

刘雪峰,凡友华. Rayleigh 波勘探中“之”字形频散曲线“起跳点”频率研究. 地球物理学报, 2011, 54(8): 2124~2135, DOI: 10.3969/j.issn.0001-5733.2011.08.020

Liu X F, Fan Y H. A study on ‘jump point’ frequencies of zigzag dispersion curves in Rayleigh wave exploration. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 2011, 54(8): 2124~2135, DOI: 10.3969/j.issn.0001-5733.2011.08.020

## Rayleigh 波勘探中“之”字形频散 曲线“起跳点”频率研究

刘雪峰,凡友华\*

哈尔滨工业大学深圳研究生院基础科学学科部, 深圳 518055

**摘 要** 当层状介质中存在低速层的时候,实际提取到的 Rayleigh 波频散曲线往往会发生“之”字形回折. 已有研究表明,“之”字形回折与各模式的激发能量有关. 特别的,“之”字形回折的“起跳点”(发生“之”字形回折的点)与介质参数有一定关系,因此在应用中它反映了介质的一些特征. 但是,这一关系是怎样的还没有人进行详细研究. 本文计算了三种不同震源下“之”字形频散曲线起跳点的位置随介质参数的变化情况,发现:“之”字形频散曲线的起跳点频率与震源类型有关,但是对于同一震源,都有相同的规律:对频散曲线的起跳点频率影响最大的是低速层和低速层以上层的横波速度,其次是层厚;而纵波速度、密度、与震源的距离以及低速层以下各层的参数对频散曲线的起跳点频率影响较小;起跳点频率随低速层横波速度的减小或低速层以上层横波速度的增大而降低,反之升高;起跳点频率随低速层厚度或埋深(低速层以上层的总厚度)的增大而降低,反之升高. 本文的结论可以作为地下低速层存在情况的定性分析应用于路基压实度检测等.

**关键词** Rayleigh 波,“之”字形频散曲线,低速层

DOI:10.3969/j.issn.0001-5733.2011.08.020

中图分类号 P631

收稿日期 2010-12-23, 2011-05-09 收修定稿

### A study on ‘jump point’ frequencies of zigzag dispersion curves in Rayleigh wave exploration

LIU Xue-Feng, FAN You-Hua\*

Department of Mathematics and Natural Science, Harbin Institute of Technology Shenzhen Graduate School,  
Shenzhen 518055, China

**Abstract** Zigzag dispersion curves are sometimes found in Rayleigh wave exploration when the media contain low velocity layers. The zigzag dispersion curves are believed to have a relationship with low velocity layers. Especially, there is a relationship between ‘jump point’ frequencies of zigzag dispersion curves and the parameters of the media. So the ‘jump point’ frequencies can be seen as a characteristic of the media. However, the relationship has not yet been deeply studied. In this paper, a detailed research on it is conducted by computing the variation of the ‘jump point’ frequencies with the media parameters under three different sources. It is found that although the ‘jump point’ frequencies depend on the source type, there are the same rules for various sources: the S-wave velocities of the low velocity layer and the layer above it have the dominant influence on the ‘jump point’ frequencies, and followed by their thickness; the other

基金项目 国家自然科学基金项目(40604012)资助.

作者简介 刘雪峰,男,1981年生,博士研究生,主要从事面波理论与应用研究. E-mail: milan6@126.com

\* 通讯作者 凡友华,男,1975年生,教授,主要从事面波理论与应用研究. E-mail: yhfan@hit.edu.cn

parameters have less effect on the ‘jump point’ frequencies; the frequencies reduce with the decrease of S-wave velocity of the low velocity layer and the increase of S-wave velocity of the layer above the low velocity layer; they reduce with the increase of the thickness or depth of the low velocity layer. The result can be used as a qualitative analysis of low velocity layer in the cases like compaction test of subgrade.

**Keywords** Rayleigh wave, Zigzag dispersion curves, Low velocity layer

## 1 引言

Rayleigh 波是沿地表传播的一种弹性波,从 1953 年 Haskell 最初提出传播矩阵方法<sup>[1]</sup>后,人们对瑞利面波的理论研究以及应用研究不断深入.近年来,瑞利面波法已开始在地震物理勘探、超声无损检测等领域得到了大量的研究和应用<sup>[2,3]</sup>.在 Rayleigh 波频散曲线的计算方面,为改进 Haskell 方法的高频不稳定性,出现了 Schwab-Knopoff 方法<sup>[4,5]</sup>、 $\delta$  矩阵法<sup>[6]</sup>、Abo-Zena 方法及其改进方法<sup>[7~9]</sup>等.1993 年,陈晓非提出广义反射透射系数法<sup>[10]</sup>,彻底解决了这一问题. Pei 等<sup>[11]</sup>在 2008 年改进了广义反射透射系数的计算方法,从而在一定程度上减少了计算量.何耀锋等<sup>[12]</sup>在 2006 年提出了久期函数族的概念,避免了广义反射透射系数法在求解含低速层模型对应频散曲线时丢根的问题.

在实际应用中,当层状介质中存在低速层时,提取到的频散曲线往往会发生“之”字形回折,这与理论计算得到的频散曲线不同,因而在一定程度上造成了反演解释中的困难.这种现象已受到很多学者的关注,1991 年,黄嘉正初步分析了“之”字形频散曲线的机理<sup>[13]</sup>.张碧星等于 2000 年对“之”字形频散曲线进行了解释<sup>[14]</sup>,但在高频段仍与实际不符,进而在 2002 年从能量角度讨论了“之”字形频散曲线的形成机理,较好地解释了“之”字形频散曲线形成的原因<sup>[15]</sup>.2003 年,Forbriger 提出了一种反演方法避免“之”字形频散曲线造成的限制<sup>[16,17]</sup>,Lu 等

在 2007 年基于“之”字形频散曲线的形成机理提出了利用“之”字形频散曲线的反演方法<sup>[18]</sup>.“之”字形频散曲线的“起跳点”(发生“之”字形回折的点)频率在一定程度上显示了介质的性质.但是,目前还没有人研究“之”字形频散曲线“起跳点”频率与哪些参数有关,而搞清楚这一问题有利于在实际应用中基于“之”字形频散曲线对介质参数的定性分析.本文将研究不同震源和介质参数对频散曲线起跳点的影响.

## 2 “之”字形频散曲线起跳点位置的确定

Zhang 等人在 1996 年改进了 Abo-Zena 方法,得到传递矩阵算法公式<sup>[19]</sup>.基于这一算法,在给定震源作用下,频散曲线各模式  $r$  方向和  $z$  方向的激发强度(即位移,其平方与能量成正比,因此可以用于研究不同模式的能量大小)计算公式如下<sup>[15]</sup>:

$$\begin{cases} U_r^G = i\pi\Delta_1 \left[ \frac{nH_n^{(1)}(kr)}{kr} - H_{n+1}^{(1)}(kr) \right] \\ \quad \times k^2 \cos(n\theta) \Big/ \frac{\partial E_6^{(1)}}{\partial k}, \\ U_z^G = i\pi\Delta_2 H_n^{(1)}(kr) k^2 \cos(n\theta) \Big/ \frac{\partial E_6^{(1)}}{\partial k}, \end{cases} \quad (1)$$

其中  $k$  为波数,  $\theta$  为与震源夹角,  $H_n^{(1)}$ ,  $H_{n+1}^{(1)}$  为汉克尔函数,  $n$  为与震源类型有关的系数,当震源为爆炸点源和竖直集中力时为 0,震源为水平集中力时为 1.  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  分别为(2)式右边的分子<sup>[18,19]</sup>:

$$\begin{cases} S_1 = \frac{(-T_{11}E_6^{(1)} + T_{31}E_3^{(1)} - T_{41}E_2^{(1)})A_{sn} + (-T_{12}E_6^{(1)} + T_{32}E_3^{(1)} - T_{42}E_2^{(1)})B_{sn}}{E_6^{(1)}}, \\ S_2 = \frac{(-T_{21}E_6^{(1)} + T_{31}E_3^{(1)} + T_{41}E_3^{(1)})A_{sn} + (-T_{22}E_6^{(1)} + T_{32}E_5^{(1)} + T_{42}E_3^{(1)})B_{sn}}{E_6^{(1)}}. \end{cases} \quad (2)$$

$A_{sn}$ ,  $B_{sn}$  是与震源类型相关的系数,  $E_1^{(1)} \sim E_6^{(1)}$  分别为文献[19]中传递矩阵算法计算得到的第 1 层对应向量  $E^{(1)}$  的 6 个元素,而其中  $E_6^{(1)} = 0$  为 Rayleigh 波特征方程.  $T_{ij}$  ( $i=1,2,3,4$ ;  $j=1,2$ ) 为与震源有

关的矩阵元素.

