, New York, 2005.
[2] Guo,T.X.. Some basic theories of random normed linear spaces and random inner product space. Acta Anal.Funct.Appl.1999,1,160-184.
[3] 郭铁信. Lebesgue-Bochner 函数空间的对偶表示定理[J].中国科学（A 辑）,1999,29(9): 769-776.
[4] T.X. Guo. Survey of recent development of random metric theory and its applications in China(Ⅰ) , Acta Anal.Funct. Appl. 3(2001)129-158.
[5] T.X. Guo.Survey of recent development of random metric theory and its applications in China(Ⅱ) , Acta Anal.Funct. Appl. 3(2001)208-230.
[6] Michael Kupper, Nicolas Vogelpoth. Complete L^0-normed modules and automatic continuity of monotone convex functions. Working paper Series NO.10. Vienna Institute of Finance, September 2008.
[7] Damir Filipovic, Michael Kupper, Nicolas Vogelpoth. Separation and duality in locally L^0-convex modules. Journal of Functional Analysis 256(2009)3996-4029.
[8] Tiexin Guo. A comprehensive connection between the basic results and properties derived from two kinds of topologies for a random locally convex module. J Funct Anal, 2010, 258:3024-3047.
[9] 江泽坚，孙善利. 泛函分析（第 2 版）.北京：高等教育出版社，2005,5.
[10] Guo Tiexin. Module Homomorphisms on Random Normed Modules. Northeast. Math.J.12(1) (1996),102-114.
[11] 夏道行，杨亚立. 线性拓扑空间引论[M].上海：上海科学技术出版社.1986.
[12] Dunford N, Schwartz J T. Linear Operators, Part I[M].London: Interscience, 1957.
[13] 郭铁信，王志浩.局部 L^0-凸拓扑下随机赋范模上模同态的研究.待发表.