连接函数(Copula)理论及应用

刘汉伟
暨南大学经济学院，广州(510632)
E-mail：jinmu18@sina.com

摘 要：介绍连接函数(Copula)产生的背景条件;然后对连接函数的性质作进一步探讨,并对其分类进行较详细的介绍,比较各个函数的性质;最后对其在金融风险等各方面的应用作介绍.

关键词：Copula，Sklar's 定理，Frechet-Hoeffding bounds，金融风险
中图分类号：O212

1. 引 言

1959 年Sklar提出可以将一个联合分布分解为k个边缘分布和一个Copula函数[1],这个Copula函数描述了变量间的相关性. Copula一词是法语[3]，原意是连接、交换，它是把多个随机变量$\xi_1,\Lambda\ ,\xi_n$联合分布函数$F(\xi_1,\Lambda\ ,\xi_n)$与各自的边缘分布$F_{\xi 1_1}(x_1)$，…，$F_{\xi n}(x_n)$相连接，即连接函数$C(\xi_1,\Lambda\ ,\xi_n)$使

$$F(\xi_1,\Lambda\ ,\xi_n)=C(F_{\xi_1}(x_1),\Lambda\ ,F_{\xi_{n1}}(x_n))$$

等式成立。它是$F(\xi_1,\Lambda\ ,\xi_n)$与$F\left\{F_{\xi_i}(x_i)\right\}$的连接函数。可以这样证明，在很一般的条件下，上式中的多元函数$C(\xi_1,\Lambda\ ,\xi_n)$是存在的，它就是 copula 函数，将多维分布与一元边缘分布联系在一起的函数。

2. Copula 函数

2.1 定义

Nelsen（1998）给出了连接函数（Copula）严格的数学定义[1]：

定义 1：n维连接函数是一个满足如下的函数C：

⑴ 定义域是：$[0,1]^n$；

⑵ C有基面且是$N-$维增函数；

⑶ 对任意的$u\in I$，C的边缘函数满足$C_n(1,1,\Lambda\ ,u,\Lambda\ ,1)=u$。

2.2 Sklar's 定理[4]

假设F是一个n维分布函数有边缘分布$F_1,\Lambda\ ,F_n$，则存在一个n维连接函数C使得对任意$x\in\overline{R}^n$，$F(\xi_1,\Lambda\ ,\xi_n)=C(F_{\xi_1}(x_1),\Lambda\ ,F_{\xi_{n1}}(x_n))$。如果$F_1,\Lambda\ ,F_n$都是连续的，那么$C$是唯一的。否则，$C$在值域$RanF_1\times RanF_2\Lambda\ RanF_n$是唯一的。相反的，若$C$是$n$维 copula 函数，$F_1,\Lambda\ ,F_n$是分布函数，则上述定义的函数$F$是边缘分布函数为$F_1,\Lambda\ ,F_n$的$n$维函数。

2.3 对偶 copula[2]

一个二元函数$\overline{C}$称为C的对偶 copula,如果

$$\forall (x,y)\in R^2,\ \overline{C}(F(x),G(y)) = P(X \le x 或 Y \le y)$$

由 Sklar's 定理有 $C(F(x),G(y)) = P(X \le x, Y \le y)$，因此可用 copula C 的函数表示其对偶的 copula $\overline{C}$:

$$\begin{aligned}\overline{C}(F(x),G(y)) &= P(X \le x 或 Y \le y)\\ &= P(X \le x) + P(Y \le y) - P(X \le x, Y \le y)\\ &= F(x) + G(y) - C(F(x),G(y))\end{aligned}$$

令 $u = F(x), v = G(y)$，则有 $\overline{C}(u,v) = u + v - C(u,v)$

2.4 Copula 函数的基本性质

以二元 copula 函数 $C(u,v)$ 为例说明 Copula 函数的基本性质：

⑴ 对于变量 u 和 v ，$C(u,v)$ 都是递增的；即若保持一个边缘分布不变，联合分布将随着另一个边缘分布的增大而增大；

⑵ $c(u,0) = c(0,v) = 0$，$c(u,1) = u, c(1,v) = v$ ，对每个 $u,v \in [0,1]$；即只要有一个边缘分布的发生概率为 0，相应的联合分布的发生概率就为 0; 若有一个边缘分布的发生概率为 1，则联合分布由另一个边缘分布给出；

