关于算子半群无穷小生成元特征证明的一个细节

禹晓红，李玉霞，蔡亮
（中国矿业大学理学院，江苏 徐州 221008）

摘要：在证明广泛应用的算子半群生成元的特征时，需要对定理 2.4 的(2)有很好的理解，而在一些有界线性算子半群的书中，对该结论的证明比较粗略、复杂，本文利用 Gamma 函数的知识对上式进行了较为详细的证明，希望对学习和研究有界线性算子强连续半群无穷小生成元的特征起到积极地作用。

关键词：格马(Gamma)函数；有界线性算子强连续半群；Hille-Yosida 定理；算子半群的无穷小生成元

中图分类号：0177.2

A Detail in the Proof of the Feature of the Infinitesimal Generators of Operator Semigroups

Yu Xiaohong, Li Yuxia, Cai Liang
(College of Science,China University of Mining and Technology,JiangSu XuZhou 221008)

Abstract: In testimony to the wide application of semigroup features, a good understanding of (2) in theorem 2.4 is required. In some books concerning semigroups of bounded linear operators, the proof of the formula is sketchy and complex. With the knowledge of Gamma function, the paper proves it in a more elaborate way , in hope of contributing to the learning and researching the feature of the Infinitesimal generators of strongly continuous semigroups of bounded linear operators operator semigroups.

Keywords: Gammafunction;strongly continuous semigroups of bounded linear operators; Hille-Yosida theorem; the infinitesimal generator of operator semigroups

0 引言

在讨论算子半群的生成问题时，给出了非常重要的 Hille-Yosida 定理，由 Hille-Yosida 定理可以看出 c_0 半群 $T(t)$ 与其生成元 A 之间具有非常明显的依赖关系，因此学习和研究 c_0 半群无穷小生成元的特征就变得尤为的重要。本文总结了 c_0 半群无穷小生成元的一些基本性质，并且利用 Γ 函数对定理 2.4 的结论(2)进行了较为细致的证明。

1 基本概念和性质

在本文中，除非特别说明，一般用 X 表示一般的 Banach 空间。

定理 1.1[5] 含参量积分：$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}dx, s>0$ 为欧拉积分的一种，称为格马函数(Gamma)函数。写作 Γ 函数。

注：(1) Γ 函数满足 $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$

(2)当 s 为正整数 n 的时候，$\Gamma(n)=\int_0^{+\infty}t^{n-1}e^{-t}dt=(n-1)!, \Gamma(n+1)=n!$

作者简介：禹晓红（1985-），女，硕士研究生，主要研究方向：泛函分析. E-mail: theyuxiaohong@126.com

定理 1.2[2] 一个 X 上的有界线性算子半群$T(t)$，0≤t<∞称为有界线性算子强连续半群，如果

$\lim\limits_{t\to 0^+} T(t)x = x$，对一切 x∈X 成立

一个 X 上的有界线性算子强连续半群将称为一个c_0类半群，简称c_0半群。

定理 1.3[2] 设$T(t)$为c_0半群，存在常数$\omega \geq 0$和$M \geq 1$，使得$\|T(t)\| \leq Me^{wt}$，对一切$t \geq 0$成立，如果$\omega = 0$，且$M = 1$即$\|T(t)\| \leq 1$时，称$T(t)$是c_0收缩半群。

定理 1.4[2] 定义线性算子A如下：命

$$D(A) = \left\{x \in X : \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{存在}\right\}$$和对于$x \in D(A)$，

有$Ax = \lim\limits_{t\to 0+} \dfrac{T(t)x - x}{t} = \dfrac{d^+T(t)x}{dt}\Big|_{t=0}$，称$A$是半群$T(t)$的无穷小生产元。

定理 1.5[1] 有界线性算子族$R(\lambda; A) = (\lambda I - A)^{-1}, \lambda \in \rho(A)$,称为$A$的预解式。

注：$\rho(A)$是使$(\lambda I - A)$可逆的一切复数λ的集合。

定理 1.6[2] 若$\lambda, \mu \in \rho(A)$，则我们有预解恒等式

$$R(\lambda; A) - R(\mu; A) = (\mu - \lambda) R(\lambda; A) R(\mu; A)$$

2 主要结论

定理 2.1[1] (Hille-Yosida)一个线性(无界)算子A是c_0收缩半群$T(t), t \geq 0$的无穷小生产元当且仅当

A是闭的，且$\overline{D(A)} = X$。

A是预解集$\rho(A)$包含R^+，且对每一个$\lambda \geq 0$，$\|R(\lambda; A)\| \leq \dfrac{1}{\lambda}$。

