缺货量影响需求的变质性物品的库存模型[1]

周永务　曹宗宏
合肥工业大学管理学院,物流与供应链研究所,合肥(230009)
E-mail: caozonghong@ahau.edu.cn

摘要:在考虑变质性产品的市场需求率是库存水平的线性分段函数、缺货期的需求率与缺货量相关的情形下,本文研究了零售商如何制定订货策略,使其利润最大化的库存问题.理论证明了模型最优解的唯一存在性,同时提供了相应的求解方法.数值算例分析了参数对模型的影响.

关键词: 需求与库存水平相关;变质;短缺
中图分类号:O227

1. 引 言

经典的库存模型都是假设需求率与库存水平的变化无关.然而,文献[1,2]指出,某些商品的需求与其库存水平相关,原因之一是向顾客展示的商品越多,顾客对该产品就有更多的选择权,另外展示的产品也具有广告效应.文献[3]建立了需求是库存水平线性函数的变质性产品的库存模型,文献[4-10]都是对上述模型进行扩展.文献[4]建立了缺货时的需求率与缺货量有关的库存模型,文献[5,6]添加了通货膨胀和时间折扣这一因素.文献[7]建立了生产库存模型,该模型假设物品的生产成本是生产率的函数.文献[8]考虑产品在存贮一段时间后才变质的情况,文献[9,10]建立了允许延期付款的库存模型.

文献[3-10]假设需求是库存水平的线性函数,且库存水平对需求是正相关;因此,零售商为了追求利润最大化,可能会导致最高库存水平为为无穷大[4],这不符合实际情况.本文在已有模型的基础上,提出下列两点假设.第一,需求是库存水平的线性函数,该需求的特点是零售商可以通过提高库存水平来增加需求,但在实际中需求总有一个上限;第二,零售商为了降低订货固定成本,往往延长订货周期,因此考虑允许缺货.与文献[4,11]类似,本文考虑缺货时的需求率与该时刻的实际短缺数量有关.原因是实际短缺量越大,顾客损失率越大,该时刻的需求率越小,即单位时间内愿意加入到排队队列中来等候供货的顾客数会随着队列中排队顾客数的增加而减少.本文以零售商的单位时间平均利润为目标函数建立了库存模型,研究了零售商如何设计订货策略来实现利润最大化的问题;并从理论上分析了模型最优解的惟一存在性,同时提供了相应的求解方法.

2. 基本假定与记号

本文作如下假设:

(1)假设零售商面临的市场需求 $$D(t)=\begin{cases}\alpha+\beta S_0, & I(t)>S_0\\ \alpha+\beta I(t), & 0\le I(t)\le S_0\\ \alpha+\gamma I(t), & I(t)<0\end{cases} \tag{1}$$

其中 $\alpha\ge 0,\beta\ge 0,\gamma\ge 0$, $I(t)$ 表示时刻 t 的库存水平.式(1)作如下说明:①超过 S_0 部分的产品对需求不产生影响,即最大需求为 $\alpha+\beta S_0$;②缺货时,需求率 $D(t)$ 与实际短缺量 $-I(t)$ 有关.

[1]本课题得到高等学校博士学科点专项科研基金资助项目(项目编号:20060359007)的资助.

(2)零售商的订货前置期为零或常数,考虑零售商每次订货的固定成本,不考虑产品的运输等其他相关成本.

(3)产品的变质率θ假定是一个常数,变质产品无残值.

模型中其他符号说明如下:

p:单位产品的零售价格;

c:单位产品的成本价格;

h:单位产品单位时间的库存费用;

s_r:缺货时单位产品的缺货成本;

o_r:缺货时单位产品损失销售的机会成本;

c_r:一个周期零售商的固定订货成本;

t_1:一个周期开始到库存水平降为零所用的时间(决策变量);

T:零售商的补货周期(决策变量).

3 模型的建立和求解

3.1 模型的建立

每个周期开始时,零售商订购的Q个单位产品,一部分用来供应上一周期的缺货,余下的(记为I_0)存放在货栈内,随需求和变质而减少,在t_1时刻库存水平降为 0,此时面临缺货状态,到T时刻时零售商开始第二次补货.根据I_0与S_0的大小关系,得库存水平变化示意图如下.

