线性规划对偶理论中互补松弛定理的普遍对称性

万术来[1]，蒋金山[2]
（1. 华南理工大学电力学院，广州 510640;
2. 华南理工大学理学院数学系，广州 510640）

摘要：鉴于互补松弛定理在线性规划对偶理论中的重要性以及目前存在的一些理解误区，本文对互补松弛定理进行了深入探讨，用 2 种方法创新性的阐述并证明了混合形式互补松弛定理，填补了各种教材的理论空白，进而正式的得出并证明了新的研究发现，即任何形式的互补松弛定理都具有普遍对称性，并使用 3 种方法进行了证明。最后整理总结出互补松弛定理的 4 种本质表述，使该定理的理解更加全面透彻。此外，文中还提出了纯粹充要条件的新概念。

关键词：运筹学与控制论；对偶理论；互补松弛定理；混合形式；对偶问题；对称性
中图分类号：O221.1

Universal Symmetry of Complementary Slackness Theorem in Linear Programming Duality Theory

WAN Shulai[1], JIANG Jinshan[2]
(1. School of Electric Power,South China University of Technology, GuangZhou 510640;
2. Department of Mathematics in School of Science, South China University of Technology, GuangZhou 510640)

Abstract: Considering the importance of the complementary slackness theorem in linear programming dual theory and the present understanding errors ,this paper discusses the complementary slackness theorem deeply, and elaborates and proves mixed-type complementary slackness theorem innovatively in two ways,which which fill the blank of the interpretation of the textbooks. Then we draw a new conclusion that the complementary slackness theorem has a general symmetry.,which is proved by three methods.Finally four essential expressions of this theorem are summarized, which make us understand the theorem more comprehensively and thoroughly. Besides,a new concept Pure Sufficient and Necessary Condition is also put forward.

Keywords:operational research and cybernetics; duality theory; complementary slackness theorem; mixed type; dual problem; symmetry

0 引言

互补松弛定理是线性规划对偶理论的重要组成部分，它为原问题和其对偶问题架起了一座桥梁，可以在已知一个问题的最优解时，非常方便的求出其对偶问题的最优解。国外文献[1-3]和国内文献[6-10]都讲解了对称形式或者非对称形式（狭义）互补松弛定理，但是几乎所有的教材论文都是基于非自由变量的推导和阐述，并且很少谈及包含自由变量的复杂混合形式的互补松弛定理的应用。并且由于传统对称形式和非对称形式（通用形式）在使用时的区别，给我们造成了很大的误区，不能清楚地看到互补松弛定理的本质。

本文从各种形式出发，探讨互补松弛定理的本质，总结出 4 种本质表述方式，得出一个新的结论，将各种形式的互补松弛定理统一起来。

作者简介：万术来，(1986-)，男，硕士研究生， 主要研究方向：最优化计算与电力系统电力市场. E-mail: shlwan@126.com
通信联系人：蒋金山，(1966-)，男，博士，副教授，主要研究领域： 计算智能，图像处理与模式识别等。

1 传统的互补松弛定理

传统的互补松弛定理指的是对称形式和非对称形式的互补松弛定理。这里的非对称形式狭义指约束条件为等式约束，原问题中变量全部为非负变量的数学模型。

1.1 非对称形式互补松弛定理

非对称形式互补松弛定理，其实就是通用互补松弛定理。后文 2.3 节将详细探讨它的普遍性。

原问题的数学模型为：

$$\begin{aligned} &LP:\min z = c^T x \\ &s.t.\quad Ax = b \\ &\qquad\quad x \ge 0 \end{aligned} \tag{1-1}$$

其对偶问题的数学模型为：

$$\begin{aligned} &LD:\max \omega = b^T y \\ &s.t.\ \ A^T y \le c \end{aligned} \tag{1-2}$$

y 自由，无约束限制

定理 1.1[4]：设 $\overline{\boldsymbol{x}}$ 和 $\overline{\boldsymbol{y}}$ 分别是原问题 LP(1-1)及其对偶问题 LD(1-2)的可行解，则它们分别是 LP 和 LD 的最优解的充要条件是 $\overline{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\overline{\boldsymbol{y}})=0$。

1.2 对称形式互补松弛定理

在文献[4]中指出，对称式互补松弛定理，可以由通用互补松弛定理推出，作为它的推论。当然也可以独自推出，比如文献[5]。很多文献直接把该定理作为互补松弛定理，比如文献[6-10]。其实本质是相同的，只是形式不同而已。

