关于双参数算子半群的一些结果

蔡亮，赵贵，卞洪亚
（中国矿业大学理学院，江苏徐州 221008）

摘要：为了丰富半群的理论，在对双参数算子半群概念界定的基础上，本文旨在给出双参数一致(强或弱)连续有界线性算子半群的定义，将单参数半群的一些性质推广到双参数半群，主要得出关于双参数一致连续半群的一些重要的结论，另外还讨论了双参数弱连续半群的有界性。

关键词： 线性算子半群；双参数算子半群；无穷小生成元；一致连续
中图分类号：O177.2

Some results of two-parameter semigroups of operators

CAI Liang, ZHAO Gui, BIAN Hongya
(College of Science, China University of Mining and Technology, Xuzhou , Jiangsu 221008)

Abstract: In order to enrich the theory of semigroups, definition of two-parameter semigroups of operators, the object of this paper is to give a new definition of two-parameter uniformly (strongly or weakly) continuous semigroups of bounded linear operators, and some of one-parameter semigroups properties are generalized to get some properties of two-parameter semigroups, main results of two-parameter uniformly continuous semigroups are obtained, in additional, the boundedness of two-parameter weakly continuous semigroups is also discussed.

Key words: semigroups of linear operators; two-parameter semigroups of operators; infinitesimal generators; uniformly continuous

0 引言

Banach 空间上有界线性算子半群理论是处理无穷维空间中算子方程的主要工具，它在抽象分析及应用数学的各个方面都有着重要的应用。算子半群的理论研究和应用经过了几十年的持续发展，已日趋完善。在 Hill. E 和 Phillips R S 的泛函分析与半群[1]中，作者给出了 N 参数半群的定义，接着 Arora S 和 Sharda S[2]给出了双参数算子半群的定义，接着许多学者[3-5]对双参数算子半群做了进一步的讨论和研究，并得出一些重要的结果。

本文借鉴单参数一致（强、弱）连续半群的定义[6]给出了双参数一致（强、弱）连续半群的概念，证明了弱连续半群的有界性，并将单参数一致连续半群的一些性质推广到双参数一致连续半群。比如，有界线性算子组成的一个二元算子向量（可交换）只能生成唯一的双参数算子半群,双参数一致连续半群无穷小生成元的定义域充满整个 Banach 空间 X 在本文中都得到了证明。

1 基本概念与性质

本文中空间 X 是 Banach 空间，所有的算子都是线性算子，$L(X)$ 表示 X 上有界线性算子全体，$D(A)$ 表示算子 A 的定义域，X 上的有界线性泛函 $x^* \in X^*$ 在 $x \in X$ 处的取值记为 $x^*(x) = (x, x^*) = (x^*, x)$，$R^{+2} = [0,\infty)\times[0,\infty)$。

作者简介：蔡亮（1986-），男，硕士研究生，主要研究方向：泛函分析. E-mail: onlyhhy@126.com

定义 1.1[3] X 上一族算子$\{T(s,t)\}_{s,t\ge 0}\subset L(X)$称为双参数有界线性算子半群，如果其满足：

(1) $T(0,0)=I$

(2) $T((s_1,t_1)+(s_2,t_2))=T(s_1,t_1)T(s_2,t_2)$, $\forall s_1,s_2,t_1,t_2\ge 0$

定义 1.2 X 上一双参数有界线性算子半群$\{T(s,t)\}_{s,t\ge 0}$称为双参数一致（强、弱）连续算子半群，如果算子函数$T(s,t)$在任意的$(s,t)\in R^{+2}$处按一致（强、弱）算子拓扑连续，即

$$\lim_{(\triangle s,\triangle t)\to(0,0)}\left\|T(s+\triangle s,t+\triangle t)-T(s,t)\right\|=0,\ \forall(s,t)\in R^{+2}$$

$$(\text{或}\ \lim_{(\triangle s,\triangle t)\to(0,0)}\left\|T(s+\triangle s,t+\triangle t)x-T(s,t)x\right\|=0,\ \forall(s,t)\in R^{+2},\forall x\in X,$$

$$\lim_{(\triangle s,\triangle t)\to(0,0)}\left\|(x^*,T(s+\triangle s,t+\triangle t)x)-(x^*,T(s,t)x)\right\|=0,\ \forall(s,t)\in R^{+2},\forall x\in X,x^*\in X^*)$$

显然由算子函数的连续性可知，若$\{T(s,t)\}_{s,t\ge 0}$是双参数一致连续半群，则也是强连续半群，若$\{T(s,t)\}_{s,t\ge 0}$是双参数强连续半群，它也是弱连续半群，反之都不一定成立。