⑶ $c(u_2,v_2) - c(u_2,v_1) - c(u_1,v_2) + c(u_1,v_1) \ge 0$，

对每个 $o \le u_1 \le u_2 \le 1, o \le v_1 \le v_2 \le 1$,即若边缘分布 u，v 的值同时增大，则相应的联合分布的值也增大；

⑷ 对任意的 u_1，u_2，v_1，$v_2 \in [0,1]$，有 $\left|C(u_{2,}v_{2,}) - C(u_{1,}v_1)\right| \le \left|u_2 - u_1\right| + \left|v_2 - v_1\right|$；

证明：由 $C(u_1,v_1) - C(u_2,v_2) = C(u_1,v_1) - C(u_2,v_1) + C(u_2,v_1) - C(u_2,v_2)$ ，再由性质⑴对 $u_1 \pi u_2$，有 $0 \le C(u_2,v) - C(u_1,v) \le u_2 - u_1$，可得.

⑸ 若 u，v 独立，则 $C(u,v) = uv$ 。

其中性质 ⑴、⑵、⑸可以扩展到三维甚至更高维的情况，但性质 ⑶、⑷只在二维情况下才成立。

2.5 Frechet-Hoeffding bounds[5]

2.5.1 Bivarite case

任意随机变量 U，V 服从 $U[0,1]$

若 U，V 独立，则 copula $\prod(u,v) = uv$

若 $W = \max(u + v - 1, 0)$，$M = \min(u,v)$，则在 X^2 上 $W \le c \le M$，其中 W 是 Frechet 下界，M 是 Frechet 上界.

2.5.2 Multivariate case

U_1, Λ, U_d 一致服从 $U[0,1]$ ，当 $U_1 = \Lambda = U_d$ 时，得

$$M(u_1,\Lambda,u_d) = \min(u_1,\Lambda,u_d);$$

$$W(u_1,\Lambda,u_d) = \max(u_1 + \Lambda + u_d - d + 1, 0)$$

2.6 Tail dependence

在实际应用中，Tail dependence 是一个很重要的性质，尤其相依类型是可能的情况.

定义: 联合生存函数 $\bar{C}(u,v)=1-u-v+C(u,v)$[8]

(1) 一个copula函数 $C(u,v)$ 有左尾相依 [6]， 如果 $\lambda_l=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{c(u,u)}{u}\ \phi\ 0$

(2) 一个 copula 函数 $C(u,v)$ 有右尾相依，如果 $\lambda_r=\dfrac{\bar{C}(u,u)}{1-u}\ \phi\ 0$

3. copula 函数的分类

3.1 多元正态 copula 函数(Multivariate gaussian Copula-MVN)

Nelson(1998)给出了多元正态 Copula 函数的定义[1],多元正态 Copula 分布函数和密度函数的表达式分别为：

$$C(u_1,\Lambda\ ,u_n,\Lambda\ u_N;\rho)=\Phi_\rho(\Phi_\rho{}^{-1}(u_1),\Lambda\ ,\Phi_\rho{}^{-1}(u_n),\Lambda\ \Phi_\rho{}^{-1}(u_N))$$

$$c(u_1,\Lambda\ ,u_n,\Lambda\ u_N;\rho)=|\rho|^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\zeta^T(\rho^{-1}-I)\zeta\right)$$

其中 ρ 为对角线上的元素为 1 的对称正定矩阵，ρ 的值越大相依性越大；$|\rho|$ 表示与矩阵 ρ 相对应的行列式的值，Φ_ρ 表示相关系数矩阵为 ρ 的标准多元正态分布，$\Phi^{-1}(\cdot)$ 表示标准正态分布函数的逆函数；$\zeta_n=\Phi^{-1}(u_n)$，I 为单位矩阵。

对两元情形，copula 可以表示为

$$C^{Ga}{}_{\rho_l}(u,v)=\int_{-\infty}^{\phi^{-1}(u)}\int_{-\infty}^{\phi^{-1}(v)}\frac{1}{2\pi(1-\rho_l{}^2)^{1/2}}\left\{-\frac{s^2-2\rho_l st+t^2}{2(1-\rho_l{}^2)}\right\}dsdt$$