推论 2.1[1] 设A是c_0收缩半群$T(t)$的无穷小生产元。则A的预解集包含开的右半平面，即$\rho(A) \supseteq \{\lambda : \mathrm{Re}\,\lambda > 0\}$，且对这样的$\lambda$有$\|R(\lambda; A)\| \leq \dfrac{1}{\mathrm{Re}\,\lambda}$。

注：为了在一般情形下刻画无穷小生产元的特征，通过对 Banach 空间重新赋予范数，在这样的新范数下，一致有界c_0半群变成一个c_0收缩半群，进而研究其对应的无穷小生产元的特征。

定理 2.2[1] 线性算子A是一个满足$\|T(t)\| \leq M \, (M \geq 1)$的$c_0$半群$T(t)$的无穷小生产元的当且仅当

(1) A是闭的，且$\overline{D(A)} = X$。

(2) A的预解集$\rho(A)$包含R^+，且对$\lambda > 0$，$\|R(\lambda; A)^n\| \leq \dfrac{M}{\lambda^n}, n = 1, 2 \cdots$。

定理 2.3[1] 线性算子A是一个满足$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$的$c_0$半群$T(t)$的无穷小生产元的当且仅当

(1) A是闭的，且$\overline{D(A)} = X$。

A 的预解集 $\rho(A)$ 包含射线 (ω,∞)，且对 $\lambda>\omega$，$\left\|R(\lambda;A)^n\right\|\le\frac{M}{(\lambda-\omega)^n},n=1,2\cdots$ 成立。

注：定理 2.3 中的 λ 是实数范围的，下面给出更一般的复数范围 λ 的情形，并对 $\left\|R(\lambda;A)^n\right\|\le\frac{M}{(\mathrm{Re}\lambda-\omega)^n}$，对于 $\mathrm{Re}\lambda>\omega,n=1,2\cdots$ 成立，给出较为详细的证明。

定理 2.4 线性算子 A 是一个满足 $\left\|T(t)\right\|\le Me^{\omega t}$ 的 c_0 半群 $T(t)$ 的无穷小生产元的当且仅当

(1) A 是闭的，且 $\overline{D(A)}=X$。

(2) A 的预解集 $\rho(A)$ 包含射线 (ω,∞)，且对 $\mathrm{Re}\lambda>\omega$，$\left\|R(\lambda;A)^n\right\|\le\frac{M}{(\mathrm{Re}\lambda-\omega)^n},n=1,2\cdots$ 成立。

注：该定理中其他一些相关证明已在一些线性算子半群的相关书籍中给出，本文已作标记，这里就不再证明，下仅对 $\left\|R(\lambda;A)^n\right\|\le\frac{M}{(\mathrm{Re}\lambda-\omega)^n}$，对于 $\mathrm{Re}\lambda>\omega,n=1,2\cdots$ 成立，给出较为详细的证明。

证明：我们定义 $R(\lambda)x=\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt$

因为 $\left\|T(t)\right\|\le Me^{\omega t}$，所以对一切满足 $\mathrm{Re}\lambda>\omega$ 的 λ，$\mathrm{R}(\lambda)$ 是可定义的，且 $\mathrm{R}(\lambda)=R(\lambda;A)$，为了证明上式，我们设 $\mathrm{Re}\lambda>\omega$，则

$$\frac{d}{d\lambda}R(\lambda;A)x=\frac{d}{d\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt=-\int_0^\infty te^{-\lambda t}T(t)xdt$$

通过归纳法我们得到

$$\frac{d^n}{d\lambda^n}R(\lambda;A)x=(-1)^n\int_0^\infty t^ne^{-\lambda t}T(t)xdt \qquad (1)$$

另一方面，由预解恒等式 $R(\lambda;A)-R(\mu;A)=(\mu-\lambda)R(\lambda;A)R(\mu;A)$ 得知对一切 $\lambda\in\rho(A),\lambda\to R(\lambda;A)$ 是解析的，且

$$\frac{d}{d\lambda}R(\lambda;A)=-R(\lambda;A)^2$$

再通过归纳法我们有

$$\frac{d^n}{d\lambda^n}R(\lambda;A)=(-1)^n n!R(\lambda;A)^{n+1} \qquad (2)$$

比较(1)和(2)得

$$R(\lambda;A)^n x=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-\lambda t}T(t)xdt$$

