关于下三角无穷矩阵的解

黄宝华
福建师范大学数学与计算机科学学院，福州(350107)
E-mail：huangbaohua_001@126.com

摘 要：本文主要研究下三角无穷矩阵 A 作为有界线性算子将l^2空间中的元素作用到l^∞空间中时所具有的一些性质以及下三角无穷矩阵的非平凡第一象限解和c_0解的存在性问题，并探讨下三角无穷矩阵的非平凡第一象限解的存在性与可分无穷维的复 Hilbert 空间上算子具有非平凡不变子空间的关联.

关键词：下三角矩阵；有界线性算子；不变子空间
中图分类号：0177.91

1 引言及预备知识

在无穷维空间上，将算子的许多问题转化为矩阵来解决，将定性的几何问题转化为直观的代数计算，使问题容易解决. 本文讨论一个著名的公开问题，即指“可分复巴拿赫空间H 上的每个有界线性算子都具有非平凡的不变子空间吗？”，其根源可追溯到 1935 年 J.Von Neumann[3]证明了“可分无穷维的复 Hilbert 空间上的每个紧算子都具有非平凡的不变子空间”.“不变子空间问题”的发展具有曲折的历史. 历史上该问题的证明方法及其丰富. 如 N.Aronszajn 和.Smith[4]在 1954 年用非标准分析方法证明了：无穷维的复巴拿赫空间上的全连续算子具有非平凡的不变子空间；V.I.Lomonosov[5]用“Schauder 不动点定理”证明无穷维的复巴拿赫空间上每个与紧算子交换的算子都具有非平凡的超不变子空间.

本文主要讨论下三角无穷矩阵 A 作为有界线性算子将l^2空间中的元素作用到l^∞空间中时所具有的一些性质以及下三角无穷矩阵方程 $AX=Y$ （其中 $X\in l^2$， $Y\in l^\infty$ ）有非平凡第一象限解和c_0解的存在性问题，并探讨下三角无穷矩阵的非平凡第一象限解的存在性与可分无穷维的复 Hilbert 空间上算子具有非平凡不变子空间的关联.

定义 1.1 称矩阵 $A=(a_{ij})$ 为下三角无穷矩阵，其中 $a_{ij}\in\mathbb{C}$，如果当 $i<j$ 时，有 $a_{ij}=0, i=1,2,\cdots; j=1,2,\cdots$.

定义 1.2 称下三角无穷矩阵 $A=(a_{ij})$ 为有界下三角无穷矩阵，如果

$$\sup_{i\ge 1}\left(\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}<+\infty$$

定义 1.4[8] 设 E_1,E_2 设赋范线性空间，T 是 E_1 到 E_2 上的有界线性算子，算子T^*称为 T 的共轭算子，若对任何 $x\in E_1$ 以及任何 $f\in E_2^*$,有 $(T^*f)(x)=f(Tx)$ 成立.特别地，若 T 是l^2到l^∞上的有界线性算子，则 T 与 T^* 满足等式：$(Tx,y)=(x,T^*y), x\in l^2, y\in(l^\infty)^*$

定理 1.7[11] 若 E 可分，则每个有界序列$\{u_n\}\subset E^*$有 $w*$ 收敛子列.

2． 下三角无穷矩阵的解

这一节主要讨论有界下三角无穷矩阵的解的问题，主要围绕于有无非平凡的第一象限解，c_0解和l^2解等问题的讨论.

引理 2.1 设 A 为有界下三角无穷矩阵，$A:l^2 \to l^\infty \quad X \mapsto Y$,则 A 为有界线性算子，且$\|A\| \le \sup\limits_{i\ge1}\left(\sum\limits_{j\ge1}^{\infty}|a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$\forall X=(x_i)_{i=1}^{\infty}, Y=(y_i)_{i=1}^{\infty} \in l^2, k_1,k_2 \in \mathbb{C}$，则 $A(k_1X+k_2Y)=(\sum\limits_{i=1}^{n}(k_1x_i+k_2y_i)a_{ni})_{n=1}^{\infty}=$

$(\sum\limits_{i=1}^{n}k_1x_ia_{ni})_{n=1}^{\infty}+(\sum\limits_{i=1}^{n}k_2y_ia_{ni})_{n=1}^{\infty}=k_1(\sum\limits_{i=1}^{n}x_ia_{ni})_{n=1}^{\infty}+k_2(\sum\limits_{i=1}^{n}y_ia_{ni})_{n=1}^{\infty}=k_1AX+k_2AY$,因此，T 是线性算子.