对于所有的椭圆分布，我们有下列关系式：

$$\rho=\sin(\frac{\pi}{2}\tau)$$

3.2 多元 t－copula 函数(Multivariate Student's Copula-MVT)

Nelson(1998)给出多元t－copula函数和密度函数[1]的表达式为

$$C(u_1,\Lambda\ ,u_n,\Lambda\ u_N;\rho,v)=T_{\rho,v}(T_v{}^{-1}(u_1),\Lambda\ ,T_v{}^{-1}(u_n),\Lambda\ T_v{}^{-1}(u_N))$$

$$c(u_1,\Lambda\ ,u_n,\Lambda\ u_N;\rho,v)=|\rho|^{-\frac{1}{2}}\frac{\Gamma(\frac{v+N}{2})\left(\Gamma(\frac{v}{2})\right)^N\left(1+\frac{\zeta^{-1}\rho^{-1}\zeta}{v}\right)^{-\frac{v+N}{2}}}{\left(\Gamma(\frac{v+1}{2})\right)^N\Gamma(\frac{v}{2})\prod_{n=1}^N\left(1+\frac{\zeta_n{}^2}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}}}$$

其中 ρ 为对角线上的元素为 1 的对称正定矩阵,$|\rho|$ 表示与矩阵 ρ 相对应的行列式的值,$T_{\rho,v}$ 表示相关系数为 ρ，自由度为 v 的标准多元 t 分布，$t_v{}^{-1}(\cdot)$ 为自由度为 v 的一元 t 分布逆函

数$\zeta_n = t^{-1}{}_v(u_n)$。

对两元情形，copula 可以表示为

$$C^t{}_{v,\rho_l}(u,v) = \int_{-\infty}^{t^{-1}{}_v(u)} \int_{-\infty}^{t^{-1}{}_v(v)} \frac{1}{2\pi\ (1-\rho_l{}^2)^{1/2}} \left\{1 + \frac{s^2 - 2\rho_l st + t^2}{v(1-\rho_l{}^2)}\right\}^{-(v+2)/2} dsdt$$

其中 ρ_l 是相关系数.

自由度为v的多元 t－copula 函数的密度函数为：

$$f(x) = \frac{\tau[(v+p)/2]}{(\pi v)^{p/2}\tau(v/2)}|\Sigma|^{-1/2}\left[1 + v^{-1}(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)\right]^{-(v+p)/2}，\text{其中}\ \ v \phi 0$$

这个分布可由下个变换得到：

$$X = \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{s}}z + \mu，\text{其中}\ z\ \text{服从}\ N_\rho(0,\Sigma)\ \text{且和}\ s\ \text{独立，}\ s\ \text{服从}\ \chi_v{}^2.$$

3.3 极值 copula 函数(Extreme Value Copula)

据 Joe（1997）定义，满足下列关系式的 copula 函数称为极值 copula 函数：

$$C(u_1',\Lambda\ ,u_n',\Lambda\ u_N') = C'(u_1,\Lambda\ ,u_n,\Lambda\ u_N)\text{，}\ \forall t \phi 0$$

由极值 copula 函数和多元极值理论可以发现，有如下关系：

$$G(\chi_1{}^+,\Lambda\ ,\chi_n{}^+,\Lambda\ \chi_N{}^+) = C(G(\chi_1{}^+),\Lambda\ ,G(\chi_n{}^+),\Lambda\ G(\chi_N{}^+))$$

其中G为多元极值$(\chi_1{}^+,\Lambda\ ,\chi_n{}^+,\Lambda\ \chi_N{}^+)$的联合分布，$C$为 copula 函数，$G_n$为一元极值分布。

3.4 阿基米德copula函数(Archimedean Copula)

Genest和Mackay给出了阿基米德copula函数的表达式[4]是：

$$C(u_1,\Lambda\ ,u_n,\Lambda\ u_N) = \Psi^{-1}(\Psi(u_1) + \Lambda\ + \Psi(u_n) + \Lambda\ \Psi(u_N))$$