对称形式原问题数学模型为：

$$\begin{aligned} &LP:\min z = c^T x \\ &s.t.\quad Ax \ge b \\ &\qquad\quad x \ge 0 \end{aligned} \tag{1-3}$$

其对偶问题的数学模型为：

$$\begin{aligned} &LD:\max \omega = b^T y \\ &s.t.\ \ A^T y \le c \\ &\qquad y \ge 0 \end{aligned} \tag{1-4}$$

定理 1.2[4]：设 $\overline{\boldsymbol{x}}$ 和 $\overline{\boldsymbol{y}}$ 分别是原问题 LP(1-3)及其对偶问题 LD(1-4)的可行解，则它们分别是 LP 和 LD 的最优解的充要条件是

$$\overline{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\overline{\boldsymbol{y}})=0,\overline{\boldsymbol{y}}^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{b})=0.$$

1.3 传统的互补松弛定理模型的特点

对于传统的对称形式和非对称形式数学模型，从表面看主要有以下几个特点。

（1）约束条件的纯粹性。对于非对称形式的原问题模型，约束条件为纯粹的等式约束；对于对称形式的原问题模型，约束条件为纯粹的不等式约束（非负约束或非正约束）。

（2）决策变量的非自由性。两种形式的原问题模型中，决策变量都是非自由变量，一般都设为非负性，与线性规划数学模型的标准型保持一致。

（3）充要条件的不对称性。从形式看，非对称形式的互补松弛定理，充要条件为一部分，体现出单边性（不对称性），而对称形式的互补松弛定理，充要条件为两部分，体现出双边性（对称性）。

2 互补松弛定理的深入探讨

2.1 混合式互补松弛定理

在国内国外的各种教材中，基本上都只是讨论非对称形式（纯等式约束，非负变量）和对称形式（纯不等式约束，非负变量）的互补松弛定理。没有探讨混合形式的互补松弛定理。

所谓混合形式是指，数学模型中约束条件可以为任意的等式约束和不等式约束，自变量可以为任意的非自由变量或自由变量，并且可以同时出现在原问题和对偶问题中。这样的模型具有广泛的代表性。文献[6]简单介绍了混合形式。

建立对偶关系问题混合形式数学模型，如下。

原问题数学模型：

$$
\begin{aligned}
&LP: \min z = c^T x \\
&s.t. \quad A'x = b' \\
&\qquad\ \ A''x \geq b''
\end{aligned}
\qquad (2\text{-}1)
$$

$x_{N'}$ 自由

$x_{N''} \geq 0$

其中，原问题中共有n个变量，共m个约束，m'个等式约束，m''个不等式约束。

x为$(\mathrm{n'}+\mathrm{n''})\times 1$阶的列向量，$x = \begin{pmatrix} x_{N'} \\ x_{N''} \end{pmatrix}$

$x_{N'} = (x_1, x_2, \cdots, x_{n'})^T \; x_{N''} = (x_{n'+1}, x_{n'+2}, \cdots, x_{n'+n''})^T$,

$n = n' + n'', m = m' + m''$,

A'为$m' \times n$阶的系数矩阵，

A''为$m'' \times n$阶的系数矩阵，

b'为约束式右端的$m' \times 1$阶的常数列向量，

b''为约束式右端的$m'' \times 1$阶的常数列向量，

$$A = \begin{pmatrix} A' \\ A'' \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b' \\ b'' \end{pmatrix}$$

对偶问题数学模型：

$$LD:\max\omega = b^T y$$
$$s.t.\ \ {A_{N'}}^T y = c' \qquad (2\text{-}2)$$
$$\quad {A_{N''}}^T y \le c''$$
$y_{M'}$ 自由

$$y_{M''} \ge 0$$

其中，共有m个变量，共有n个约束条件，n'个等式约束，n''个不等式约束。

$m = m' + m''$，$n = n' + n''$

c为$(n'+n'')\times 1$阶的列向量，$c = \begin{pmatrix} c' \\ c'' \end{pmatrix}$，

y为$(m'+m'')\times 1$阶列向量，$y = \begin{pmatrix} y_{M'} \\ y_{M''} \end{pmatrix}$，

${A_{N'}}^T$为A^T前面n'行组成的系数矩阵，

${A_{N''}}^T$为A^T前面n''行组成的系数矩阵，

根据需要可以将上两个矩阵分别细分为m'列和m''列的如下矩阵：

$${A_{N'}}^T = \begin{pmatrix} {A_{N'1}}^T & {A_{N'2}}^T \end{pmatrix}$$
$${A_{N''}}^T = \begin{pmatrix} {A_{N''1}}^T & {A_{N''2}}^T \end{pmatrix}$$