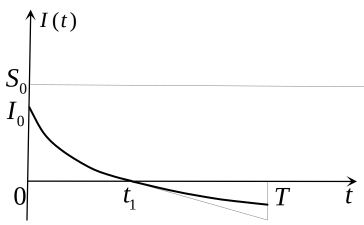

图 1a $I_0 \le S_0$时库存水平变化示意图

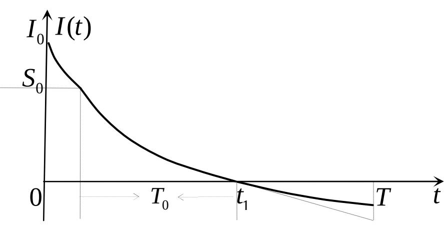

图 1b $I_0 \ge S_0$时库存水平变化示意图

由上图可得库存水平变化的状态方程为:

$$\frac{dI(t)}{dt}=\begin{cases}-\alpha-(\beta+\theta)I(t), & 0\le t\le t_1, t_1\le T_0\\ -\alpha-\beta S_0-\theta I(t), & 0<t\le t_1-T_0, t_1>T_0\\ -\alpha-(\beta+\theta)I(t), & t_1-T_0<t\le t_1, t_1>T_0\\ -\alpha-\gamma I(t), & t_1<t\le T\end{cases} \tag{2}$$

其中:T_0表示库存从S_0降到 0 时所需的时间.求解(2)式,得

$$I(t)=\begin{cases}\alpha(e^{(\beta+\theta)(t_1-t)}-1)/(\beta+\theta), & 0\le t\le t_1, t_1\le T_0\\ [\alpha+(\beta+\theta)S_0](e^{\theta(t_1-T_0-t)}-1)/\theta+S_0, & 0\le t\le t_1-T_0, t_1>T_0\\ \alpha(e^{(\beta+\theta)(t_1-t)}-1)/(\beta+\theta), & t_1-T_0<t\le t_1, t_1>T_0\\ \alpha(e^{\gamma(t_1-t)}-1)/\gamma, & t_1\le t\le T\end{cases} \tag{3}$$

当$t_1>T_0$时,由于$I(t)$在t_1-T_0处连续,所以

$$S_0=\alpha(e^{(\beta+\theta)T_0}-1)/(\beta+\theta) \tag{4}$$

于是零售商的最大库存水平为:

$$I_0=\begin{cases}\alpha(e^{(\beta+\theta)t_1}-1)/(\beta+\theta), & t_1\le T_0\\ [\alpha+(\beta+\theta)S_0](e^{\theta(t_1-T_0)}-1)/\theta+S_0, & t_1>T_0\end{cases}\tag{5}$$

所以,每个周期零售商的订货量为:

$$Q=I_0+\alpha[1-e^{\gamma(t_1-T)}]/\gamma\tag{6}$$

每个周期零售商的库存费用为:

$$h\int_0^{t_1}I(t)dt=\begin{cases}h\alpha\,[e^{(\beta+\theta)t_1}-(\beta+\theta)t_1-1]/(\beta+\theta)^2, & t_1\le T_0\\ h\{[\alpha+(\beta+\theta)S_0][e^{\theta(t_1-T_0)}-\theta(t_1-T_0)-1]/\theta^2+S_0(t_1-T_0)+(S_0-\alpha T_0)/(\beta+\theta)\}, & t_1>T_0\end{cases}\tag{7}$$

每个周期零售商的缺货成本为:

$$s_r\int_{t_1}^{T}-I(t)dt=s_r\alpha\,[e^{\gamma(t_1-T)}-\gamma(t_1-T)-1]/\gamma^2\tag{8}$$

每个周期零售商的机会损失成本为:

$$o_r[\alpha(T-t_1)+I(T)]=o_r\alpha\{T-t_1+[e^{\gamma(t_1-T)}-1]/\gamma\}\tag{9}$$

由上面的分析知,零售商单位时间平均利润为:

$$\pi=\{p[Q-\int_0^{t_1}\theta I(t)dt]-h\int_0^{t_1}I(t)dt-s_r\int_{t_1}^{T}-I(t)dt-o_r[\alpha(T-t_1)+\frac{\alpha}{\gamma}(e^{\gamma(t_1-T)}-1)]-cQ-c_r\}/T\tag{10}$$

其中(10)式中的第一项为销售收入,第二项为库存费用,第三项为短缺费用,第四项为机会损失费用,第五项为购买产品费用,第六项为零售商的固定订货费用.

