关于闭算子的一个注记

蔡亮[1]，卞洪亚[2]

（1. 中国矿业大学理学院，江苏徐州 221008;

2. 中国矿业大学理学院，江苏徐州，221008）

摘要：本文主要研究在 Banach 空间上如何判断一个算子是闭算子的问题，特别是对一个闭算子和一个线性算子相加后所得算子闭性的研究得出了一个结论。这些结论为判断算子闭性提供了一些适用的方法。在本文所给结论的证明中多次用到闭算子定理和有界线性算子的一些基本性质。

关键词： Banach 空间；闭算子；闭图像定理；有界线性算子

中图分类号：O177.2

A Note on Closed Operator

CAI Liang, BIAN Hongya

(College of Science, China University of Mining and Technology, Xuzhou , Jiangsu 221008)

Abstract: This paper is devoted to the study on how to judge an operator is closed on Banach space, particularly on a closed operator and a linear operator adding , and a conclusion is given in this paper. These conclusions for judgment provide some applicable methods. Closed graph theorem and the properties of bounded linear operators are used many times to prove these theorems in this paper.

Key words: Banach space; closed operator; closed graph theorem; bounded linear operator

0 引言

在泛函分析的研究中，经常会遇到证明一个算子为闭算子的问题。例如在线性算子半群理论中，由 $Hille-Yosida$ 定理知，要证明一个算子 A 为一个 C_0 半群的无穷小生产元，其中一个需要证明的条件就是证明 A 是稠定的闭算子[1]。此外，在学习中还会碰到判断算子与算子之和或之差以及数乘算子后所得算子是否为闭算子的问题。

判断一个算子是否为闭算子，最基本的思想是利用闭算子的定义，而最直接的方法是利用闭算子的一个充要条件，见第一部分的定理 3（判定定理）。但是大多数的问题利用这个判定定理的方法去判断比较麻烦，这就需要给出一些其他的判定定理。本文在研究了闭算子的定义和一些文献后，得出了五个判断算子闭性的定理。其中，本文给出有界线性算子为闭算子的条件，以及一个算子的逆为闭算子以及算子乘积为闭算子的充分条件，特别地，设 T 是 X 中到 Y 中的一个闭算子，A 是 X 中到 Y 中的一个有界线性算子，并且 $D(A) \supset D(T)$，根据一个熟知的定理[2]可知，$T + A$ 是闭算子，其他学者[3]对这个定理已做了一个推广，得出 A 在不一定连续的情况的情况下 $T + A$ 是闭算子的一个充分条件，本文在此基础上，改进了这个推广进而得到了两个定理。

1 基本概念和性质

定义 1[4] 设 X 和 Y 是两个赋范线性空间，T 是 X 的子空间 $D(T)$ 到 Y 中的线性算子，称 $X \times Y$ 中的集合

作者简介：蔡亮（1986-），男，硕士研究生，主要研究方向：泛函分析. E-mail: onlyhhy@126.com

$$G(T)=\{(x,y)\,|\,x\in D(T),y=Tx\}$$

为算子T的图像。在$X\times Y$中，定义$\|(x,y)\|=\|x\|+\|y\|$，易知$X\times Y$按$\|(x,y)\|$成为赋范线性空间。如果$G(T)$是$X\times Y$中的闭集，则称T是闭算子。

定理 2[4] (闭图像定理) 设X和Y是$Banach$空间，T是$D(T)\subset X$到Y中的闭线性算子。如果$D(T)$是闭的，则T是有界算子。

定理 3[5] (判别定理) 设X，Y是两个赋范线性空间，T是X中到Y中的线性算子，则T是闭算子，当且仅当对于任意的点列$\{x_n\}\subset D(T)$，如果 $x_n\to x\in X$，$Tx_n\to y\in Y$ $(n\to\infty)$那么必定可以推出$x\in D(T)$而且$y=Tx$。