以表 1 中含低速层的三层模型为例,在竖直集中力作用下,其频散曲线及其前 4 阶模式对应竖直方向的位移如图 1(a, b) 所示.由于能量由位移确

定,因此可以利用位移来研究 Rayleigh 波的激发能量.由图 1b,在低频处第 1 阶模式的激发能量占主导地位,而随着频率的升高,当频率超过约 52.1 Hz 时(即 A 点),第 2 阶模式的激发能量占主导地位.由文献[15]中对于“之”字形频散曲线形成机理的研究,“之”字形频散曲线为各频段激发能量占主导地位的模式对应频散曲线的连线.因此,此时实际提取的“之”字形频散曲线在频率低于 52.1 Hz 的区域为基阶模频散曲线,而频率高于 52.1 Hz 时为第 1 高阶模频散曲线,即图 1a 中第 2 条频散曲线.可见频散曲线在图 1b 中点 A 对应的频率处发生了“之”字形回折,即 A 点对应的频率为表 1 中模型在竖直集中力作用下“之”字形频散曲线的第 1 个“起跳点”对应的频率.而点 B 和点 C 对应频率分别为第 3,4 阶模式激发能量开始占主导地位时的频率,因此点 A, B, C 对应的频率即为表 1 中模型在竖直集中力作用下对应“之”字形频散曲线的前三个“起跳点”频率.

基于点 A, B, C 确定的“起跳点”频率即可得到理论上的“之”字形频散曲线如图 1a 中的圆圈所示.

与此类似的,在后面的研究中,将计算各模式竖直方向的位移,利用不同模式激发强度开始占主导地位时的频率来确定“之”字形频散曲线“起跳点”的频率.具体做法是,画出各模式的激发强度曲线,在曲线交叉点(例如图 1b 中点 A, B, C)附近对频率进行加密,以得到较为精确的交叉点对应频率,即可得到“起跳点”的频率.以此研究各参数与“之”字形频散曲线“起跳点”频率的关系.

表 1 含低速层的三层介质模型

Table 1 Three layer medium with low velocity layer

层数	层厚 $h$ (m)	横波速度 $V_s$ (m/s)	纵波速度 $V_p$ (m/s)	密度 $\rho$ ( $\text{kg}/\text{m}^3$ )
1	5	400	800	1200
2	5	300	600	1200
3	$\infty$	500	1000	1200

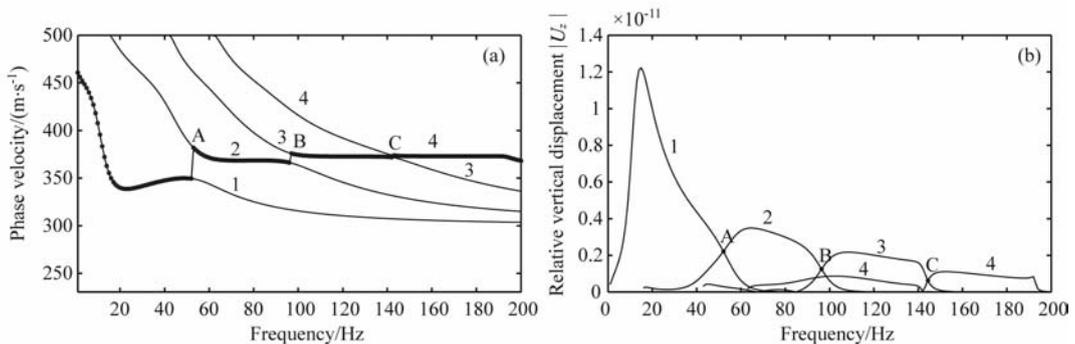


图 1 表 1 中模型对应的频散曲线

(a) 频散曲线,其中圆圈为“之”字形频散曲线;(b) 各模式激发强度.

Fig. 1 Dispersion curves corresponding to the medium in Table 1

(a) Dispersion curves, the circles represent the ‘zigzag’ dispersion curve; (b) Displacement spectrum.

### 3 影响“之”字形频散曲线起跳点位置的物理量

从公式上来看,与“之”字形频散曲线起跳点位置有关的物理量包括:介质各层的横波速度、纵波速度、层厚、密度、与震源距离  $r$ ,另外震源类型也会对起跳点位置产生影响.以表 1 中含低速层的三层模型为例,分别计算在三种不同的震源激发下  $r=1$  m 处对应的“之”字形频散曲线前三个起跳点对应的频率,并且在保持其他参数不变的情况下分别改变表 1 中模型各参数计算其在不同震源下对应频散曲线起跳点频率,考察其变化情况,如表 2 所示.震源均

为处在  $r=0$  处的  $\delta$  函数,竖直和水平集中力处于  $z=0$  处,爆炸点源处于  $z=3$  m 处.其中起跳点频率相对改变量的计算公式为

相对改变量 =

$$\frac{\text{新模型对应起跳点频率} - \text{表 1 中模型对应起跳点频率}}{\text{表 1 中模型对应起跳点频率}} \times 100\% \quad (3)$$

图 1b, 2a, 2b 分别为表 1 中模型在竖直集中力、爆炸点源、水平集中力作用下前 4 阶模式竖直方向的位移;图 3(a~c)分别为表 1 中模型第 2 层横波速度增加 10% 后在竖直集中力、爆炸点源、水平集中力作用下前 4 阶模式竖直方向的位移.从图 1 中可以看出,在很大范围的频率下,爆炸点源和水平集中力所激发的各模式能量除基阶模外差别不大,因

表 2 改变表 1 中模型参数后在不同震源下的起跳点频率

Table 2 Jump point frequencies after the parameters in Table 1 are changed for different sources