将(5)-(9)式带入到(10)式,化简整理,得

$$\pi=\begin{cases}\pi_1(t_1,T)=\{\alpha A[e^{(\beta+\theta)t_1}-(\beta+\theta)t_1-1]/(\beta+\theta)^2-\alpha B[\,e^{\gamma(t_1-T)}-\gamma(t_1-T)-1]/\gamma^2\\ \qquad +(p-c)\alpha T-c_r\}/T & (t_1,T)\in E_1\\ \pi_2(t_1,T)=\{A[(\beta+\theta)S_0(t_1-T_0)+S_0-\alpha T_0]/(\beta+\theta)-\alpha B[\,e^{\gamma(t_1-T)}-\gamma(t_1-T)-1]/\gamma^2\\ \qquad -(\theta c+h)[\alpha+(\beta+\theta)S_0][e^{\theta(t_1-T_0)}-\theta(t_1-T_0)-1]/\theta^2+(p-c)\alpha T-c_r\}/T & (t_1,T)\in E_2\end{cases}\tag{11}$$

其中: $A=\beta p-(\beta+\theta)c-h$, $B=\gamma(p-c)+s_r+\gamma o_r$, $\pi_1(t_1,T)$ 和 $\pi_2(t_1,T)$ 的可行域分别为 $E_1=\{(t_1,T)\,|\,0\le t_1\le T_0,t_1\le T\}$ 和 $E_2=\{(t_1,T)\,|\,T_0\le t_1\le T\}$; $\Gamma=E_1\cap E_2$ 为 E_1 和 E_2 的共同边界线.

3.2 模型的求解

由于 π 是关于 (t_1,T) 的连续分段函数,所以零售商最优订货策略的求解过程如下:分别求出 $\pi_1(t_1,T)$ 在 E_1 和 $\pi_2(t_1,T)$ 在 E_2 的最大值,比较之,最大者就是其最优策略所对应的最大利润.即求下面 2 个优化问题(P1)和(P2).

$$\text{(P1)}\max\ \pi_1(t_1,T)\ \ s.t.\ \ (t_1,T)\in E_1,\ \ \pi_1\ge 0\,;\quad \text{(P2)}\max\ \pi_2(t_1,T)\ \ s.t.\ \ (t_1,T)\in E_2,\ \ \pi_2\ge 0$$

引理 1①在共同边界线 Γ 上满足 $\pi_1(T_0,T)=\pi_2(T_0,T)$ 和 $\partial\pi_1(t_1,T)/\partial t_1\,|_{t_1=T_0}=\partial\pi_2(t_1,T)/\partial t_1\,|_{t_1=T_0}$;②当 $t_1>T_0$ 时,有 $\pi_1(t_1,T)>\pi_2(t_1,T)$,即 $\pi_1(t_1,T)>\pi_2(t_1,T)$, $(t_1,T)\in E_2$;③若 $A\ge 0$,则零售商的最优订货策略在优化问题(P2)中取得.

引理 1 证明见附录,以下引理和定理的证明均见附录,不再赘述.引理 1 中的③说明,若

$A \ge 0$,则不需求解优化问题(P1);因此,下面在 $A < 0$ 时求解优化问题(P1).

由于 $\partial^2 \pi_1(t_1,T)/\partial t_1^{\,2} = [Ae^{(\beta+\theta)t_1} - Be^{\gamma(t_1-T)}]/T < 0$,所以 $\pi_1(t_1,T)$ 是 t_1 的上凸函数,因此,由极值存在的必要条件知,t_1 的最优解满足方程 $\partial\pi_1(t_1,T)/\partial t_1 = 0$,即满足下式:

$$\gamma A[e^{(\beta+\theta)t_1} - 1] = (\beta+\theta)B[e^{\gamma(t_1-T)} - 1] \tag{12}$$

设(12)式所确定 t_1 关于 T 的隐函数为 $t_1 = t_1(T)$,将其带入到目标函数 $\pi_1(t_1,T)$ 中,得

$$\pi_1(t_1(T),T) = \{\alpha A[e^{(\beta+\theta)t_1(T)} - (\beta+\theta)t_1(T) - 1]/(\beta+\theta)^2 - \alpha B[e^{\gamma(t_1(T)-T)} - \gamma(t_1(T)-T) - 1]/\gamma^2 + (p-c)\alpha T - c_r\}/T$$

记 $t_1^{\max} = \lim\limits_{T\to+\infty} t_1(T) = \ln[1-(\beta+\theta)B/(\gamma A)]/(\beta+\theta)$,下面给出 $\pi_1(t_1(T),T)$ 最大值的存在性和求解方法.

引理 2 设 $\kappa = c_r - \alpha[B/\gamma - A/(\beta+\theta)]t_1^{\max} + \alpha(\gamma-\beta-\theta)B/[(\beta+\theta)\gamma^2]$,①若 $\kappa < 0$,则 $\pi_1(t_1(T),T)$ 有惟一最大值点;②若 $\kappa \ge 0$,则 $\pi_1(t_1(T),T)$ 是 T 的增函数,无最大值,但是 $\lim\limits_{T\to+\infty}\pi_1(t_1(T),T) < 0$.