混合形式互补松弛定理内容如下：

定理 2.1（描述 1）： 设$\overline{x}$和$\overline{y}$分别是线性规划混合形式的原问题 LP（2-1）及其对偶问题 LD（2-1）的可行解，则$\overline{x}$和$\overline{y}$分别是各自问题最优解的充要条件是

$${\overline{x}_{N''}}^T(c'' - {A_{N''}}^T\overline{y}) = 0,\quad \overline{y}_{M''}^T(A''\overline{x} - b'') = 0$$

定理 2.2（描述 2）： 对于线性规划原问题和对偶问题，其可行解为最优解的充要条件是，各自模型中（原问题或对偶问题），所有各自非自由变量乘以其对偶问题中相应的约束条件差式（即松弛变量或剩余变量）之积为零。

说明：“对应”是指，一个问题的自变量与其对偶问题的约束条件式的序号对应关系。“约束条件差式”是指，约束条件式（等式或不等式，一般指不等式）用一边减去另一边的代数式，即不等式转化为等式时加入的松弛变量或剩余变量。

第一种证明方法如下文所示。该法是从通用互补松弛定理（即非对称形式互补松弛定理）入手进行的证明。第二种证明方法，参见 2.4 节。

证明：

首先将原问题数学模型化成准标准形式，

$$
\begin{aligned}
&LP: \min z = c^T x \\
&s.t.\ \ A'x + 0 = b' \\
&\qquad A''x - s = b''
\end{aligned}
$$

$x_{N'}$ 自由，

$x_{N''} \geq 0,$

$s \geq 0.$

其中，s 为添加的剩余变量组成的列向量，$s = \left(s_1, s_2, \cdots, s_{n''}\right)^T$ 。

然后改写成矩阵形式，

$$
LP: \min z = \begin{pmatrix} c^T & 0^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix}
$$

$$
s.t.\ \begin{pmatrix} A' & 0 \\ A'' & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b' \\ b'' \end{pmatrix}
$$

$x_{N'}$自由，$x_{N''} \geq 0,$

$s \geq 0.$

其中，I 为 m'' 阶单位矩阵，0 为 $m' \times m''$ 阶零矩阵。

由通用互补松弛定理可得：

$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{s} \end{pmatrix}$ 和 $\bar{y}$ 分别为上式原问题和其对偶问题的最优解的充要条件是

$$
\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{s} \end{pmatrix}^T \left(\begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A' & 0 \\ A'' & -I \end{pmatrix}^T \bar{y} \right) = 0
$$

即
$$
\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{s} \end{pmatrix}^T \left(\begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A'^T & A''^T \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{y}_{M'} \\ \bar{y}_{M''} \end{pmatrix} \right) = 0
$$

即

$$
\begin{pmatrix} \bar{x}_{N'}{}^T & \bar{x}_{N''}{}^T & \bar{s}^T \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} c' \\ c'' \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_{N'1}{}^T & A_{N'2}{}^T \\ A_{N''1}{}^T & A_{N''2}{}^T \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{y}_{M'} \\ \bar{y}_{M''} \end{pmatrix} \right) = 0
$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \overline{x}_{N'}{}^{T} & \overline{x}_{N''}{}^{T} & \overline{s}^{T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c' - A_{N'}{}^{T}\overline{y} \\ c'' - A_{N''}{}^{T}\overline{y} \\ \overline{y}_{M''} \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \overline{x}_{N'}{}^{T}(c' - A_{N'}{}^{T}\overline{y}) + \overline{x}_{N''}{}^{T}(c'' - A_{N''}{}^{T}\overline{y}) - \overline{s}^{T}\overline{y}_{M''} = 0$$

因为 $\overline{s} = A''\overline{x} - b''$，又 $c' - A_{N'}{}^{T}\overline{y} = 0$，$\overline{x}_{N''}{}^{T}(c'' - A_{N''}{}^{T}\overline{y}) \ge 0$，

则 $\overline{s}^{T}\overline{y}_{M''} = \overline{y}_{M''}^{T}\overline{s} = \overline{y}_{M''}^{T}(A''\overline{x} - b'') \ge 0$

所以充要条件为：

$\overline{x}_{N''}{}^{T}(c'' - A_{N''}{}^{T}\overline{y}) = 0$，$\overline{y}_{M''}^{T}(A''\overline{x} - b'') = 0$