改变的参数	竖直集中力		爆炸点源		水平集中力	
	前三个起跳点频率(Hz)	相对改变量(%)	前三个起跳点频率(Hz)	相对改变量(%)	前三个起跳点频率(Hz)	相对改变量(%)
表 1 中 模型	52.1		42.0		54.5	
	96.4		54.2*		97.2	
	142.2		102.5		115.0	
$r \times 1.2$	52.1	$\approx 0$	42.0	$\approx 0$	54.5	$\approx 0$
	96.4	$\approx 0$	54.2	$\approx 0$	97.2	$\approx 0$
	142.2	$\approx 0$	102.5	$\approx 0$	115.0	$\approx 0$
$r \times 20$	52.0	-0.2	41.9	-0.2	54.6	0.2
	96.4	$\approx 0$	54.0	-0.4	97.2	$\approx 0$
	144.4	1.5	102.5	$\approx 0$	115.0	$\approx 0$
$V_{s1} \times 1.1$	96.4	$\approx 0$	54.2	$\approx 0$	97.2	$\approx 0$
	142.2	$\approx 0$	102.5	$\approx 0$	115.0	$\approx 0$
	124.4	-12.5	68	-33.7	124.9	8.6
$V_{s2} \times 1.1$	66.9	28.4	49.3	17.4	68.9	26.4
	131.8	36.7	69.1*	27.5	125.9	29.5
	157.8*	9.9	125.4*	22.3	202.6	76.2
$V_{s3} \times 1.1$	52.9	1.7	41.2	-1.9	55.6	2.0
	98.0	1.7	52.9*	-2.4	98.2	1.0
	141.7	-0.6	103.2	0.7	106.0	-7.8
$V_{p1} \times 1.1$	51.5	-1.2	41.4	-1.4	54.2	-0.6
	95.0	-1.5	52.5*	-3.1	96.0	-1.2
	140.1	-1.5	99.8	-2.6	114.9	-0.1
$V_{p2} \times 1.1$	52.4	0.6	42.2	0.5	54.8	0.6
	97.0	0.6	56.0*	3.3	97.8	0.6
	142.8	0.4	102.7	0.2	115.0	$\approx 0$
$V_{p3} \times 1.1$	52.0	-0.2	41.9	-0.2	54.5	$\approx 0$
	96.4	$\approx 0$	54.2*	$\approx 0$	97.2	$\approx 0$
	142.1	-0.1	102.5	$\approx 0$	115.2	0.2
$h_1 \times 1.1$	50.2	-3.6	42.5	1.2	52.5	-3.7
	94.6	-1.9	59.1*	9.0	95.1	-2.2
	139.6	-1.8	139.9	36.5	110.0	-4.3
$h_2 \times 1.1$	48.5	-6.9	40.1	-4.5	50.8	-6.8
	88.2	-8.5	52.7*	-2.8	89.2	-8.2
	130.0	-8.6	91.0	-11.2	128.0*	11.3
$\rho_1 \times 1.1$	53.5	2.7	42.0	$\approx 0$	55.6	2.0
	97.8	1.5	43.5*	-19.7	98.6	1.4
	143.3	0.8	101.3	-1.2	115.5	0.4
$\rho_2 \times 1.1$	50.1	-3.8	41.3	-1.7	52.8	-3.1
	94.3	-2.2	55.0*	1.5	94.6	-2.7
	140.2	-1.4	104.1	1.6	114.8	-0.2
$\rho_3 \times 1.1$	52.5	0.8	42.2	0.5	55.0	0.9
	97.0	0.6	56.1*	3.5	97.8	0.6
	142.9	0.5	103.2	0.7	114.8	-0.2

此在介质参数改变时,起跳点位置的变化并不规律.而且在一些频段下,由于几阶模式的能量相近,实际提取的频散曲线应为几条频散曲线综合得到的<sup>[15]</sup>,此时仅以不同模式激发强度的大小变化判断频散曲线的起跳点并不准确.表 2 中带星号的数表示此时忽略了这样一些并不明显的起跳点.这种情况下仅仅研究频散曲线起跳点的意义不大.

如表 1 中所示,当  $r$  增加 20%,即在距离震源 1.2 m 处,提取的频散曲线与原频散曲线的起跳点位置几乎没有区别.而当  $r$  扩大 20 倍时,起跳点频率的变化也很小.考察竖直方向位移的计算公式(1), $r$  仅在汉克尔函数中出现,由于频散曲线起跳点的频率取决于同频率不同模式之间的大小对比,而由汉克尔函数的特点,其受到  $r$  的影响更小.在爆

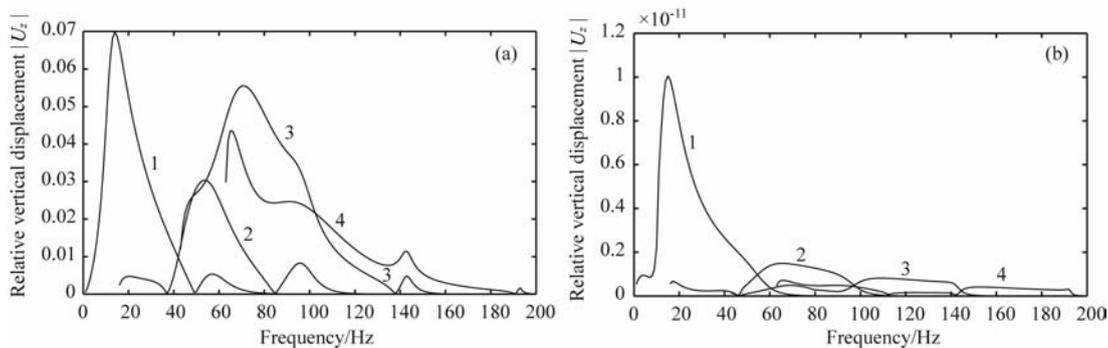


图 2 表 1 中模型对应的频散曲线各模式的激发强度. 其中(a), (b)分别对应爆炸点源和水平集中力作用下的情况  
Fig. 2 Displacement spectrum of the medium in Table 1 for (a) explosive point source; (b) horizontal point force

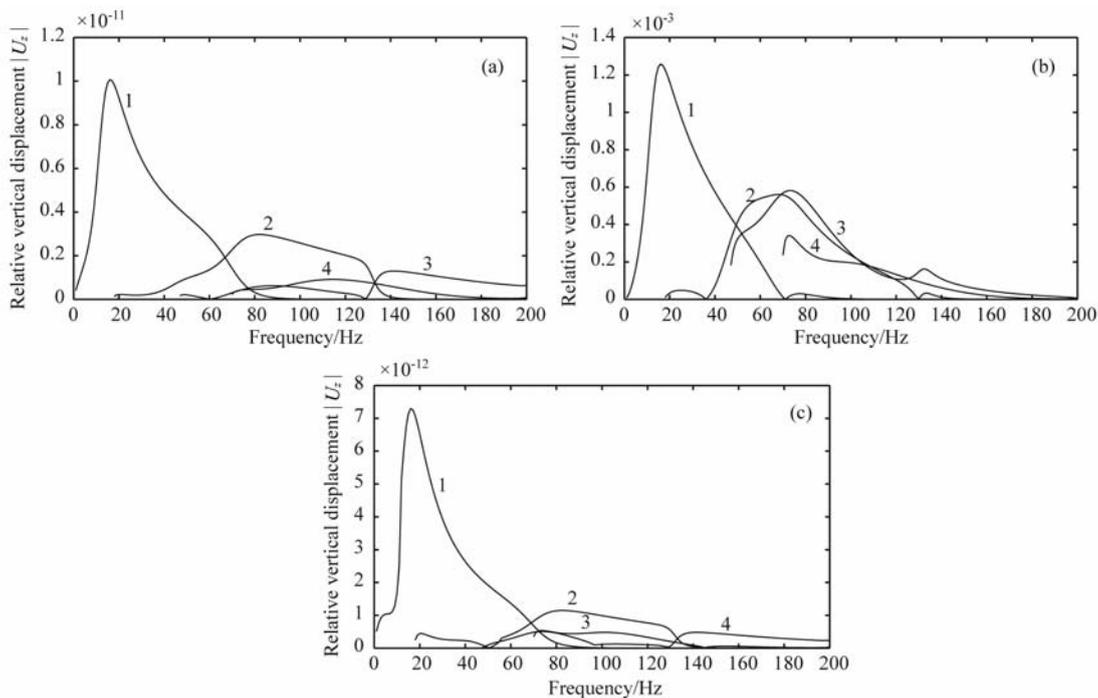


图 3 表 1 中模型第 2 层横波速度增加 10% 后对应频散曲线各模式的激发强度,  
其中(a)~(c)分别对应竖直集中力、爆炸点源、水平集中力作用下的情况