定理 1.3[3] X 上双参数半群$\{T(s,t)\}_{s,t\ge 0}$的无穷小生成元是线性变换$L:R^{+2}\to L(X)$，定义为

$$L(a,b)x=\left(A_1,A_2\right)\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}x=aA_1x+bA_2x,\ \forall x\in X,\forall\left(a,b\right)\in R^{+2}$$

其中A_1,A_2分别是单参数线性算子半群$\{T(s,0)\}_{s\ge 0}$和$\{T(0,t)\}_{t\ge 0}$的无穷小生成元，即

$$D(A_1)=\left\{x\in X:\exists\lim_{h\downarrow 0}\frac{T(h,0)x-x}{h}\right\}$$

$$D(A_2)=\left\{x\in X:\exists\lim_{h\downarrow 0}\frac{T(0,h)x-x}{h}\right\}$$

和

$$A_1x=\lim_{h\downarrow 0}\frac{T(h,0)x-x}{h}=\frac{\partial^+}{\partial s}T(s,t)x\Big|_{(s,t)=(0,0)},\ \forall x\in D(A_1)$$

$$A_2x=\lim_{h\downarrow 0}\frac{T(0,h)x-x}{h}=\frac{\partial^+}{\partial t}T(s,t)x\Big|_{(s,t)=(0,0)},\ \forall x\in D(A_2)$$

2 主要结论

定理 2.1 设$\{T(s,t)\}_{s,t\ge 0}$是空间 X 上的双参数弱连续半群，则对任意的$s_1,t_1>0$，存在与s_1,t_1有关的常数$M=M(s_1,t_1)$，使得

$$\left\|T(s,t)\right\|\le M,\ (s,t)\in\left[0,s_1\right]\times\left[0,t_1\right].$$

证明 设$\{T(s,t)\}_{s,t\ge 0}$是空间 X 上的双参数弱连续半群，则显然$\{T(s,0)\}_{s\ge 0}$和$\{T(0,t)\}_{t\ge 0}$是 X 上的单参数弱连续半群，根据定理 2.1.4[6]，知对任意的$s_1,t_1>0$，存在与s_1,t_1有关的常数$M(s_1),M(t_1)$，使得

$$\|T(s,0)\| \le M(s_1),\ s\in[0,s_1] \text{和} \|T(0,t)\| \le M(t_1),\ t\in[0,t_1]$$

于是有

$$\|T(s,t)\| \le \|T(s,0)\|\cdot\|T(0,t)\| \le M(s_1)M(t_1) = M(s_1,t_1),\ (s,t)\in[0,s_1]\times[0,t_1].$$

定理 2.2 若双参数算子半群$\{T(s,t)\}_{s,t\ge 0}$在$(s,t)=(0,0)$处按一致（强，弱）算子拓扑连续，则该半群是双参数一致（强、弱）连续算子半群。

证明 本文只证明一致连续的情况，其它两种情况的证明过程类似。

设$\{T(s,t)\}_{s,t\ge 0}$是双参数线性算子半群，在$(s,t)=(0,0)$处按一致算子拓扑连续，则$\{T(s,0)\}_{s\ge 0}$和$\{T(0,t)\}_{t\ge 0}$是单参数线性算子半群且都在$(0,0)$处按一致算子拓扑连续。根据定理 2.1.5[6],得对任意$s,t\ge 0$有

$$\lim_{\vartriangle s\to 0}\|T(s+\vartriangle s,0)-T(s,0)\|=0$$

和

$$\lim_{\vartriangle t\to 0}\|T(0,t+\vartriangle t)-T(0,t)\|=0$$

并且根据推论 1.4(a) [7] ，存在着常数$\omega_1,\omega_2\ge 0$使得$\|T(s,0)\|\le e^{\omega_1 s},\|T(0,t+\vartriangle t)\|\le e^{\omega_2(t+\vartriangle t)}$ $\forall s,t+\vartriangle t\ge 0$ 。

任取$s,t,\vartriangle s,\vartriangle t\in R$，满足$s,t,s+\vartriangle s,t+\vartriangle t\ge 0$，则有

$$\begin{aligned}\|T(s+\vartriangle s,t+\vartriangle t)-T(s,t)\| &= \|T(s+\vartriangle s,0)T(0,t+\vartriangle t)-T(s,0)T(0,t)\|\\ &\le \|T(s+\vartriangle s,0)T(0,t+\vartriangle t)-T(s,0)T(0,t+\vartriangle t)\|\\ &\quad+\|T(s,0)T(0,t+\vartriangle t)-T(s,0)T(0,t)\|\\ &\le \|T(0,t+\vartriangle t)\|\|T(s+\vartriangle s,0)-T(s,0)\|\\ &\quad+\|T(s,0)\|\|T(0,t+\vartriangle t)-T(0,t)\|\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\|T(s+\vartriangle s,t+\vartriangle t)-T(s,t)\| &\le e^{\omega_2(t+\vartriangle t)}\|T(s+\vartriangle s,0)-T(s,0)\|+e^{\omega_1 s}\|T(0,t+\vartriangle t)-T(0,t)\|\\ &\to 0\ \ ((\vartriangle s,\vartriangle t)\to(0,0))\end{aligned}$$