$\forall X=(x_i)_{i=1}^{\infty} \in l^2$，

$$\|AX\|_{l^\infty}=\sup_{i\ge1}\left|\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}x_j\right| \le \sup_{i\ge1}\sum_{j=1}^{\infty}\left|a_{ij}x_j\right| \le \sup_{i\ge1}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|a_{ij}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|x_j\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\sup_{i\ge1}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|a_{ij}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\|X\|_{l^2}$$

所以$\|A\| \le \sup\limits_{i\ge1}\left(\sum\limits_{j\ge1}^{\infty}|a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$，则 A 为有界线性算子.

定理 2.2 设 J 为所有下三角无穷矩阵全体，则 J 为 $B(l^1,l^\infty)$ 的子空间.

证明：记 $J=\{A\,|\,A=(a_{ij}),\text{当}i<j\text{时，}\ a_{ij}=0,\text{且}\sup\limits_{i\ge1}\left(\sum\limits_{j\ge1}^{\infty}|a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}<+\infty, i,j=1,2,\cdots\}$.

（1）显然零矩阵属于 J，因此 J 是非空集合；

（2）$\forall A=(a_{ij}), B=(b_{ij}) \in J$，则当 $i<j$ 时，$a_{ij}=0,\ b_{ij}=0,$ 且 $\sup\limits_{i\ge1}\left(\sum\limits_{j\ge1}^{\infty}|a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}<+\infty$，$\sup\limits_{i\ge1}\left(\sum\limits_{j\ge1}^{\infty}|b_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}<+\infty$，所以，当 $i<j$ 时，有 $a_{ij}+b_{ij}=0,$ 且

$$\sup_{i\ge1}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|a_{ij}+b_{ij}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \sup_{i\ge1}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|a_{ij}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}+\sup_{i\ge1}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|b_{ij}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}<+\infty$$，故 $A+B \in J$；

（3）$\forall A=(a_{ij}) \in J$，$k \in \mathbb{C}$，，则当 $i<j$ 时，$a_{ij}=0,\ \sup\limits_{i\ge1}\left(\sum\limits_{j\ge1}^{\infty}|a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}<+\infty$. 所以，当 $i<j$ 时，有 $ka_{ij}=0,$ 且 $\sup\limits_{i\ge1}\left(\sum\limits_{j\ge1}^{\infty}|ka_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}=k\sup\limits_{i\ge1}\left(\sum\limits_{j\ge1}^{\infty}|a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}<+\infty$，故 $kA \in J$，综合（1）（2）（3）知，J 为 $B(l^1,l^\infty)$ 的子空间.

引理 2.3 设 $A=(a_{ij})$ 为有界下三角无穷矩阵，$A:l^2 \to l^\infty \quad X \mapsto Y$,则 A 的共轭算子 $A^*=(\overline{a_{ij}})'$

证明：设 $Y^* = (y_i)_{i=1}^{\infty} \in \left(l^{\infty}\right)^*$，记 $e_n = (0,0,\cdots,0,\overset{\text{第}n\text{个}}{1},0,0,\cdots)$，则

$$\left\langle A^*Y^*, e_n \right\rangle = \left\langle Y^*, Ae_n \right\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{a}_{in} y_i = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{a}_{in} y_i, n = 1,2,\cdots,$$

从而

$$A^*Y^* = (\sum_{i=1}^{\infty} \bar{a}_{i1} y_i, \sum_{i=2}^{\infty} \bar{a}_{i2} y_i, \cdots, \sum_{i=n}^{\infty} \bar{a}_{i2} y_i, \cdots) = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{21} & \bar{a}_{31} & \cdots & \bar{a}_{n1} & \cdots \\ 0 & \bar{a}_{22} & \bar{a}_{32} & \cdots & \bar{a}_{n2} & \cdots \\ 0 & 0 & \bar{a}_{33} & \cdots & \bar{a}_{n3} & \cdots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \bar{a}_{nn} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \\ \vdots \end{pmatrix} = (a_{ij})' Y^*$$

因此，$A^* = (\overline{a_{ij}})'$

定义 2.4　设 $A = (a_{ij})$ 为有界下三角无穷矩阵. 若存在非零元 $X \in l^2$，使得 $\mathrm{Re}\left\langle AX, e_n \right\rangle \geq 0$，$\mathrm{Im}\left\langle AX, e_n \right\rangle \geq 0$，$n = 1,2,\cdots$ 成立，这里 $\left\langle AX, e_n \right\rangle$ 表示 AX 的第 n 位元素，则称 $A = (a_{ij})$ 在 l^2 具有非平凡的第一象限解.

定义 2.5　设 $A = (a_{ij})$ 为有界下三角无穷矩阵，若存在非零元 $X \in l^2$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left\langle AX, e_n \right\rangle = 0$ 成立，这里 $\left\langle AX, e_n \right\rangle$ 表示 AX 的第 n 位元素，则称 $A = (a_{ij})$ 在 l^2 具有非平凡的 c_0 解.