注意到：

当且仅当求和项中每一项都等于 0 时，整个求和项为 0。$m = m' + m'', n = n' + n''$。

$$\overline{x}_{N''}{}^{T}(c'' - A_{N''}{}^{T}\overline{y}) = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=n'+1}^{n'+n''} \overline{x}_j (c_j - \sum_{i=1}^{m'+m''} a_{ij}\overline{y}_i) = 0$$

$$\Leftrightarrow \overline{x}_j (c_j - \sum_{i=1}^{m'+m''} a_{ij}\overline{y}_i) = 0 \qquad (j = n'+1, n'+2, \cdots, n)$$

$$\overline{y}_{M''}^{T}(A''\overline{x} - b'') = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=m'+1}^{m'+m''} \overline{y}_i (\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{x}_j - b_i) = 0$$

$$\Leftrightarrow \overline{y}_i (\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{x}_j - b_i) = 0 \qquad (i = m'+1, m'+2, \cdots, m)$$

通过上述的分析证明，可以从形式上看出，对于约束条件中出现等式和不等式，即决策变量出现自由变量和非自由变量时，充要条件反映出局部性和双边性的特点。对于原问题和对偶问题两边都可以使用各自充要条件方程式，体现出一定的对称性，和对称形式互补松弛定理类似，但从形式看来不是全部应用而是局部的。那么到底互补松弛定理对于所有形式是否具有普遍的对称形式的充要条件呢？答案是肯定的。

为了清楚的说明这个问题，需要从最具有代表性，具有普遍性的的数学模型和最根本的通用的定理（即非对称式互补松弛定理）来说明。因为其他形式互补松弛定理，都可以通过通用互补定理直接推导出来。首先要说明非对称式互补松弛定理就是通用互补松弛定理。

2.2 非对称式互补松弛定理即通用互补松弛定理

非对称式互补松弛定理，利用的数学模型具有普遍的代表性，因此该定理可以称为通用互补松弛定理，可以称为最根本的互补松弛定理。

非对称式原问题 LP 及其对偶问题 LD 的数学模型如下，推导过程可以参考文献[4]的 51 页。

$$LP: \min z = c^T x$$
$$s.t. \quad Ax = b$$
$$x \geq 0$$
$$LD: \max \omega = b^T y$$
$$s.t. \; A^T y \leq c$$
y 自由

之所以该模型具有普遍的代表性，是因为任何其他形式的模型都可以转化为该形式。以原问题模型为例来说明。

（1）最大化问题，可以通过添加负号来转化为最小化问题。

（2）不等式约束，可以通过添加松弛变量或剩余变量转化为等式约束。

（3）非正变量，可以通过两边分别乘以（-1）转化为≥ 0的式子。

（4）对于自由变量，可以通过两个非负变量之差来转化。比如x为自由变量，转化$x = x' - x'', x' \geq 0, x'' \geq 0$。

（5）其实对自变量的符号无关紧要。因为在整个定理的推导过程中，并未涉及到决策变量的符号问题。

因此，上述模型具有普遍代表性，该定理即为通用互补松弛定理。

2.3 互补松弛定理的普遍对称性

经过研究发现，不管任何形式，互补松弛定理具有普遍的对称性。内容阐述如下。

扩展通用互补松弛定理 2.3：对于线性规划任何形式的原问题与对偶问题模型，其互补松弛定理都可以作为对称形式的互补松弛定理来使用，即都可以使用对称形式的 2 个充要条件（$\overline{x}^T(c - A^T\overline{y}) = 0$，$\overline{y}^T(A\overline{x} - b) = 0$）。

证明：

以通用互补松弛定理数学模型（即非对称形式数学模型）为数学模型。

因为原来定理已经证明充要条件为$\overline{x}^T(c - A^T\overline{y}) = 0$，即为一边的结论。我们只需再证明另外一边的结论$\overline{y}^T(A\overline{x} - b) = 0$成立即可。本节证明使用了 2 种方法，第三种证明方法见 2.4 节。

证法一：

必要性：因为原问题模型中保证了$(A\overline{x} - b) = 0$恒成立，则

$$\overline{y}^T(A\overline{x} - b) = 0$$

所以该式自然成立，不影响纯粹的充要条件。

充分性：已知$\overline{y}^T(A\overline{x} - b) = 0$，而本身$(A\overline{x} - b) = 0$，此式自然成立，不影响纯粹的充要条件。