Fig. 3 Displacement spectrum after adding 10% to the S-wave velocity of second layer of the medium in Table 1 for (a) vertical point force; (b) explosive point source; (c) horizontal point force

炸点源下, 当  $r$  为 20 m 时各模式的激发强度曲线如图 4 所示, 与图 2a 对比可以看出, 尽管随着接收距离的增加各模式的幅值都有所减小, 但同频率下各模式之间激发强度的对比变化很小. 由公式(1), 波数  $k$  是和  $r$  共同出现的, 对于同一波数, 当  $r$  增大为原来的 20 倍时,  $kr$  的值也为原来的 20 倍. 也就是说, 在一定程度上可以看成  $kr$  对频散曲线起跳点位置影响不大. 若保持  $r$  不变而令  $k$  增大为原来的 20 倍, 则汉克尔函数的值相同, 但由于  $k$  在公式(1)其他部分也存在, 起跳点位置的变化情况将与单纯扩大  $r$  不同. 由此也可以看出, 若第一和第二模式在起跳点所在频率的相速度差比本例中更大或更小, 其

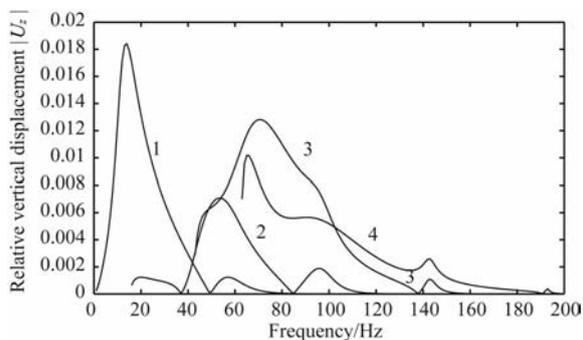


图 4 当  $r=20$  m 时表 1 中模型对应频散曲线各模式在爆炸点源下的激发强度

Fig. 4 Displacement spectrum of the medium in Table 1 when  $r=20$  m under explosive point source

对汉克尔函数的影响与单纯变化  $r$  是相同的. 因此, 不论第一和第二模式在起跳点所在频率下  $k$  的差别如何, 与震源的距离对频散曲线的起跳点位置影响都极小, 在后面的研究中将忽略  $r$  的影响.

从表 2 中可以看到, 当将第 3 层参数(横波速度、纵波速度、密度)增加 10% 时, “之”字形频散曲线起跳点频率的相对改变量几乎全部远小于将前两层参数增加 10% 时造成的相对改变量. 这说明, “之”字形频散曲线起跳点频率对前两层参数的影响较敏感, 而对第 3 层参数的影响相对不敏感. 对于前两层介质的参数, 横波速度增加 10% 对于起跳点频率的影响明显较大, 层厚的影响次之, 而纵波速度和密度的影响相对较小(但仍比第 3 层的参数对起跳点频率的影响要大). 这与介质参数对理论频散曲线的影响情况类似<sup>[21]</sup>, 但是, 所不同的是第 3 层即半空间的参数对起跳点的影响总是很小, 因此, 后面的研究中将只考虑横波速度和层厚的影响.

#### 4 不同震源下频散曲线起跳点位置与介质参数的关系

从表 2 中可以看出, 不同震源对应的起跳点频率是有区别的, 下面将更深入研究三种不同震源下起跳点频率与介质参数的关系. 由于“之”字形频散曲线上第一个起跳点以后各阶模式能量往往较为复杂, 单纯研究这些起跳点意义不大, 因此后文中将只研究频散曲线的第一个起跳点. 后文中提及的起跳点均为第一个起跳点.

##### 4.1 竖直集中力下起跳点位置与介质参数的关系

再次以表 1 中的介质为基础, 分别将其横波速度和层厚改变, 而保持其他参数不变, 研究其起跳点

的相对改变量(相对改变量的计算公式为式(3)). 为了更清楚地看出起跳点随介质参数的变化情况, 后面的研究中将增加各参数的变化范围, 得到新的“之”字形频散曲线起跳点频率及相对改变量.

假设介质受到竖直集中力作用, 震源为处在  $z=0, r=0$  处的  $\delta$  函数. 分别改变表 1 中模型各层横波速度并保持其他参数不变, 得到新的起跳点频率如表 3 所示. 起跳点频率随横波速度变化的趋势图如图 5a, 可以看到, 起跳点频率受第 3 层横波速度的影响远小于第 1 层和第 2 层. 当第 1 层横波速度增加或第 2 层横波速度减小的时候, 起跳点频率降低; 反之, 起跳点频率升高. 这说明, 第 1 层和第 2 层横波速度越接近, 起跳点频率越高; 第 1 层和第 2 层横波速度差别越大, 起跳点频率越低. 而且, 从图中可以看到, 当第 1 层横波速度较小或第 2 层横波速度较大时起跳点频率的变化速度较快. 也就是说, 第 1 层和第 2 层横波速度差别越小, 起跳点随横波速度变化得越快.

由前面的研究可知, 层厚对起跳点频率的影响比横波速度要小, 但是仍然存在较明显的影响. 改变表 1 中模型前两层厚度, 得到竖直集中力作用下新的起跳点频率如表 4 所示. 起跳点频率随层厚变化的趋势图如图 5b. 当第 1 层和第 2 层即低速层的层厚增加时, 起跳点的频率都逐渐减小, 第 2 层层厚对起跳点频率的影响程度约为第 1 层层厚的二倍. 这说明, 低速层的埋深(第 1 层厚度)和低速层厚度都对起跳点频率有影响, 但低速层厚度的影响更大, 约为低速层埋深的二倍. 由于“之”字形回折主要与低速层有关, 而通常频率较低即波长较长的波的穿透深度较深, 能反映较深层区域的信息, 因此当低速层的埋深增加时, 起跳点往往趋于更低的频率.

表 3 改变表 1 中各层横波速度后在竖直集中力作用下的起跳点频率, 每列代表横波速度( $V_{s1}, V_{s2}, V_{s3}$ )乘以不同倍数后的起跳点频率及相对改变量

Table 3 Jump point frequencies after the S-wave velocities in Table 1 are multiplied by different times under vertical point force, each columns means the jump point frequencies after the S-wave velocities ( $V_{s1}, V_{s2}, V_{s3}$ ) are multiplied by different times

		$\times 0.9$	$\times 0.95$	$\times 1.05$	$\times 1.1$	$\times 1.15$	$\times 1.2$
$V_{s1}$	起跳点频率(Hz)	62.9	55.6	50.2	49.1	48.4	47.8
	相对改变量(%)	20.7	6.7	-3.6	-5.8	-7.1	-8.3
$V_{s2}$	起跳点频率(Hz)	44.8	48.0	57.8	66.9	83.4	123.4
	相对改变量(%)	-14.0	-7.9	10.9	28.4	60.1	136.9
$V_{s3}$	起跳点频率(Hz)	50.7	51.5	52.6	52.9	53.3	53.5
	相对改变量(%)	-2.7	-1.2	1.0	1.5	2.3	2.7

表 4 改变表 1 中各层厚度后在竖直集中力作用下的起跳点频率, 每列代表层厚 ( $h_1, h_2$ ) 乘以不同倍数后的起跳点频率及相对改变量

Table 4 Jump point frequencies after the thicknesses in Table 1 are multiplied by different times under vertical point force, each columns means the jump point frequencies after the thicknesses ( $h_1, h_2$ ) are multiplied by different times