由上面证明可知$T(s,t)$在$\forall(s,t)\in R^{+2}$处按一致算子拓扑连续，由s,t的任意性可知$\{T(s,t)\}_{s,t\ge 0}$是双参数一致连续算子半群。

由定理 2.2 知，今后验证双参数算子半群$\{T(s,t)\}_{s,t\ge 0}$是一致（强、弱）连续，只需验证它在$(0,0)$处的连续性即可。

定理 2.3 设$\{T(s,t)\}_{s,t\ge 0}$是X上的双参数一致连续半群，其无穷小生成元是(A_1,A_2)，则有$D((A_1,A_2)\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix})=X,\forall(a,b)\in R^{+2}$ 。

证明 设(A_1,A_2)是X上双参数一致连续半群$\{T(s,t)\}_{s,t\ge 0}$的无穷小生成元，则$\{T(s,0)\}_{s\ge 0}$和$\{T(0,t)\}_{t\ge 0}$是单参数一致连续半群，并且A_1和A_2分别是它们的无穷小生成元，根据推论 1.4 (b)(c)[7] ,知

$D(A_1)=D(A_2)=X$，于是$D((A_1,A_2)\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix})=D(aA_1+bA_2)=D(A_1)\bigcap D(A_2)=X$，证毕。

定理 2.4 设$\{T(s,t)\}_{s,t\ge0}$和$\{S(s,t)\}_{s,t\ge0}$是两个双参数一致连续半群，如果

$$\lim_{h\downarrow0}\frac{T(h,0)-I}{h}=A_1=\lim_{h\downarrow0}\frac{S(h,0)-I}{h}$$

和

$$\lim_{h\downarrow0}\frac{T(0,h)-I}{h}=A_2=\lim_{h\downarrow0}\frac{S(0,h)-I}{h}$$

则$T(s,t)=S(s,t)$, $\forall s,t\ge0$。

证明 由条件易知$\{T(s,0)\}_{s\ge0}$和$\{S(s,0)\}_{s\ge0}$都是单参数一致连续半群，且$\lim_{h\downarrow0}\frac{T(h,0)-I}{h}=A_1=\lim_{h\downarrow0}\frac{S(h,0)-I}{h}$，由定理 1.3[7]，知$T(s,0)=S(s,0)$, $\forall s\ge0$成立，同理证得$T(0,t)=S(0,t)$, $\forall t\ge0$，于是对$\forall s,t\ge0$有

$$T(s,t)=T(s,0)T(0,t)=S(s,0)S(0,t)=S(s,t)$$

成立，定理证毕。

定理 2.5 双参数有界线性算子半群$\{T(s,t)\}_{s,t\ge0}$一致连续的充要条件是它的无穷小生成元$A=(A_1,A_2)$中A_1和A_2是X上的有界线性算子且A_1和A_2可交换。

分析: 根据定理 2.9[3]，知只需在证明定理的充分性时加上下面定理 2.6 的证明即可。

定理 2.6 设算子向量$A=(A_1,A_2)$是双参数算子半群$\{T(s,t)\}_{s,t\ge0}$和双参数一致连续算子半群$\{S(s,t)\}_{s,t\ge0}$的无穷小生成元，则有$T(s,t)=S(s,t)$, $\forall s,t\ge0$。

证明 由条件易知线性算子A_1是单参数算子半群$\{T(s,0)\}_{s\ge0}$和单参数一致连续半群$\{S(s,0)\}_{s\ge0}$的无穷小生成元，则$D(A_1)=X$，考虑映射$s\to T(s,0)S(t-s,0)x$，故对任意的$x\in X$有

$$\begin{aligned}\frac{d^+T(s,0)x}{ds}&=\lim_{h\downarrow0}\frac{T(s+h,0)-T(s,0)}{h}x=\lim_{h\downarrow0}\frac{T(h,0)-I}{h}T(s,0)x\\&=A_1T(s,0)x\\&=\lim_{h\downarrow0}T(s,0)\frac{T(h,0)-I}{h}x\\&=T(s,0)A_1x\end{aligned}$$