因此，充要条件为$\overline{x}^T(c - A^T\overline{y}) = 0$，$\overline{y}^T(A\overline{x} - b) = 0$成立。

证法二：

由于通用互补松弛定理具有普适性，故可将其应用于其对偶问题上。即将上述模型中的对偶问题作为原问题，由通用互补松弛定理得，充要条件为：

$$\overline{y}^T(A\overline{x}-b)=0$$

原问题与对偶问题互为对偶关系，本质是一个关系。因此合并两个条件，它们的充要条件为 $\overline{x}^T(c-A^T\overline{y})=0$，$\overline{y}^T(A\overline{x}-b)=0$。

至此，定理证毕。

由于最具代表性的数学模型、最根本的互补松弛定理都体现出了对称性。所以其他形式自然也会体现出对称性。从本质上说，原问题和对偶问题的本质关系就是对偶关系，这个对偶关系本质的包含了所谓的对称性，原问题等式约束或不等式约束以及数量，与其对偶问题决策变量的自由与非自由性质以及数量直接对应。从这意义上说，表现出普遍的对称性也是不难理解的。

说明：以上定理可以作为任何形式互补松弛定理使用的指导原则，它是最宽泛的充要条件，不一定是纯粹的充要条件，其中可能出现自然成立的等式，对我们没有实际的使用价值，但它揭示了互补松弛定理的普遍对称性，可以广泛应用于各种形式数学模型，而不再受对称与否的限制，可以以此方便的推导出各种特定形式的纯粹充要条件。

定义 2.1 纯粹充要条件，是指在原来充要条件的基础上，去掉自然成立的等式，剩下来对我们有实际使用价值的充要条件。

2.4 对称式互补松弛定理也具有普遍代表性

既然互补松弛定理具有普遍对称性，那么对称形式的互补松弛定理是否具有普遍代表性呢。答案也是肯定的。

理由和上一节 2.3 节类似。

（1）最大化问题，可以通过添加负号来转化为最小化问题；

（2）不等式约束，数学模型中为$\geq$或$\leq$，等式约束（=）本来就包含其中。并且对于非负约束和非正约束，只需乘以（-1）即可转化。

（3）非正变量，可以通过两边分别乘以（-1）转化为≥ 0的式子。

（4）对于自由变量，可以通过两个非负变量之差来转化。比如 x 为自由变量，转化 $x=x'-x'', x'\geq 0, x''\geq 0$。

（5）其实对自变量的符号无关紧要。因为在整个定理的推导过程中，也不涉及到决策变量的符号问题。

综上所述，对称形式的互补松弛定理也具有普遍代表性，也就是说也可以称为另一种形式的通用互补松弛定理。该形式的互补松弛定理表现出对称形式，自然可以说明不管任何形式互补松弛定理具有普遍对称性。此为普遍对称性证法三。

既然如此，那么混合形式的互补松弛定理可以根据该定理十分简单的证明出来，即混合形式证明方法 2。

证明：

数学模型为（2-1）（2-2），设 $\overline{\boldsymbol{x}}$ 和 $\overline{\boldsymbol{y}}$ 分别是原问题 LP(2-1)及其对偶问题 LD(2-2)的可行解，由对称形式互补松弛定理可得，它们分别是 LP 和 LD 的最优解的充要条件是

$\overline{x}^T(c-A^T\overline{y})=0$，$\overline{y}^T(A\overline{x}-b)=0$

即，$\overline{x}_{N'}{}^T(c'-A_{N'}{}^T\overline{y})=0$，$\overline{x}_{N''}{}^T(c''-A_{N''}{}^T\overline{y})=0$

$\overline{y}_{M'}^T(A'\overline{x}-b')=0$，$\overline{y}_{M''}^T(A''\overline{x}-b'')=0$

又因为，$c'-A_{N'}{}^T\overline{y}=0$，即 $\overline{x}_{N'}{}^T(c'-A_{N'}{}^T\overline{y})=0$ 自然成立。

$A'\overline{x}-b'=0$，即 $\overline{y}_{M'}^T(A'\overline{x}-b')=0$ 自然成立。

以此，充要条件为

$\overline{x}_{N''}{}^T(c''-A_{N''}{}^T\overline{y})=0$，$\overline{y}_{M''}^T(A''\overline{x}-b'')=0$

3 互补松弛定理的本质阐述

定理 3.1（描述 1[4]）：设 $\overline{\boldsymbol{x}}$ 和 $\overline{\boldsymbol{y}}$ 分别是原问题 LP(1-1)及其对偶问题 LD(1-2)的可行解，则它们分别是 LP 和 LD 的最优解的充要条件是 $\overline{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\overline{\boldsymbol{y}})=0$。