定义 2.6　设 $A = (a_{ij})$ 为有界下三角无穷矩阵，若存在非零元 $X \in l^2$，使得 $\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} \left|\left\langle AX, e_n \right\rangle\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$ 成立，这里 $\left\langle AX, e_n \right\rangle$ 表示 AX 的第 n 位元素，则称 $A = (a_{ij})$ 在 l^2 具有非平凡的 l^2 解.

定理 2.7　设 $A = (a_{ij})$ 为有界下三角无穷矩阵，

（1）　若存在正整数 k 使得 $\mathrm{Re}\, a_{nk} \geq 0$，$\mathrm{Im}\, a_{nk} \geq 0$，$\forall n = 1,2,\cdots$，则 $A = (a_{ij})$ 在 l^2 上具有非平凡的第一象限解；

（2）　若存在正整数 k 使得 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{nk} = 0$，则 $A = (a_{ij})$ 在 l^2 上具有非平凡的 c_0 解；

（3）　若存在正整数 k 使得 $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|a_{nk}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty$，则 $A = (a_{ij})$ 在 l^2 上具有非平凡的 l^2 解；

证明：(1) 取 $X = e_k = (0,0,\cdots,0,\overset{\text{第}k\text{个}}{1},0,0,\cdots)'$，则 $\mathrm{Re}\left\langle AX, e_n \right\rangle = \mathrm{Re}\, a_{nk} \geq 0$，$\mathrm{Im}\left\langle AX, e_n \right\rangle = \mathrm{Im}\, a_{nk} \geq 0\ (n = 1,2,\cdots)$，因此，$A = (a_{ij})$ 在 l^2 上具有非平凡的第一象限解.

(2) 取 $X=e_k=(0,0,\cdots,0,\overset{\text{第}k\text{个}}{1},0,0,\cdots)'$，当 $n\ge k$ 时，有 $\langle AX,e_n\rangle=\sum_{i=1}^{n}a_{ni}x_i=a_{nk}$，则 $\lim_{n\to\infty}\langle AX,e_n\rangle=0=\lim_{n\to+\infty}a_{nk}=0$，因此，$A=(a_{ij})$ 在 l^2 上具有非平凡的 c_0 解.

（3）取 $X=e_k=(0,0,\cdots,0,\overset{\text{第}k\text{个}}{1},0,0,\cdots)'$，则 $\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|\langle AX,e_n\rangle\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left|a_{nk}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}<+\infty$，因此，$A=(a_{ij})$ 在 l^2 上具有非平凡的 l^2 解.

注意到，对有限维的矩阵若其对角元素非零，则该矩阵可逆，从而有非平凡的第一象限解得存在. 很自然地我们提出这个一个问题：若 $A=(a_{ij})$ 为有界下三角无穷矩阵且 $a_{ii}\ne 0,i=1,2,\cdots$，那么 $A=(a_{ij})$ 在 l^2 中是否有非平凡的第一象限解得存在呢？这问题不像有限维的情形容易解决，因为这时矩阵 $A=(a_{ij})$ 不一定可逆，例如下面例子：

例2.1 设
$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0&\cdots&0&\cdots\\ \frac{1}{2}&\frac{1}{2^2}&0&\cdots&0&\cdots\\ \frac{1}{2}&\frac{1}{2^2}&\frac{1}{2^3}&\cdots&0&\cdots\\ \vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\\ \frac{1}{2}&\frac{1}{2^2}&\frac{1}{2^3}&\cdots&\frac{1}{2^n}&\cdots\\ \vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\end{pmatrix},$$

则 $\sup_{i\ge1}\left(\sum_{j\ge1}^{\infty}|a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\sup_{i\ge1}\left(\sum_{j\ge1}^{i}\frac{1}{4^j}\right)^{\frac{1}{2}}=\sup_{i\ge1}\left(\frac{1-(\frac{1}{4})^i}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\le\frac{1}{2}$，故 A 为有界下三角无穷矩阵，令 $Y=\left(\frac{1}{2},1-(\frac{1}{2})^2,1-(\frac{1}{2})^3,\cdots,1-(\frac{1}{2})^n,\cdots\right)'\in l^\infty$，则方程 $AX=Y$ 在 l^2 中无解. 事实上，若存在 $X=(x_i)_{i=1}^{'\infty}\in l^2$，满足 $AX=Y$，则 $x_1=1$，$x_2=1$，$x_3=1$，$x_4=1$，$x_5=1$，$x_6=1$，…，这时，$\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left|x_i\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}=+\infty$，与 $X\in l^2$ 矛盾，因此，$A:l^2\to l^\infty$ 不可逆. 实际上，由于 l^2 为可分的巴拿赫空间，l^∞ 不可分，则对任意有界的下三角无穷矩阵都不可逆.