因此两边取范数得 $\left\|R(\lambda;A)^n x\right\|=\left\|\frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-\lambda t}T(t)xdt\right\|$

$$\le\frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty\left\|t^{n-1}e^{-\lambda t}T(t)x\right\|dt$$

$$\le \frac{1}{(n-1)!}\int_0^{\infty}\left\|t^{n-1}e^{-\lambda t}T(t)\right\|\|x\|dt$$

$$\le \frac{1}{(n-1)!}\int_0^{\infty}\left|t^{n-1}e^{-\lambda t}Me^{\omega t}\right|\|x\|dt$$

当 λ 为复数时 $\left|e^{-\lambda t}\right| = \left|e^{-(\mathrm{Re}\lambda + i\,\mathrm{Im}\lambda)t}\right| = \left|e^{-t\mathrm{Re}\lambda}\cdot e^{-it\mathrm{Im}\lambda}\right| = \left|e^{-t\mathrm{Re}\lambda}\right|\cdot\left|e^{-it\mathrm{Im}\lambda}\right| = e^{-t\mathrm{Re}\lambda}$

故 $$\frac{1}{(n-1)!}\int_0^{\infty}\left|t^{n-1}e^{-\lambda t}Me^{\omega t}\right|\|x\|dt \le \frac{1}{(n-1)!}\int_0^{\infty}\left|t^{n-1}\right|\cdot\left|e^{-\lambda t}\right|\cdot\left|Me^{\omega t}\right|\|x\|dt$$

$$\le \frac{1}{(n-1)!}\|x\|\int_0^{\infty}t^{n-1}e^{-t\mathrm{Re}\lambda}Me^{\omega t}dt$$

$$\le \frac{1}{(n-1)!}\|x\|\int_0^{\infty}t^{n-1}Me^{-(\mathrm{Re}\lambda-\omega)t}dt$$

$$\le \frac{M}{(n-1)!}\|x\|\int_0^{\infty}((\mathrm{Re}\lambda-\omega)t)^{n-1}e^{-(\mathrm{Re}\lambda-\omega)t}d(\mathrm{Re}\lambda-\omega)t$$

$$\frac{M}{(n-1)!}\|x\|\int_0^{\infty}((\mathrm{Re}\lambda-\omega)t)^{n-1}e^{-(\mathrm{Re}\lambda-\omega)t}d(\mathrm{Re}\lambda-\omega)t = \frac{M}{(n-1)!}\cdot\Gamma(n)\cdot\frac{1}{(\mathrm{Re}\lambda-\omega)^n}\cdot\|x\|$$

$$=\frac{M}{(n-1)!}\cdot(n-1)!\cdot\frac{1}{(\mathrm{Re}\lambda-\omega)^n}\cdot\|x\|$$

$$=\frac{M}{(\mathrm{Re}\lambda-\omega)^n}\cdot\|x\|$$

从而得证 $\left\|R(\lambda;A)^n x\right\| \le \frac{M}{(\mathrm{Re}\lambda-\omega)^n}\cdot\|x\|$

3 总结

本文给出了关于 c_0 半群无穷小生成元特征的一些基本性质，并且利用 Γ 函数的知识对定理 2.4 的结论(2)进行了较为细致的证明，帮助初学和正在学习算子半群的读者更加容易把握这些重要的结论。顺便指出本文的不足之处，因能力有限本文未能赋以实例介绍这些性质在算子半群理论中的应用，尚需在今后的学习和研究中不断地积累和总结。

[参考文献] (References)

[1] Pazy A. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations [M].New York: Springer Verlag,1983.
[2] 周鸿兴，王连文.线性算子半群理论及应用[M].山东：山东科学技术出版社，1994.
ZHOU H X, WANG L W. Semigroup theory of linear operators and its applications[M]. Shandong: Shandong Science and Technology Press, 1994.
[3] Augus E. Taylor, David C. Introduction to functional analysis [M]. New York: John Wiley Sons, 1989.
[4] 彭济根，艾文宝. 关于 Hille-Yosida 条件的等价刻画**[J]**. 数学研究与评论, 1998,(01)
[5] 华东师范大学数学系. 数学分析**[M]** . 北京: 高等教育出版社,2001
[6] 程其襄，张奠宙，等. 实变函数与泛函分析基础[M]. 北京：高等教育出版社，2003.
CHEN Q X，ZHANG D Z，et al. The basis real variable and functional analysis [M].Beijing: Higher Education Press, 2003.
[7] 许天周. 应用泛函分析[M]. 北京：科学出版社，2002.
XU T Z. Applied Functional Analysis [M]. Beijing: Science Press, 2002.
[8] 王声望，郑维行. 实变函数与泛函分析概要[M]. 北京：高等教育出版社，2007.
WANG S W, ZHENG W X. Real analysis and functional analysis [M]. Beijing: Higher Education Press, 2007.