		$\times 0.7$	$\times 0.8$	$\times 0.9$	$\times 1.1$	$\times 1.2$	$\times 1.3$
$h_1$	起跳点频率(Hz)	60.0	58.1	54.2	50.2	48.6	47.1
	相对改变量(%)	15.2	11.5	4.0	-3.6	-6.7	-9.6
$h_2$	起跳点频率(Hz)	69.5	62.1	56.5	48.5	45.5	42.9
	相对改变量(%)	33.4	19.2	8.4	-6.9	-12.7	-17.7

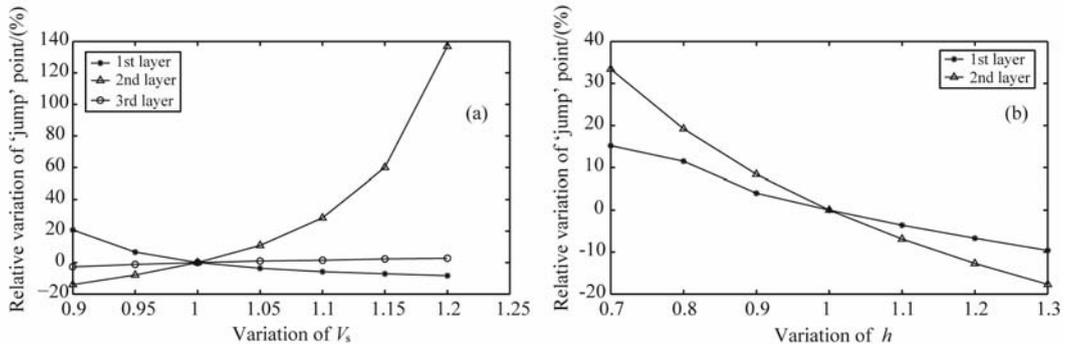


图 5 竖直集中力作用下起跳点频率改变量随各层参数变化图

(a) 起跳点频率随横波速度变化趋势; (b) 起跳点频率随层厚变化趋势。

Fig. 5 Variation of the jump point frequencies when the parameters of each layer are changed under vertical point force

(a) Variation with  $V_s$ ; (b) Variation with  $h$ .

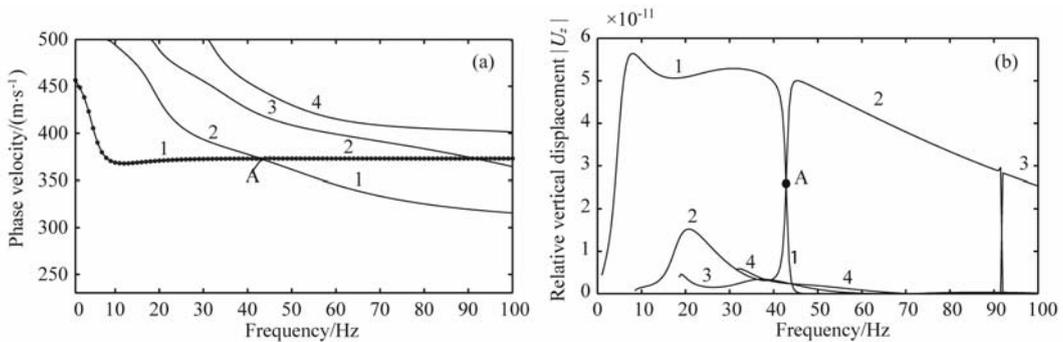


图 6 同图 1, 但为表 1 中模型第 1 层厚度变为 20 m 时

Fig. 6 Same as Fig. 1, but for when thickness of the first layer of the medium in Table 1 is 20 m

但是, 起跳点频率的降低并不是无限制的, 而是有一个极限。例如, 改变第 1 层厚度为表 1 中模型的 4 倍, 即 20 m, 其对应频散曲线的能量谱如图 6b, 起跳点频率为 42.8 Hz, 相对改变量为 17.9%, 并没有很大的变化, 也就是说, “之” 字形频散曲线起跳点频率不会无限制的降低, 随着低速层越来越明显, 其改变的速度会逐渐减慢。而且, 此时 Rayleigh 波的波长约为 8.7 m, 根据半波长理论其穿透深度约为 5 m 左右, 明显小于低速层的埋深, 因此尽管起跳点与波的穿透深度存在一定联系, 但并不是密切相关的。根

据能量最大原则得到的“之”字形频散曲线如图 6a 中圆圈所示, A 点为理论上的起跳点。图中前两条理论频散曲线在 A 点附近很接近。尽管理论上存在“之”字形回折, 但是频散曲线的“之”字形回折现象并不明显。这与图 1a 中点 C 处的情况类似, 尽管理论上存在起跳点, 但是实际应用中由于精度的限制很难发现这些点。由于低速层的埋深很深, 对地表激发的 Rayleigh 波在较高频率下受到低速层的影响较小, 这造成了实际上很难发现“之”字形回折现象。经过实例计算发现, 在爆炸点源和水平集中力作用

下也有类似现象。

#### 4.2 水平集中力下起跳点位置与介质参数的关系

下面假设介质受到水平集中力作用,震源为处在  $z=0, r=0$  处的  $\delta$  函数. 分别改变表 1 中模型各层横波速度, 其他参数不变, 得到新的起跳点频率如表 5 所示. 起跳点频率随横波速度变化的趋势图如图 7a, 与竖直集中力作用的情况类似, 起跳点频率受第 3 层横波速度的影响远小于第 1 层和第 2 层. 当第 1 层横波速度增加或第 2 层横波速度减小的时候, 起跳点频率降低; 反之, 起跳点频率升高。

改变表 1 中模型前两层厚度, 得到水平集中力作用下新的起跳点频率如表 6 所示. 起跳点频率随层厚变化的趋势图如图 7b. 与竖直集中力作用情况完全类似的, 当第 1 层和第 2 层即低速层的层厚增加时, 起跳点的频率都逐渐减小, 第 2 层层厚对起跳

点频率的影响程度约为第 1 层层厚的二倍。

#### 4.3 爆炸点源下起跳点位置与介质参数的关系

假设介质受到爆炸点源作用, 震源为处在  $z=3 \text{ m}, r=0$  处的  $\delta$  函数. 分别改变表 1 中模型各层横波速度, 其他参数不变, 得到新的起跳点频率如表 7 所示. 起跳点频率随横波速度变化的趋势图如图 8a, 与竖直集中力作用的情况类似, 起跳点频率受第 3 层横波速度的影响远小于第 1 层和第 2 层. 当第 1 层横波速度增加或第 2 层横波速度减小的时候, 起跳点频率降低; 反之, 起跳点频率升高. 这说明, 第 1 层和第 2 层横波速度越接近, 起跳点频率越高; 第 1 层和第 2 层横波速度差别越大, 起跳点频率越低. 而且, 当第 1 层横波速度较小或第 2 层横波速度较大时起跳点频率的变化速度较快. 也就是说, 第 1 层和第 2 层横波速度差别越小, 起跳点随横波速度变化

表 5 同表 3, 但为水平集中力作用下

Table 5 Same as Table 3, but for under horizontal point force

	$\times 0.9$	$\times 0.95$	$\times 1.05$	$\times 1.1$	$\times 1.15$	$\times 1.2$	
$V_{s1}$	起跳点频率(Hz)	64.4	58.1	52.3	50.8	49.7	48.9
	相对改变量(%)	18.2	6.6	-4.0	-6.8	-8.8	-10.3
$V_{s2}$	起跳点频率(Hz)	46.7	50.2	60.2	68.9	84.5	119.9
	相对改变量(%)	-14.3	-7.9	10.5	26.4	55.0	120
$V_{s3}$	起跳点频率(Hz)	52.8	53.8	55.1	55.6	55.9	56.2
	相对改变量(%)	-3.1	-1.3	1.1	2.0	2.6	3.1