定理 2.8 设 $A=(a_{ij})$ 为有界下三角无穷矩阵且 $a_{ii}\ne0,\forall i=1,2,\cdots$ 且 $\sup_{n\ge1}\left\|A_n^{-1}\right\|<+\infty$，（其中 $A_n^{-1}=\left(b_{ij}\right)_{n\times n}$，$\left\|A_n^{-1}\right\|=\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}$），则 $A=(a_{ij})$ 在 l^2 中非平凡的第一象限解，

其中

$$A_n=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

证明：记 $B=\begin{pmatrix} a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \cdots & a_{n+1,n} \\ a_{n+2,1} & a_{n+2,1} & \cdots & a_{n+2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$，$D=\begin{pmatrix} a_{n+1,n+1} & 0 & 0 & \cdots \\ a_{n+2,n+1} & a_{n+2,n+2} & 0 & \cdots \\ a_{n+3,n+1} & a_{n+3,n+2} & a_{n+3,n+3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$

则 $A=\begin{pmatrix} A_n & 0_\infty \\ B & D \end{pmatrix}$，由于 $a_{ii}\neq 0,\forall i=1,2,\cdots$，则 A_n 可分为 n 维空间 $\mathbb{C}^n$（其中 $\mathbb{C}^n$ 中的范数 $\left\|(x_i)_{i=1}^{'n}\right\|=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$）的可逆算子，令 $\xi_n=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\cdots,\frac{1}{2^n}\right)'$，记 $z_n=A_n^{-1}\xi_n$，则 $A_nz_n=\xi_n$，故 $\langle A_nz_n,e_k\rangle=\frac{1}{2^k}>0,k=1,2,\cdots$，其中 $e_k=(0,0,\cdots,\overset{\text{第}k\text{个}}{1},0,\cdots,0)'$，令 $X_n=\left(z_n^{'},0,0,\cdots\right)'\in l^2$，则 $AX_n=\begin{pmatrix} A_n & 0_\infty \\ B & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_n \\ 0_\infty \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_nz_n \\ Bz_n \end{pmatrix}$，于是对任意 $k\leq n$，有 $\langle AX_n,e_k\rangle=\langle A_nz_n,e_k\rangle=\frac{1}{2^k}>0$．因为 $\sup\limits_{n\geq 1}\left\|A_n^{-1}\right\|<+\infty$，$\|X_n\|=\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2^j}b_{ij}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$$\leq\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{4^j}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{1}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}=\left\|A_n^{-1}\right\|\sqrt{\frac{1}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)}\leq 2\left\|A_n^{-1}\right\|$$，所以 $\|X_n\|\leq 2\sup\limits_{n\geq 1}\left\|A_n^{-1}\right\|<+\infty$，从而 $\{X_n\}$ 是 l^2 中的有界点列，则根据定理 1.7 可知 $\{X_n\}$ 存在 $w*$ 收敛子列 $\{X_{n_k}\}$，并记 $X_{n_k}\xrightarrow{w*}X\in l^2$，由引理 2.3 可得，$A^*=\left(\bar{a}_{ij}\right)'$，则 $A^*e_i=(\bar{a}_{i1},\bar{a}_{i2},\cdots,\bar{a}_{ii},0,0,\cdots)'$，$i=1,2,\cdots$，则对于 $\forall i$，有 $A^*e_i\in\left(l^2\right)^*$．由此，$\langle X,A^*e_i\rangle=\lim\limits_{k\to\infty}\langle X_{n_k},A^*e_i\rangle=\lim\limits_{k\to\infty}\langle AX_{n_k},e_i\rangle$，而当 $i<n_k$ 时，有 $\langle AX_{n_k},e_i\rangle=\frac{1}{2^i}>0$，则对于 $\forall i$，$\langle AX,e_i\rangle=\langle X,A^*e_i\rangle==\lim\limits_{k\to\infty}\langle X_{n_k},A^*e_i\rangle=\lim\limits_{k\to\infty}\langle AX_{n_k},e_i\rangle=\frac{1}{2^i}>0$，并且 $X\neq 0$，不然与 $\langle AX,e_i\rangle>0$ 矛盾．因此，A 在 l^2 中具有非平凡的第一象限解．

注： 从定理 2.8 的证明过程中，我们发现满足定理 2.8 条件下的有界下三角矩阵 A 在 l^2 中还具有非平凡的 l^2 解和 c_0 解．因为由 $0\neq X\in l^2$ 且 $\lim\limits_{i\to\infty}\langle AX,e_i\rangle=\lim\limits_{i\to\infty}\frac{1}{2^i}=0$ 知，A 在 l^2 中

具有非平凡的 c_0 解. $0\neq X\in l^2$ 且 $\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left|\langle AX,e_i\rangle\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^i}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{4^i}\right)^{\frac{1}{2}}<\sqrt{\frac{1}{3}}$ $<+\infty$ 知，A 在 l^2 中具有非平凡的 l^2 解.