下面证明$\frac{d^-T(s,0)x}{ds}=A_1T(s,0)x$，为此对$s>0$，取$h$充分小，使得$s-h>0$，由定理 2.1.4[6]，对任意的$s>0$，存在与$s$有关的常数$M=M(s)$使得

$$\|T(s-h)\|\le M\ ,\ s-h\in[0,s]$$

则

$$\left\|\frac{T(s,0)x-T(s-h,0)x}{h}-A_1T(s,0)x\right\| \le \left\|T(s-h,0)[\frac{T(h,0)x-x}{h}-A_1x]\right\| + \left\|T(s-h,0)A_1x-T(s,0)A_1x\right\|$$
$$\le M(s)\left\|\frac{T(h,0)x-x}{h}-A_1x\right\| + \left\|T(s-h,0)A_1x-T(s,0)A_1x\right\| \to 0 \ \ (h\downarrow 0)$$

从而$\frac{d^-T(s,0)x}{ds}=A_1T(s,0)x$，因此$\frac{dT(s,0)x}{ds}=A_1T(s,0)x=T(s,0)A_1x$。

由上式可得

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}[T(s,0)S(t-s,0)x] &= (\frac{d}{ds}T(s,0))\cdot S(t-s,0)x+T(s,0)\cdot\frac{d}{ds}S(t-s,0)x\\ &= A_1T(s,0)S(t-s,0)x+T(s,0)\cdot(-A_1)S(t-s,0)x\\ &=0\end{aligned}$$

从而$T(s,0)S(t-s,0)x$是X中的常值函数，取$s=0$和$s=t$，可得$T(t,0)=S(t,0),t\ge 0$，同理可证$T(0,t)=S(0,t),t\ge 0$，于是

$$T(s,t)=T(s,0)T(0,t)=S(s,0)S(0,t)=S(s,t)\,,\ \forall s,t\ge 0$$

定理证毕。

从定理 2.6 可以看出有界线性算子只能生成唯一的一致连续半群，若$\{T(s,t)\}_{s,t\ge 0}$是双参数一致连续半群，则存在唯一的$A_1,A_2\in L(X)$使得算子向量(A_1,A_2)是半群$\{T(s,t)\}_{s,t\ge 0}$的无穷小生成元，并且有$T(s,t)=e^{sA_1}e^{tA_2}$，此时可以看出$T(s,t)$在空间$L(X)$中无穷次偏可导，且有下面的结论成立。

定理 2.7 设$\{T(s,t)\}_{s,t\ge 0}$是X上的双参数一致连续半群，则$T(s,t)$在空间$L(X)$中无穷次可微，并且有

$$\left(\frac{\partial^n}{\partial s^n}T(s,t),\frac{\partial^m}{\partial s^m}T(s,t)\right)\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\left(A_1^{\ n},A_2^{\ m}\right)\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}T(s,t)=aT(s,t)(A_1^{\ n}+A_2^{\ m}),\ \forall m,n\in N^*$$

成立。

证明 根据定理 2.10(iv)[3]易证此定理。

3 结论

本文给出了双参数一致（强、弱）连续算子半群的定义，将单参数算子半群的一些结论推广到双参数一致连续半群，得到双参数一致连续半群的无穷小生成元的特征。本文还证明了双参数弱连续算子半群的有界性。

[参考文献] (References)

[1] HILLE E, PHILLIPS R S. Functional analysis and semigroups[M]. New York: Am Math Soc Colloq Public, 1997.

[2] ARORA S, SHARDA S. On two parameter semigroups of operators, lecture notes in mathematics[C]// Proceeding of a Conference held in Memory of U. N. Singh. New Delhi: University of Delhi,1990.

[3] SHARIF A S, KHALIL R. On the generator of two parameter semigroups[J]. Applied Mathematics and Computation, 2004, 156(2):403-414.

[4] LAWSON J A, ROBBIE D A. Two-parameter semigroups[J]. Semigroups forum, 2006,72(1): 15-35.

[5] 赵月英，宋晓秋，邓芳.完全连续的双参数 C_0 半群[J].临沂师范学院学报，2009，31(3):26-28.

ZHAO Y Y, SONG X Q, DENG F. Completely continuous of Two-parameter C_0 Semigroups[J]. Journal of Linyi Normal University, 2009,31(3):26-28.

[6] 周鸿兴，王连文.线性算子半群理论及应用[M].山东：山东科学技术出版社，1994.

ZHOU H X, WANG L W. Semigroup theory of linear operators and its applications[M]. Shandong: Shandong Science and Technology Press, 1994.

[7] PAZY A. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations [M].New York: Springer Verlag,1983.