表 6 同表 4, 但为水平集中力作用下

Table 6 Same as Table 4, but for under horizontal point force

	$\times 0.7$	$\times 0.8$	$\times 0.9$	$\times 1.1$	$\times 1.2$	$\times 1.3$	
$h_1$	起跳点频率(Hz)	61.8	59.3	56.8	52.5	50.8	49.3
	相对改变量(%)	13.4	8.8	4.2	-3.7	-6.8	-9.5
$h_2$	起跳点频率(Hz)	71.9	64.7	59.1	50.8	47.6	44.8
	相对改变量(%)	31.9	18.7	8.4	-6.8	-12.7	-17.8

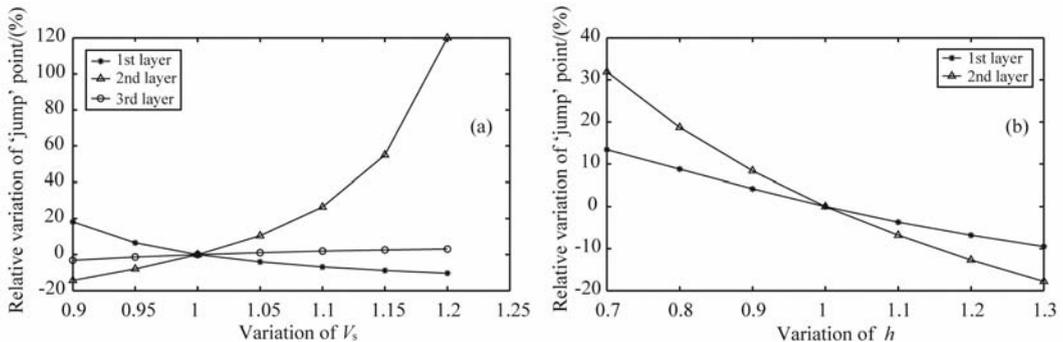


图 7 同图 5, 但为水平集中力作用下

Fig. 7 Same as Fig. 5, but for under horizontal point force

得越快。

注意到这种情况下第 3 层横波速度增大或减小时起跳点的频率均有所降低。由于起跳点的频率是由同频段各阶模式激发能量之间的大小对比决定的,当参数改变时,各阶模式的激发能量都有所变动,这造成了起跳点频率随参数的变化趋势并不是绝对单调的。由此也可以看出,“之”字形频散曲线与介质参数的关系是非线性的,因此尽管通过本文的研究表明频散曲线的起跳点频率与介质参数的关系在一定程度上是近似单调的,但本质上它们之间的关系还是非线性的。而且,由于“之”字形频散曲线与介质参数的关系是非线性的,这也造成了频散曲线的反演问题是非线性的。

改变表 1 中模型前两层厚度,得到爆炸点源作用下新的起跳点频率如表 8 所示。起跳点频率随层

厚变化的趋势图如图 8b。与竖直集中力作用情况类似的,当第 1 层和第 2 层即低速层的层厚增加时,起跳点的频率逐渐减小。

但是,当改变第 1 层厚度时,起跳点频率的变化情况比较特别。事实上,当第 1 层厚度变为 4.5 m 时各模式激发强度如图 9b 所示,与图 2a 对比发现各模式激发强度的变化较为复杂,因此起跳点频率随第 1 层厚度的变化趋势不如竖直和水平集中力震源情况规律。而且由“之”字形频散曲线的成因,根据各阶模式的激发强度对比得到的“之”字形频散曲线如图 9a 中圆圈所示。可以看到理论上在图中点 B 应为频散曲线的起跳点,但是由于在 B 点处只产生了较短的“之”字形回折,且由图 9b 可知在这一频段前两阶模式的激发强度都不是很大,实际应用由于误差原因不容易发现该处回折点,因此这里选取了 A

表 7 同表 3, 但为爆炸点源作用下

Table 7 Same as Table 3, but for explosive point source

		×0.9	×0.95	×1.05	×1.1	×1.15	×1.2
$V_{s1}$	起跳点频率(Hz)	43.5	42.5	41.2	40.0	35.7	33.1
	相对改变量(%)	3.6	1.2	-1.9	-4.8	-15	-21.2
$V_{s2}$	起跳点频率(Hz)	31.1	39.0	45.1	49.3	59.0	117.4
	相对改变量(%)	-26.0	-7.1	7.4	17.4	40.5	179.5
$V_{s3}$	起跳点频率(Hz)	41.9	41.9	41.7	41.2	41.0	41.0
	相对改变量(%)	-0.2	-0.2	-0.7	-1.9	-2.4	-2.4

表 8 同表 4, 但为爆炸点源作用下

Table 8 Same as Table 4, but for explosive point source

		×0.7	×0.8	×0.9	×1.1	×1.2	×1.3
$h_1$	起跳点频率(Hz)	60.5	60.7	46.8	42.5	42.5	41.9
	相对改变量(%)	44.0	44.5	11.4	1.2	1.2	-0.2
$h_2$	起跳点频率(Hz)	49.2	46.5	44.1	40.1	38.5	37.0
	相对改变量(%)	17.1	10.7	5	-4.5	-8.3	-11.9

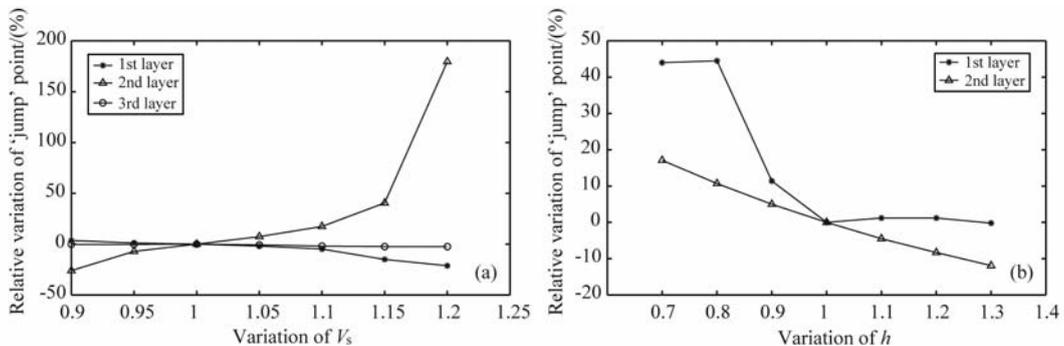


图 8 同图 5, 但为爆炸点源作用下

Fig. 8 Same as Fig. 5, but for explosive point source

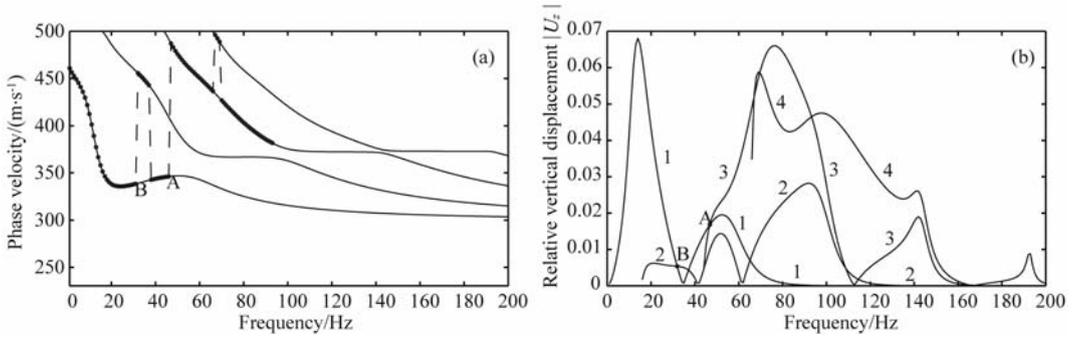


图 9 同图 1, 但为表 1 中模型第 1 层厚度变为 4.5 m 时

Fig. 9 Same as Fig. 1, but for when thickness of the first layer of the medium in Table 1 is 4.5 m

点作为起跳点. 如前面所说, “之”字形频散曲线与介质参数的关系是非线性的. 而当第 1 层厚度增加时, 起跳点的频率改变已经接近极限, 事实上当第 1 层厚度变为 20 m 时起跳点频率为 42.7 Hz, 如前面所述, 此时随第 1 层厚度增加, 起跳点频率实际上在极限频率附近震荡, 但是改变很小.