2 主要结论

定理 1 设X和Y都是$Banach$空间，T是X的子空间$D(T)$到Y中的线性算子，如果$D(T)$是闭的，则T为闭算子当且仅当T是有界线性算子。

证明 定理的必要性即是闭图像定理的内容，详细请参考文献[4]（或文献[5]、[6]）；

故只需证明充分性，设T是$D(T)\subset X$到Y中的有界线性算子，则存在常数M，使得对所有$x\in D(T)$，有

$$\|Tx\|\le M\|x\|$$

由算子范数的定义

$$\|T\|=\mathop{SUP}_{0\ne x\in D(T)}\frac{\|Tx\|}{\|x\|}\le M$$

对于任意的点列$\{x_n\}\subset D(T)$，如果 $x_n\to x\in X$，$Tx_n\to y\in Y$ $(n\to\infty)$，由于$D(T)$是闭的，故$x\in D(T)$，而且

$$\begin{aligned}\|Tx-y\|&\le\|Tx-Tx_n\|+\|Tx_n-y\|\\&\le M\|x_n-x\|+\|Tx_n-y\|\to 0\qquad(n\to\infty)\end{aligned}$$

因此$Tx=y$，根据判别定理 3 知T是闭算子。

定理 2 设X是$Banach$空间，T是X到X上的闭线性算子，则对于$\forall n\in N^*$，T^n仍然是闭算子。

证明 当$n=1$时，由已知条件知T是闭算子；

假设当$n=k$时，T^k是闭算子；现在考虑当$n=k+1$时，对于任意的点列$\{x_m\}\subset X$，如果 $x_m\to x\in X$，$T^{k+1}x_m\to y\in X$ $(m\to\infty)$，则根据假设和闭图像定理知T^k和T都是有界线性算子，而当$m\to\infty$时

$$\begin{aligned}\|T^{k+1}x-y\|&\le\|T^{k+1}x-T^{k+1}x_m\|+\|T^{k+1}x_m-y\|\\&\le\|T^k\|\|T\|\|x_m-x\|+\|T^{k+1}x_m-y\|\to 0\end{aligned}$$

故$T^{k+1}x=y$，所以T^{k+1}仍然是闭算子。由数学归纳法知，对于$\forall n\in N^*$，T^n仍然是闭算子。

定理 3 设X与Y是两个$Banach$空间，T是X的子空间$D(T)$到Y上的线性算子，如

果T是可逆算子，那么T的逆算子T^{-1}也一个是闭算子。

证明 对于任意的点列$\{y_n\}\subset Y$，使得 $y_n\to y\in Y$，$T^{-1}y_n\to x\in X$

由于T是可逆的，故存在点列$\{x_n\}\subset D(T)$，使得$T^{-1}y_n=x_n,n\in N^*$，则有$x_n\to x$，$Tx_n=y_n\to y$，$n\to\infty$；因为T是闭算子，故$x\in D(T)$并且$Tx=y$，即$T^{-1}y=x$，而且$y\in Y$，因此T^{-1}一定是闭算子。