特点：普遍适用，形式上表现出单边性，是最原始最根本的互补松弛定理。针对不同形式的问题必要条件有所变化，一般需要继续推导才可以得到纯粹的充要条件。

定理 3.2（描述 2[4]）：设 $\overline{\boldsymbol{x}}$ 和 $\overline{\boldsymbol{y}}$ 分别是原问题 LP(1-3)及其对偶问题 LD(1-4)的可行解，则它们分别是 LP 和 LD 的最优解的充要条件是

$$\overline{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\overline{\boldsymbol{y}})=0,\overline{\boldsymbol{y}}^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{b})=0.$$

或者写成[3,5]，$\overline{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{Y}_{\boldsymbol{S}}+\overline{\boldsymbol{y}}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{L}}=0$

其中松弛变量 $\boldsymbol{Y}_{\boldsymbol{S}}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\overline{\boldsymbol{y}}$，$\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{L}}=\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{b}.$

特点：也可以普遍适用，形式上表现出直接的对称性，可以直观方便的按对称形式使用，对实际问题，也可能出现非纯粹的充要条件，需要将进一步除去自然为零的式子。即纯粹充要条件可能是缩小的充要条件。

定理 3.3（描述 3）：对于线性规划中原问题和对偶问题，其可行解为最优解的充要条件是，各自模型中（原问题或对偶问题），所有各自非自由变量乘以其对偶问题中相应的约束条件差式（松弛变量或剩余变量）之积为零。

说明："对应"是指，一个问题的自变量与其对偶问题的约束条件式的序号对应关系。"约束条件差式"是指，约束条件式（等式或不等式，一般指不等式）用一边减去另一边的代数式，即不等式约束转化为等式约束时的松弛变量或剩余变量。

特点：普遍适用，具体条件的通俗描述，使用起来更加实用，不用刻意继续推导即可直接得出纯粹充要条件。

定理 3.4（描述 4）：对于线性规划任何形式的原问题与对偶问题模型，其互补松弛定理都可以作为对称形式的互补松弛定理来使用。

特点：从形式的深层出发，指出使用的指导原则和宽泛的充要条件，将各种形式统一为对称形式的使用，同样具有普遍适用性。

以上四种描述方法都是互补松弛定理的本质体现和概括。

4 结论

本文从传统的两种形式的互补松弛定理出发，建立混合形式数学模型，首次正式提出并证明了混合形式的互补松弛定理，然后从最根本的数学模型出发，用多种方法证明了互补松弛定理的普遍对称性，整理总结出互补松弛定理的 4 种表述形式。从本质上进行了深入的剖析，在很大程度上，消除了以往使用互补松弛定理对称形式与不对称形式区别的误区，可以放心应用于所有形式，使该定理得描述更加全面透彻，极大的扩展了互补松弛定理的应用理解，具有非常重要的意义。

5 致谢

第一作者衷心感谢蒋金山老师大力支持和耐心指导，同时感谢审稿人的辛苦工作。

[参考文献] (References)

[1] Frederick S.Hillier,Gerald J.Lieberman. Introduction to Operations Research(9th Ed)[M]. Beijing:Tsinghua University Press,2010.207-211.
[2] Hamdy A.Taha,etc. Operations Research:An Introduction(8th Ed)[M]. Pearson Education Asia Ltd Posts&Telecom Press,2007.156-165.
[3] Leonid Nison Vaserstein,Christipher Cattelier Byrne.Introduction to Linear Programming[M].Beijing:China Machine Press,2003.138 -141.
[4] 蒋金山,何春雄,潘少华.最优化计算方法[M].广州:华南理工大学出版社,2007.44-52.
[5] 程里民,吴江,张玉林.运筹学模型与方法教程[M].北京:北京大学出版社,1999.27-28.
[6] 谷源盛,肖智.运筹学[M].重庆:重庆大学出版社,2001.61-67.
[7] 谢可新,韩建,林友联.最优化方法（修订版）[M].天津:天津大学出版社,1997.90.
[8] 傅家良.运筹学方法与模型[M].上海:复旦大学出版社,2006.65-66.
[9] 谢可新,韩建,林友联.最优化方法（修订版）[M].天津:天津大学出版社,1997.90.
[10] 徐裕生,张海英.运筹学[M].北京:北京大学出版社,2006.39-41.