相对来说, 爆炸点源作用下起跳点频率随介质参数的变化规律与竖直和水平集中力的情形有一些区别. 但是, 尽管不同的震源作用下起跳点频率稍有不同, 它们都遵循着类似的规律: 当第 1 层横波速度增加或第 2 层横波速度减小的时候, 起跳点频率降低, 反之起跳点频率升高; 当第 1 层和第 2 层即低速层的层厚增加时, 起跳点的频率都逐渐减小.

尽管前面的研究主要基于第 2 层为低速层的三层介质, 但是, 当介质含有更多层时, 利用类似于文献[22]中方法, 可将低速层上面各层及下面各层分别加权平均成一层, 近似成为一个三层的介质, 其频散曲线与原频散曲线差别不大, 因此, 前面研究的结论对于含低速层的多层介质也可近似成立, 即: 起跳点频率随低速层横波速度的减小或低速层以上层横波速度的增大而降低, 反之升高; 起跳点频率随低速层厚度或埋深(低速层以上层的总厚度)的增大而降低, 反之升高.

## 5 数值模拟

在这一部分, 我们利用有限元在数值上模拟验证有效性. 对于表 9 中的各模型, 利用有限元方法模拟其在竖直圆盘形震源激励下(当离震源较远时, 可近似看成竖直集中力震源)的 24 道时域波形(详细建模情况见文献[23]), 并利用  $f-k$  域方法按能量最大原则提取频散曲线如图 10.

模型 1.6.7 与 1.6.6 相比, 第 2 层即低速层厚

表 9 三个含低速层的三层介质模型

Table 9 3-layer media with low velocity layer

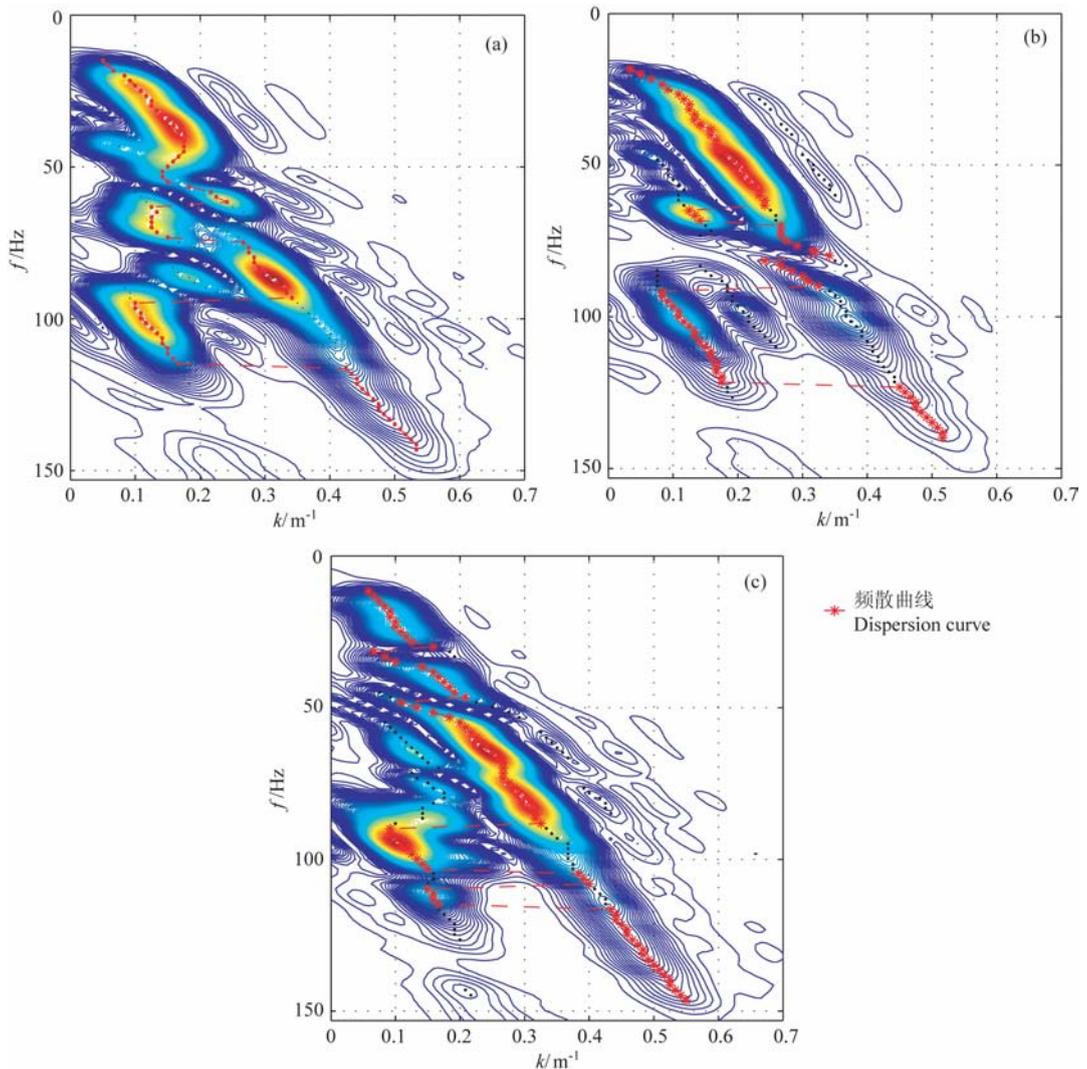
模型	层数	层厚 $h$ (m)	横波速度 $V_s$ (m/s)	纵波速度 $V_p$ (m/s)	密度 $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )
1.6.6	1	2	316.3	1049.1	2068
	2	2	138.7	259.4	2000
	3	$\infty$	316.3	1049.1	2068
1.6.7	1	2	316.3	1049.1	2068
	2	1	138.7	259.4	2000
	3	$\infty$	316.3	1049.1	2068
1.18.6	1	2	316.3	1049.1	2068
	2	3	110.1	223.7	2000
	3	$\infty$	316.3	1049.1	2068

度由 2 m 减为 1 m. 由图 10a, 10b 可知, 模型 1.6.6 对应“之”字形频散曲线的起跳点频率为 42.6 Hz, 模型 1.6.7 对应“之”字形频散曲线的起跳点频率为 65.3 Hz. 这与前面的结论“起跳点频率随低速层厚度的减小而升高”是相符合的. 模型 1.18.6 与前两个模型相比, 低速层厚度更厚而且横波速度更低, 由图 10c 可知模型 1.18.6 对应“之”字形频散曲线的起跳点频率为 26.6 Hz, 低于前两个模型, 这印证了本文前面的结论.

基于本文的结论, 在一些实际工程中可以直接通过起跳点频率的高低判断所检测对象是否符合标准. 例如, 在利用 Rayleigh 波进行路基压实度检测当中<sup>[24]</sup>, 往往需要研究整条路面上很多区域的频散曲线, 然后分析所有的频散曲线以找出压实度不够大(即横波速度较小)的区域. 而利用本文中的结论, 直接找出对应频散曲线起跳点频率明显较低的区域即可.