定理 4 设X和Y是两个$Banach$空间，T是$D(T)\subset X\to Y$的闭算子，A是$D(A)$到Y中的线性算子，满足：

i) $D(A)\supset D(T)$；

ii) 存在常数一个a，使得对任意$x\in D(T)$成立

$$\|Ax\|\le\|aTx\|\text{，其中}|a|<1$$

则$T+A$也是闭算子。

证明 令$B=T+A$，由 ii)得到

$$\|Bx\|=\|Tx+Ax\|\ge\|Tx\|-\|Ax\|\ge(1-|a|)\|Tx\|$$

因此$\|Tx\|\le\|Bx\|(1-|a|)^{-1}$；任取$D(B)$中的点列$\{x_n\}$，如果$x_n\to x,Bx_n\to y$，因为

$$\|Tx_n-Tx_m\|\le\|Bx_n-Bx_m\|(1-|a|)^{-1}\to 0\ \ (m,n\to\infty)$$

所以$\{Tx_n\}$也是一个收敛点列。因为T是闭算子，而且$D(B)=D(T)$，所以$x\in D(T)=D(B),Tx_n\to Tx$；

由 ii)得

$$\|Ax_n-Ax\|\le|a|\ \|Tx_n-Tx\|\to 0\text{，}\ n\to\infty$$

所以

$$Ax_n\to Ax$$

又因为$Bx_n=Tx_n+Ax_n\to(T+A)x=Bx$，因此$T+A$也是闭算子。

推论 设X，Y是$Banach$空间，T是$D(T)\subset X$到Y中的闭线性算子，S是$D(S)$到Y中的线性算子，满足：

i) $D(T)=D(S)$；

ii) 存在两个常数a,b，$|a|<1,|b|<1$，使得对任意的$x\in D(T)$成立

$$\|Sx-Tx\|\le\|aTx\|+\|bSx\|$$

则S是闭算子。

证明 令$A=S-T$，$T(t)=T+tA,t\in[0,1]$

显然有

$$D(T(t))=D(T)=D(S)\text{，}\ T(0)=T\text{，}\ T(1)=S\text{；}$$

从而

$$\begin{aligned}\|Ax\| &= \|Sx-Tx\| \le \|aTx\|+\|bSx\| \\ &= |a|\|T(t)x-tAx\|+|b|\|T(t)x+(1-t)Ax\| \\ &= (|a|+|b|)\|T(t)x\|+[|a|t+(1-t)|b|]\|Ax\| \\ &\le (|a|+|b|)\|T(t)x\|+\max\{|a|,|b|\}\|Ax\|\end{aligned}$$

因此

$$\|Ax\| \le \frac{|a|+|b|}{1-\max\{|a|,|b|\}}\|T(t)x\|$$

任取$t',t\in[0,1]$满足$|t'-t|<\dfrac{1-\max\{|a|,|b|\}}{|a|+|b|}$

因为 $$T(t')=T+t'A=T+tA+(t'-t)A=T(t)+(t'-t)A$$

而且

$$\|(t'-t)Ax\|=|t'-t|\|Ax\|\le\alpha(t',t)\|T(t)x\|,$$

其中$0\le\alpha(t',t)=|t'-t|\times\dfrac{|a|+|b|}{1-\max\{|a|,|b|\}}<1$，

由定理 4 知，如果$T(t)$是闭算子，则$T(t')$也是闭算子，已知$T(0)=T$是闭算子，所以只需利用上面的方法，经过有限次步骤便可证得$T(1)=S$也是闭算子，证毕。

定理 5 设X，Y是$Banach$空间，T是$D(T)\subset X$到Y中的闭线性算子，A_n是X的子空间$D(A_n)$到Y中有界线性算子，$n=1,2,3,\dots$。如果对于$\forall n\in N^*$，有$D(A_n)\supset D(T)$，且$\bigcap_{n=1}^{\infty}D(A_n)\ne\varnothing$，则对$\forall n\in N^*$，$T+\sum_{i=1}^{n}a_iA_i$是一个闭算子，其中$a_1,a_2,\dots,a_n$是一组任意的实常数。

证明 我们利用数学归纳法来证明这个定理；

当$n=1$时，易知$T+a_1A_1$是一个闭算子，参考文献[2];

假设当$n=k$时，$T+\sum_{i=1}^{k}a_iA_i$是一个闭算子；

当$n=k+1$时，$T+\sum_{i=1}^{k+1}a_iA_i=(T+\sum_{i=1}^{k}a_iA_i)+a_{k+1}A_{k+1}$，由假设$T+\sum_{i=1}^{k}a_iA_i$是一个闭算子，$a_{k+1}A_{k+1}$是一个有界线性算子（如果$a_{k+1}=0$时，$a_{k+1}A_{k+1}$为零算子，亦是有界线性算子），因此$T+\sum_{i=1}^{k+1}a_iA_i$也是一个闭算子；

由数学归纳法知$\forall n\in N^*$，$T+\sum_{i=1}^{n}a_iA_i$是闭算子。

推论设X，Y是$Banach$空间，A是$D(A)$到Y中的闭线性算子，则$A+\omega I$是闭算子，其中ω为一个常数， I为恒等算子。

[参考文献] (References)

[1] Pazy A. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations [M].New York: Springer Verlag,1983.

[2] Augus E. Taylor, David C. Introduction to functional analysis [M]. New York: John Wiley Sons, 1989.

[3] 杨良梁. 关于闭算子的一个注记[J]. 大庆高等专科学校学报，2000，20 (4):1~3.
YANG L L. A note on closed operator [J].Journal of Daqing College, 2000, 20 (4):1~3.

[4] 程其襄，张奠宙，等. 实变函数与泛函分析基础[M]. 北京：高等教育出版社，2003.

CHEN Q X，ZHANG D Z，et al. The basis real variable and functional analysis [M].Beijing: Higher Education Press, 2003.

[5] 许天周. 应用泛函分析[M]. 北京：科学出版社，2002.

XU T Z. Applied Functional Analysis [M]. Beijing: Science Press, 2002.

[6] 王声望，郑维行. 实变函数与泛函分析概要[M]. 北京：高等教育出版社，2007.
WANG S W, ZHENG W X. Real analysis and functional analysis [M]. Beijing: Higher Education Press, 2007.