3. 下三角无穷矩阵的解在不变子空间问题上的应用

不变子空间问题：设 H 为可分无限维的复 Hilbert 空间，T 是 H 上有界线性算子，是否存在 T 的非平凡的不变子空间. 它是一个著名的公开问题. 若 H 为有限维的复 Hilbert 空间，则 T 必存在特征值 λ，从而 $Ker(T-\lambda I)$ 为 T 的非平凡的不变子空间. 若 H 为不可分无限维的复 Hilbert 空间，取非零元 $x\in H$，令 $M=\overline{span}\{x,Tx,T^2x,\cdots\}$，显然 $M\neq\{0\}$，若 $M=H$，与 H 不可分矛盾，则 M 为 T 的非平凡的不变子空间. 若 H 为可分无限维的复 Hilbert 空间，那么 T 是否存在非平凡的不变子空间呢？这就是我们下面主要讨论的问题.

定义 3.1[1] 设 T 为域 F 上线性空间 V 的线性算子，M 是 V 的子空间. 如果 M 中的元素在 T 的象仍在 M 中，即对于任意 $\alpha\in M$，都有 $T\alpha\in M$，则称 M 是 T 的不变子空间. 若 $M\neq V$ 且 $M\neq\{0\}$,则 M 是 T 的非平凡不变子空间.

引理 3.2 设 H 为可分无限维的复 Hilbert 空间，$T\in B(H),T\neq aI$ ($\forall a\in\mathbb{C}$)，且 $\sigma_p(T)\neq\varnothing$，则 T 有非平凡的不变子空间.

证明：因为 $\sigma_p(T)\neq\varnothing$，取 $\lambda\in\sigma_p(T)$，则 $Ker(T-\lambda I)\neq\{0\}$ 且 $Ker(T-\lambda I)\neq H$. 否则，若 $Ker(T-\lambda I)=\{0\}$，与 $\lambda\in\sigma_p(T)$ 矛盾；若 $Ker(T-\lambda I)=H$，则 $T=\lambda I$；与 $T\neq aI$ 矛盾. 显然，$Ker(T-\lambda I)$ 是 T 的不变子空间. 因此，T 有非平凡的不变子空间.

引理 3.3 设 H 为可分无限维的复 Hilbert 空间，$T\in B(H)$，且 $\|T\|\leq 1$. 若存在正交的两个非零元 $x_0,y_0\in H$，使得 $\mathrm{Re}\left\langle (T-I)^n x_0,y_0\right\rangle\geq 0$，$\mathrm{Im}\left\langle (T-I)^n x_0,y_0\right\rangle\geq 0$，$n=1,2,\cdots$，则 T 有非平凡的不变子空间.

证明：由已知存在非零元 $x_0,y_0\in H$，使得 $\langle x_0,y_0\rangle=0$，

$$\mathrm{Re}\left\langle (T-I)^n x_0,y_0\right\rangle\geq 0,\ \mathrm{Im}\left\langle (T-I)^n x_0,y_0\right\rangle\geq 0,\ n=1,2,\cdots \tag{3.1}$$

可得 $\left\langle (T-I)^n x_0,y_0\right\rangle=0$，$n=1,2,\cdots$. 事实上，若存在 $n_0\geq 1$，使得 $\left\langle (T-I)^{n_0} x_0,y_0\right\rangle\neq 0$，则由（3.1）式，Cauchy-Schwarz 不等式及 $\|T\|\leq 1$，有

$$\|x_0\|\|y_0\|\geq\left|\langle T^n x_0,y_0\rangle\right|=\left|\left\langle (T-I+I)^n x_0,y_0\right\rangle\right|=\left|\left\langle\sum_{i=1}^{n}C_n^i(T-I)^i x_0,y_0\right\rangle\right|$$

$$\geq\mathrm{Re}\left\langle\sum_{i=1}^{n}C_n^i(T-I)^i x_0,y_0\right\rangle=\sum_{i=1}^{n}C_n^i\,\mathrm{Re}\left\langle (T-I)^i x_0,y_0\right\rangle\geq C_n^{n_0}\,\mathrm{Re}\left\langle (T-I)^{n_0} x_0,y_0\right\rangle,$$