## 6 结论

本文通过实例研究了“之”字形频散曲线起跳点

图 10  $f-k$  域能量谱及频散曲线

(a) 模型 1.6.6; (b) 模型 1.6.7; (c) 模型 1.18.6.

Fig. 10 Displacement spectrum obtained by  $f-k$  transformation and dispersion curves

(a) Model 1.6.6; (b) Model 1.6.7; (c) Model 1.18.6.

(特别是第一个起跳点) 对应频率与震源、检波器和震源的距离、介质各层参数的关系, 发现“之”字形频散曲线起跳点对应频率与检波器和震源距离几乎无关, 但与震源和介质各层参数有关. 尽管震源的不同会影响提取的“之”字形频散曲线起跳点频率, 但是对于相同震源, 起跳点频率随介质参数的变化情况都有着相同的规律:

(1) 对频散曲线的起跳点频率影响最大的是低速层和低速层以上层的横波速度, 其次是层厚;

(2) 纵波速度、密度以及低速层以下各层的参数对频散曲线的起跳点频率影响较小;

(3) 起跳点频率随低速层横波速度的减小或低速层以上层横波速度的增大而降低, 反之升高;

(4) 起跳点频率随低速层厚度或埋深(低速层以

上层的总厚度) 的增大而降低, 反之升高.

从频散曲线的激发能量谱也可以看出, “之”字形频散曲线与介质参数的关系实际上是非线性的, 而这也造成了反演问题的非线性. 尽管本文的研究发现频散曲线起跳点频率与介质参数之间存在一定的近似单调的关系, 但本质上两者之间的关系仍然是非线性的.

根据本文的结论, 可以在一些实际应用中(如路基压实度的检测等) 利用“之”字形频散曲线起跳点频率的高低来定性判断介质中低速层的层厚或横波速度的大小.

#### 参考文献 (References)

[1] Haskell N A. The dispersion of surface waves on multilayered

- media. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 1953, **43**: 17~34
- [2] Clark A V, Fuchs P, Schaps S R. Fatigue load monitoring in steel bridges with Rayleigh waves. *J. Nondestruct. Eval.*, 1995, **14**(3): 83~98
- [3] Nadal M H, Tardy F, Gondard C. Impulse modeling of the Rayleigh wave propagation generated by a spherical focused transducer. *J. Nondestruct. Eval.*, 1998, **17**(4):179~190
- [4] Schwab F. Surface-wave dispersion computations; Knopoff's method. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 1970, **60**:1491~1520
- [5] Schwab F, Knopoff L. Fast surface wave and free mode computations. In: Bolt B A ed. *Methods in Computational Physics*. New York: Academic Press, 1972, **2**: 87~180
- [6] Buchen P W, Ben-Hador R. Free-mode surface-wave computations. *Geophys. J. Int.*, 1996, **124**(3): 869~887
- [7] Abo-Zena A. Dispersion function computations for unlimited frequency values. *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 1979, **58**(1): 91~105
- [8] Menke W. Comment on 'Dispersion function computations for unlimited frequency values' by Anas Abo-Zena. *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 1979, **59**(2): 315~323
- [9] 李幼铭, 束沛镛. 层状介质中地震面波频散函数和体波广义反射系数的计算. *地球物理学报*, 1982, **25**(2): 130~139  
Li Y M, Shu P Y. On surface wave dispersion and body wave generalized reflection coefficient computations for layered media. *Chinese J. Geophys. (Acta Geophysica Sinica)* (in Chinese), 1982, **25**(2): 130~139
- [10] Chen X F. A systematic and efficient method of computing normal modes for multilayered half-space. *Geophys. J. Int.*, 1993, **115**(2): 391~409
- [11] Pei D H, John N L, Pullammanappallil S K. Improvements on computation of phase velocities of Rayleigh waves based on the generalized R/T coefficient method. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 2008, **98**(1):280~287
- [12] 何耀锋, 陈蔚天, 陈晓非. 利用广义反射-透射系数方法求解含低速层水平层状介质模型中面波频散曲线问题. *地球物理学报*, 2006, **49**(4): 1074~1081  
He Y F, Chen W T, Chen X F. Normal mode computation by the generalized reflection-transmission coefficient method in planar layered half space. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 2006, **49**(4): 1074~1081
- [13] 黄嘉正, 周鸿秋, 关小平. 工程地质中瑞利波法勘探的理论初探. *物探与化探*, 1991, **15**(4): 268~277  
Huang J Z, Zhou H Q, Guan X P. Theoretical study of the Rayleigh-wave technique in Engineering Geology. *Geophysical and Geochemical Exploration* (in Chinese), 1991, **15**(4): 268~277
- [14] 张碧星, 肖伯勋, 杨文杰等. 瑞利波勘探中“之”字形频散曲线的形成机理及反演研究. *地球物理学报*, 2000, **43**(4): 558~567  
Zhang B X, Xiao B X, Yang W J, et al. Mechanism of zigzag dispersion curves in Rayleigh exploration and its inversion study. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 2000, **43**(4): 558~567
- [15] 张碧星, 鲁来玉, 鲍光淑. 瑞利波勘探中“之”字形频散曲线研究. *地球物理学报*, 2002, **45**(2): 263~274  
Zhang B X, Lu L Y, Bao G S. A study on zigzag dispersion curves in Rayleigh wave exploration. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 2002, **45**(2): 263~274
- [16] Forbriger T. Inversion of shallow-seismic wavefields: I. Wavefield transformation. *Geophys. J. Int.*, 2003, **153**(3): 719~734
- [17] Forbriger T. Inversion of shallow-seismic wavefields: II. Inferring subsurface properties from wavefield transforms. *Geophys. J. Int.*, 2003, **153**(3):735~752
- [18] Lu L Y, Wang C H, Zhang B X. Inversion of multimode Rayleigh waves in the presence of a low-velocity layer: numerical and laboratory study. *Geophys. J. Int.*, 2007, **168**(3):1235~1246
- [19] Zhang B X, Yu M, Lan C Q, et al. Elastic wave and excitation mechanism of surface waves in multilayered media. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1996, **100**(6): 3527~3538
- [20] Xia J H, Miller R D, Xu Y X. Data-resolution matrix and model-resolution matrix for Rayleigh-wave inversion using a damped least-squares method. *Pure Appl. Geophys.*, 2008, **165**(7):1227~1248
- [21] Xia J H, Miller R D, Park C B. Estimation of near-surface shear wave velocity by inversion of Rayleigh wave. *Geophysics*, 1999, **64**(3): 691~700
- [22] Xu Y X, Xia J H, Miller R D. Approximation to cutoffs of higher modes of Rayleigh waves for a layered earth model. *Pure Appl. Geophys.*, 2009, **166**(3): 339~351
- [23] 刘雪明. 瑞雷波地基检测中震源及“之”字形频散曲线的数值研究[硕士论文]. 广东: 哈尔滨工业大学城市与土木学部, 2008  
Liu X M. Numerical research on source and zigzag dispersion curve in Rayleigh wave soil exploration [Master's thesis] (in Chinese). Guangdong: Department of Urban Planning and Civil Engineering, Harbin Institute of Technology, 2008
- [24] 刘江平, 罗银河, 何伟兵. 相邻道瞬态瑞雷面波法与压实度检测. *岩土工程学报*, 2009, **31**(11): 1652~1659  
Liu J P, Luo Y H, He W B. Method of neighboring trace transient Rayleigh wave and its application in compactness inspection. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering* (in Chinese), 2009, **31**(11): 1652~1659