其中$\Psi(\cdot)$为阿基米德 copula 函数的母函数，且满足$\sum_{n=1}^{N}\Psi(u_n) \le \Psi(0)$；对任意$0 \le u \le 1$，$\Psi(1) = 0, \Psi'(u)\ \pi\ 0, \Psi''(u)\ \phi\ 0$，即$\Psi(u)$是一个凸的减函数。

令Ω表示连续严格单调递减凸函数φ 从I 到$[0,1]$的集合，其中$\varphi(1) = 0$

Theorem 3.3.1

C 表示 Ω 上由 φ 生成的 Archimedean Copula ，令 $K_c(t)$ 表示集合 $\{(u,v) \in I^2\ |\ C(u,v) \le t\}$ 是 C 可测的，那么对$\forall t \in I$

$$K_C(t) = t - \frac{\varphi(t)}{\varphi^{'}(t^+)}$$

Theorem 3..3.2

X 和Y 是 r.v, Ω上由φ生成的 Archimedean Copula . 则X 和Y 的 Kendall's tau 是

$$\tau_C = 1 + 4\int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)}dt$$

Example 3.3.1

考虑 Gumbel family 由 $\varphi(t)=(-\ln t)^{\theta}$，其中 $\theta \ge 1$，那么

$$\frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)}=\frac{t\ln t}{\theta}$$

由 Theorem 3.2 ，可以算出 Gumbel family 的 Kendall's tau

$$\begin{aligned}\tau_{\theta} &= 1+4\int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)}dt \\ &= 1+\frac{4}{\theta}\left(\left[\frac{t^2}{2}\ln t\right]_0^1-\int_0^1 \frac{t}{2}dt\right) \\ &= 1-\frac{1}{\theta}\end{aligned}$$

Archimedean copulas 族[8]

表 1 Examples of families of bivariate of Archimedean copulas

名称	Copula $C_{\theta}(u,v)$	参数范围	生成函数 $\varphi(t)$	Kendall's τ
AMH	$uv/(1-\theta(1-u)(1-v))$	$-1\le\theta\le 1$	$\log\frac{1-\theta(1-t)}{t}$	$-0.1817\le\tau\ \pi\ 1/3$
AP	$\frac{1}{2}\left(r+\sqrt{r^2+4\theta}\right)$	$0\ \pi\ \theta\ \pi\ \infty$	$(1+\theta/t)(1+t)$	$-1\ \pi\ \tau\ \pi\ 1/3$
Clayton	$(u^{-\theta}+v^{-\theta}-1)^{-1/\theta}$	$0\le\theta\le\infty$	$\frac{1}{\theta}(t^{-\theta}-1)$	$0\le\tau\ \pi\ 1$
Frank	$-\theta^{-1}\log(1+(e^{-\theta u}-1)(e^{-\theta v}-1)/(e^{-\theta}-1))$	$0\le\theta\ \pi\ \infty$	$-\log\frac{e^{-\theta t}-1}{e^{-\theta}-1}$	$-1\ \pi\ \tau\ \pi\ 1$
Gumble	$\exp(-((-\log u)^{\theta}+(-\log v)^{\theta})^{1/\theta})$	$1\le\theta\ \pi\ \infty$	$(-\log t)^{\theta}$	$0\le\tau\ \pi\ 1$
Joc	$1-((1-u)^{\theta}+(1-v)^{\theta}-(1-u)^{\theta}(1-v)^{\theta})^{1/\theta}$	$1\le\theta\ \pi\ \infty$	$-\log(1-(1-t)^{\theta})$	$0\le\tau\ \pi\ 1$

其中: $r=u+v-1-\theta\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{v}-1\right)$，AMH 是 Ali-Mikihail-Haq.

3.5 各类 Copula 函数的比较

Example 1.1 取 n=1000, $\rho=\begin{pmatrix}1 & 0.6\\ 0.6 & 1\end{pmatrix}$,对多元正态 Copula 函数, 多元 t—copula 函数多元 Frank copula 函数,画图如下:

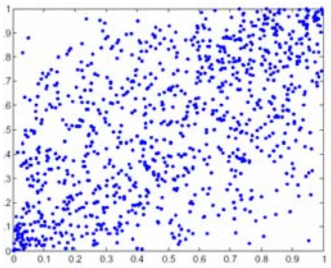

图 1 多元正态 Copula 函数
Fig1 Multivariate gaussian Copula

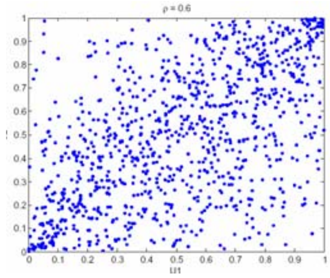

图 2 多元 t－copula 函数
Fig2 Multivariate Student's Copula

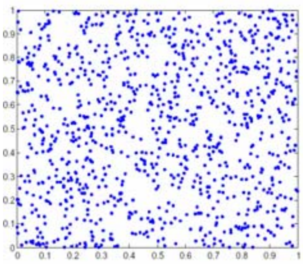

图 3 多元 Frank copula 函数
Fig3 Multivariate Frank Copula

从上面的图形中我们发现图 1 多元正态 Copula 函数和图 2 多元 t－copula 函数有较集中的分布,而图 3 多元 Frank copula 函数的分布较零散.

4. Copula 函数应用

Copula 函数由于其本身特有的性质,在许多领域有重要应用.Copula 方法有许多有点:

⑴ Copula 函数可用来构造灵活的多元分布

⑵ 由 Copula 函数导出的一致性和相关性测度，对于严格单调增的变换都不改变，因此应用范围和实用性更广

⑶ Copula 理论在实际应用中有许多优点，如运用 Copula 理论构建金融模型时，可以将随机变量的边缘分布和它们之间的相关结构分开来研究，其中边缘分布的选择不受限制，而且若对变量作单调增的变换，由 Copula 函数导出的一致性和相关性测度的值不会改变，因此建立在 Copula 理论上的模型更实用、更有效，可以广泛应用于风险管理、资产定价和多变量金融时间序列分析等方面。

尤其在金融风险以及灾难事件的预测方面应用更加广泛. 在应用 copula 函数时的主要问题是函数形式的选择问题.在选择 Copula 函数时,要考虑到样本数据所显示的尾部相关特征,并根据这些选择与之相适应的 Copula 函数. Copula 函数理论可广泛应用于金融市场的相关性分析,资产定价和风险管理等金融领域. Copula 理论与线性相关的建模方法不同, Copula 模型是对整个联合分布建模,因此可提供更多的有用信息,特别是可以捕捉到非正态 、非对称分布的尾部信息.

因此,研究 Copula 函数的性质对其应用的意义是重大的.我们可以在以上 Copula 函数的定义,性质基础上进一步的研究.

5. 结论

Copula 函数在国内的研究应用还是比较少,而在国外的研究比较多,因此本文在此作一总结介绍,并对其性质作进一步的探讨,希望能够有越来越多的人应用它来解决金融风险中的问题.由于函数本身所具有的良好特性,我们坚信 Copula 函数会在以后的研究中发挥更重要的作用.

参考文献

[1] 韦艳华.Copula 理论及其在多变量金融时间序列分析上的应用研究. 天津大学博士学位论文.2004,6
[2] 曾霞,李霞.对偶 copula 的界及其性质.西南民族大学学报(自然科学版)2005,1.
[3] 张尧庭.连接函数(Copula)技术与金融风险分析.统计研究.2002,4.
[4] Filip Lindskog. Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management. 2000,2.
[5] Christian Hipp.Dependence concepts in finance and insurance: Copulas.Karlsrule University .2005,6.
[6] Beatriz Vaz de Melo Mendes, Rafael Martins de Souza .Measuring financial risks with copulas .International Review of Financial Analysis .2004.
[7] Ling Hu. Dwpendence Patterns across Financial Markets: a Mixed Copula Approach. 2004,6
[8] Murray D.Smith .Modelling sample selection using Archimedean copulas .Econometrics Journal.2003.

The theory of copula function and its application

Liu Hanwei
Statistics department of economics,Jinan university ,Guangzhou (510632)

Abstract
Introduce the background of copula function ;then study the property of copula , carry on the detailed introduction to its classification,compare the property of its classification ;finally introduce the application in financial risk and so on.
Keywords: Copula; the theorem of Sklar's ; Frechet-Hoeffding bounds; Financial risk

作者简介：刘汉伟(1981-)，男，山东人，硕士研究生，研究方向:数理金融与精算。