同理，可得 $\|x_0\|\|y_0\|\geq\left|\langle T^n x_0,y_0\rangle\right|\geq C_n^{n_0}\,\mathrm{Im}\left\langle (T-I)^{n_0} x_0,y_0\right\rangle$，从而

$$2\|x_0\|\|y_0\| \geq C_n^{n_0}\left[\operatorname{Re}\left\langle (T-I)^{n_0} x_0, y_0\right\rangle + \operatorname{Im}\left\langle (T-I)^{n_0} x_0, y_0\right\rangle\right]$$

又 $\left\langle (T-I)^{n_0} x_0, y_0\right\rangle \neq 0$，$\operatorname{Re}\left\langle (T-I)^{n_0} x_0, y_0\right\rangle \geq 0$，$\operatorname{Im}\left\langle (T-I)^{n_0} x_0, y_0\right\rangle \geq 0$，则 $\operatorname{Re}\left\langle (T-I)^{n_0} x_0, y_0\right\rangle + \operatorname{Im}\left\langle (T-I)^{n_0} x_0, y_0\right\rangle > 0$

由此 $2\|x_0\|\|y_0\| \geq C_n^{n_0}\left[\operatorname{Re}\left\langle (T-I)^{n_0} x_0, y_0\right\rangle + \operatorname{Im}\left\langle (T-I)^{n_0} x_0, y_0\right\rangle\right] \to +\infty (n \to +\infty)$.

这是不可能的. 因此假设不成立，即有$\left\langle (T-I)^{n} x_0, y_0\right\rangle = 0$，$n = 0,1,2,\cdots$.

令 $N = \overline{span}\left\{(T-I)^n x_0, n = 0,1,2,\cdots\right\}$，则$(T-I)N \subset N$，且 $y_0 \perp N$，从而 $N \neq H$ 且 $N \neq \{0\}$. 又 $\forall x \in N$，有 $Tx = (T-I)x + x \in N$，即 $TN \subset N$. 因此，T 有非平凡的不变子空间.

引理 3.4　设 H 为可分无限维的复 Hilbert 空间，$T \in B(H)$，$\sigma_p(T) = \varnothing$，$\lambda \in \sigma_a(T)$，则存在 $x_0 \in H$ 且 $\|x_0\| = 1$，使得$\left\{x_0, (T-\lambda I)x_0, (T-\lambda I)^2 x_0, \cdots, (T-\lambda I)^n x_0, \cdots\right\}$中任意有限个元线性无关.

证明：由已知条件$\sigma_p(T) = \varnothing$ 及 $\lambda \in \sigma_a(T)$，则$T-\lambda I$ 的值域不闭，否则，$T-\lambda I$ 的值域是闭的且为单射，从而 $\lambda \notin \sigma_a(T)$. 因此，$(T-\lambda I)H \neq H$,记 $A = T-\lambda I$,取 $x_0 \in H \setminus AH$ 且 $\|x_0\| = 1$，则 $\left\{A^n x_0, n = 0,1,2,\cdots\right\}$ 中任意有限个元都线性无关. 事实上，若有 $n_1 < n_2 < \cdots < n_m$，使得 $A^{n_1} x_0$，$A^{n_2} x_0$，$\cdots$，$A^{n_m} x_0$ 线性相关，则存在非零数组 $k_1, k_2, \cdots, k_m$，使得 $k_1 A^{n_1} x_0 + k_2 A^{n_2} x_0 + \cdots + k_m A^{n_m} x_0 = 0$，记 $\{k_1, k_2, \cdots, k_m\}$ 中第一个非零元为 k_i $(1 \leq i \leq m)$，则 $k_i A^{n_i} x_0 + k_{i+1} A^{n_{i+1}} x_0 + \cdots + k_m A^{n_m} x_0 = 0$，即 $A^{n_i}\left(k_i x_0 + k_{i+1} A^{n_{i+1}-n_i} x_0 + \cdots + k_m A^{n_m-n_i} x_0\right) = 0$. 由于 $\sigma_p(T) = \varnothing$，从而 $\sigma_p(A) = \varnothing$，则 $k_i x_0 + k_{i+1} A^{n_{i+1}-n_i} x_0 + \cdots + k_m A^{n_m-n_i} x_0 = 0$，即

$$x_0 = -\left(\frac{k_{i+1}}{k_i} A^{n_{i+1}-n_i} x_0 + \cdots + \frac{k_m}{k_i} A^{n_m-n_i} x_0\right),$$

又 $n_1 < n_2 < \cdots < n_m$，则 $x_0 \in AH$，与 x_0 得取法矛盾. 因此，$\left\{A^n x_0, n = 0,1,2,\cdots\right\}$中任意有限个元都线性无关.

引理 3.5　设 H 为可分无限维的复 Hilbert 空间，$T \in B(H)$，$\sigma_p(T) = \varnothing$，$\lambda \in \sigma_a(T)$，记 $S = \dfrac{T-\lambda I}{\|T-\lambda I\|}$,则存在一个有界下三角无穷矩阵 $A = (a_{ij})$，其中 $a_{ij} = \left\langle y_j, S^i x_0\right\rangle$，$x_0 \in H$ 且 $\|x_0\| = 1$，$\|y_i\| = \dfrac{1}{2^i}$，$i = 1,2,3,\cdots$.

证明：由引理 3.4，存在 $x_0 \in H$ 且 $\|x_0\| = 1$，使得

$\{x_0,(T-\lambda I)x_0,(T-\lambda I)^2x_0,\cdots,(T-\lambda I)^n x_0,\cdots\}$ 中任意有限个元线性无关，则 $\{x_0,Sx_0,S^2x_0,\cdots,S^n x_0,\cdots\}$ 中任意有限个元线性无关. 由 Hahn-Banach 定理，存在 $\|y_1\|=\frac{1}{2}$，使得 $\langle y_1,x_0\rangle=0$，$0<\langle y_1,Sx_0\rangle\le\frac{1}{2}$；存在 $\|y_2\|=\frac{1}{2^2}$，使得 $\langle y_2,x_0\rangle=0$，$\langle y_2,Sx_0\rangle=0$，$0<\langle y_2,S^2x_0\rangle\le\frac{1}{2^2}$，$\cdots$，存在 $\|y_n\|=\frac{1}{2^n}$，使得

$$\langle y_n,x_0\rangle=0,\ \langle y_n,Sx_0\rangle=0,\ \cdots,\ \langle y_n,S^{n-1}x_0\rangle=0,\ 0<\langle y_n,S^n x_0\rangle\le\frac{1}{2^n},\ \cdots.$$

$$A=\begin{pmatrix}\langle y_1,Sx_0\rangle & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots\\ \langle y_1,S^2x_0\rangle & \langle y_2,S^2x_0\rangle & 0 & \cdots & 0 & \cdots\\ \langle y_1,S^3x_0\rangle & \langle y_2,S^3x_0\rangle & \langle y_3,S^3x_0\rangle & \cdots & 0 & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \langle y_1,S^nx_0\rangle & \langle y_2,S^nx_0\rangle & \langle y_3,S^nx_0\rangle & \cdots & \langle y_n,S^nx_0\rangle & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix}$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式不等式知，$\sup\limits_{i\ge1}\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{i}\left|\langle y_j,S^i x_0\rangle\right|^2}\le\sup\limits_{i\ge1}\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{i}\|y_j\|^2}=\sup\limits_{i\ge1}\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{i}\left(\frac{1}{2^j}\right)^2}=\sup\limits_{i\ge1}\sqrt{\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^i}{3}}\le2$，因此，$A$ 为有界下三角无穷矩阵.

引理 3.6　设 H 为可分无限维的复 Hilbert 空间，$T\in B(H)$，若 $aT+bI$ 有非平凡的不变子空间，其中 $a\ne0$，$b\in\mathbb{C}$，则 T 有平凡的不变子空间.

证明：设 $aT+bI$ 有非平凡的不变子空间 M，则 $M\ne\{0\}$，$M\ne H$，则对于 $\forall x\in M$，有 $(aT+bI)x\in M$，从而 $aTx\in M$，又 $a\ne0$，则 $Tx\in M$，因此，T 有非平凡的不变子空间.

定理 3.7　设在引理 3.5 的条件下存在一个有界下三角矩阵 $A=(a_{ij})$，若 $A=(a_{ij})$ 在 l^2 中有非平凡的第一象限解，则 T 有非平凡的不变子空间.

证明：记矩阵

$$A=\begin{pmatrix}\langle y_1,Sx_0\rangle & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots\\ \langle y_1,S^2x_0\rangle & \langle y_2,S^2x_0\rangle & 0 & \cdots & 0 & \cdots\\ \langle y_1,S^3x_0\rangle & \langle y_2,S^3x_0\rangle & \langle y_3,S^3x_0\rangle & \cdots & 0 & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \langle y_1,S^nx_0\rangle & \langle y_2,S^nx_0\rangle & \langle y_3,S^nx_0\rangle & \cdots & \langle y_n,S^nx_0\rangle & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix}$$

因为 A 由非平凡的第一象限解，即存在非零 $X=\left(\lambda_i\right)_{i=1}^{\infty}\in l^2$，使得

$$\operatorname{Re}\left\langle AX,e_n\right\rangle\geq 0,\ \operatorname{Im}\left\langle AX,e_n\right\rangle\geq 0,\ n=1,2,3,\cdots. \tag{3.2}$$

记 $Y=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i y_i$，由于 $\left\|\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i y_i\right\|\leq\sum_{i=1}^{\infty}|\lambda_i|\|y_i\|\leq\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\lambda_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\|y_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\|X\|_{l^2}\sqrt{\frac{1}{3}}<+\infty$，故 $Y\in H$. 又 $\left\langle Y,Sx_0\right\rangle=\lambda_1\left\langle y_1,Sx_0\right\rangle\neq 0$，则 $Y\neq 0$,且

$$AX=\begin{pmatrix}\left\langle\lambda_1 y_1,Sx_0\right\rangle\\ \left\langle\lambda_1 y_1+\lambda_2 y_2,S^2x_0\right\rangle\\ \left\langle\lambda_1 y_1+\lambda_2 y_2+\lambda_3 y_3,S^3x_0\right\rangle\\ \vdots\\ \left\langle\sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i,S^nx_0\right\rangle\\ \vdots\end{pmatrix}$$

于是由（3.2）式，有

$\left\langle\sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i,S^nx_0\right\rangle=\left\langle Y,S^nx_0\right\rangle\geq 0$，$n=1,2,\cdots$. 且 $\left\langle Y,x_0\right\rangle=\left\langle\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i y_i,x_0\right\rangle=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\left\langle y_i,x_0\right\rangle=0$，又 $\left\|\frac{S+I}{2}\right\|\leq 1$,由引理 3.3，可得 $\frac{S+I}{2}$ 有非平凡不变子空间，再由引理 3.6 知，T 有非平凡的不变子空间.

4. 总结

本文主要讨论下三角无穷矩阵 A 作为有界线性算子将 l^2 空间中的元素作用到 l^∞ 空间中时所具有的一些性质以及下三角无穷矩阵方程 $AX=Y$（其中 $X\in l^2$，$Y\in l^\infty$）有非平凡第一象限解、c_0 解和 l^2 解的存在性问题， 并探讨下三角无穷矩阵的非平凡第一象限解的存在性与可分无穷维的复 Hilbert 空间上算子具有非平凡不变子空间的关联，得出当 H 为可分无限维的复 Hilbert 空间，$T\in B(H)$，$\sigma_p(T)=\varnothing$，$\lambda\in\sigma_a(T)$，记 $S=\frac{T-\lambda I}{\|T-\lambda I\|}$,则存在一个有界下三角矩阵 $A=(a_{ij})$，若 $A=(a_{ij})$ 在 l^2 中有非平凡的第一象限解，则 T 有非平凡的不变子空间.

参考文献

[1] 丘维声，高等代数（下册）[M]. 北京：高等教育出版社.
[2] 张娅，吴从. 收敛自由空间无穷矩阵变换集的有界性[J]. 黑龙江大学自然科学学报，2007，24：503-507
[3] J.Von Neumann. Charakterisierung des dprvytumd rinrd inyrhtsloprtstors. Herman,Pairs(1935)
[4] N.Aronszajn and K.Smith. Invariant subspaces of completely continuous operators.Annual of Math.(2) 60,1954,345-350
[5] V.I.Lomonosov.Invariant subspaces of the family of operators that commute wiyh a completely continuous operator.(Russian)Funkcional.Anal.Prilozen.7 (1973), no.3, 55-56
[6] Per.Enflo. On the invariant subspace problem for Banach spaces.Acts Math, vol.158(1987),213-3113
[7] C.J.Read. A solution to the invariant subspace problem on the space l^1 .Bull.London Math.Soc.17(1985),no.4,305-317
[8] 张恭庆，林源渠，泛函分析讲义（上册）[M]. 北京：高等教育出版社，2005
[9] 华中理工大学数学系，计算方法[M]. 北京：高等教育出版社，2005
[10]王声望，郑维行，实变函数与泛函分析概要（第 2 册）[M]. 北京：高等教育出版社，2005
[11]胡适耕，泛函分析[M]. 北京：高等教育出版社，2001
[12]蹇人宜，安恒斌，解析函数空间上的算子理论导引[M]. 北京：科学出版社，2007

On the Solution of the Lower Trianglar Infinite Matrix

Huang Baohua

College of Mathematics and Computer Science, Fujian Normal University,Fuzhou(350107)

Abstract

In this paper,,we discuss the property of the lower triangular infinite matrix A which is viewed as bounded linear operator from l^2 to l^∞. In addition,we discuss the existence of nontrivial solution of the first quadrant and solution of c_0.Furthermore,we establish the relationship of the solution of nontrivial solution of the first quadrant of the lower triangular infinite matrix and the infinite dimensional Hilbert space over the complex number field which is sperable and has nontrivial invariant subspace.

Keywords: lower trianggular infinite matrix; bounded linear operator; invariant subspace

作者简介：黄宝华，女，1986 年生，硕士研究生，主要研究方向是泛函分析.