由引理 2 可得,当 $\kappa < 0$ 时,$\pi_1(t_1(T),T)$ 有惟一最大值点.由最值存在的必要条件,可得惟一最大值点就是方程 $d\pi_1(t_1(T),T)/dT = 0$ 的根,记为 $T^{(1)}$,即 $d\pi_1(t_1(T^{(1)}),T)/dT\,|_{T=T^{(1)}} = 0$.下面给出优化问题(P1)的最优解的求解方法.

定理 1①如果 $\kappa < 0$,若 $t_1(T^{(1)}) \le T_0$,则 $(t_1(T^{(1)}),T^{(1)})$ 是优化问题(P1)最优解;若 $t_1(T^{(1)}) > T_0$,则优化问题(P1)最优解在边界线 $\Gamma = E_1 \cap E_2$ 上取得.②如果 $\kappa \ge 0$,则优化问题(P1)无解.

结合引理 1 的结论可知,如果 $\kappa \ge 0$,则零售商采用任何订货策略,所获得的利润始终为负;因此,为了符合实际情况,本文假设 $\kappa < 0$.如果 $\kappa < 0$,则(P1)有惟一最优解 $(t_1(T^{(1)}),T^{(1)})$,此最优解是否为零售商的最优订货策略,见定理 2.

定理 2 若 $t_1(T^{(1)}) \le T_0$,则优化问题(P1)的最优解 $(t_1(T^{(1)}),T^{(1)})$ 就是零售商最优订货策略.

定理 2 说明,若 $t_1(T^{(1)}) \le T_0$,则不必求解优化问题(P2);否则,进入下一步,求解优化问题(P2).

由 $\partial^2\pi_2(t_1,T)/\partial t_1^{\,2} = -(\theta c+h)[\alpha+(\beta+\theta)S_0]e^{\theta(t_1-T_0)} - \alpha B\,e^{\gamma(t_1-T)} < 0$ 知,$\pi_2(t_1,T)$ 是关于 t_1 的上凸函数,从而 t_1 的最优解满足方程 $\partial\pi_2(t_1,T)/\partial t_1 = 0$,即满足下式:

$$(\theta c+h)[\alpha+(\beta+\theta)S_0][e^{\theta(t_1-T_0)} - 1]/\theta = \alpha B[1-e^{\gamma(t_1-T)}]/\gamma + AS_0 \tag{13}$$

若 $A \ge 0$,则(13)式可以确定一个隐函数.若 $A < 0$,设曲线 $t_1 = t_1(T)$ 和边界线 Γ 的交点坐标为 $(T_0, t_1^{-1}(T_0))$,则 $\partial\pi_1(t_1,T)/\partial t_1\,|_{(T_0,t_1^{-1}(T_0))} = 0$,由引理 1,得 $\partial\pi_2(t_1,T)/\partial t_1\,|_{(T_0,t_1^{-1}(T_0))} = 0$,即 $\alpha B[1-e^{\gamma(T_0-t_1^{-1}(T_0))}]/\gamma + AS_0 = 0$,所以 $\alpha B/\gamma + AS_0 > 0$,则(13)式也可以确定一个隐函数.因此,设(13)式所确定的隐函数为 $t_1 = t_2(T)$,将其带入到目标函数中,得

$$\begin{aligned}\pi_2(t_2(T),T) = \{&A[(\beta+\theta)S_0(t_2(T)-T_0) + S_0 - \alpha T_0]/(\beta+\theta) - \alpha B[e^{\gamma(t_2(T)-T)} - \gamma(t_2(T)-T) - 1]/\gamma^2 - (\theta c+h)\\ &\cdot[\alpha+(\beta+\theta)S_0][e^{\theta(t_2(T)-T_0)} - \theta(t_2(T)-T_0) - 1]/\theta^2 + (p-c)\alpha T - c_r\}/T\end{aligned}$$

由其优化的一阶条件,得

$$d\pi_2(t_2(T),T)/dT=\{(\theta c+h)[\alpha+(\beta+\theta)S_0][e^{\theta(t_2(T)-T_0)}-\theta(t_2(T)-T_0)-1]/\theta^2+\alpha B[e^{\gamma(t_2(T)-T)}-1]/\gamma^2$$

$$+\alpha B/\gamma[Te^{\gamma(t_2(T)-T)}-t_2(T)]-A[(\beta+\theta)S_0(t_2(T)-T_0)+S_0-\alpha T_0]/(\beta+\theta)+c_r\}/T^2\triangleq g(T)/T^2$$

显然 $d\pi_2(t_2(T),T)/dT=0\Leftrightarrow g(T)=0$.如果 $A\ge 0$,由(13)式知,则曲线 $t_1=t_2(T)$ 和直线 $t_1=T$ 有交点,设交点坐标为 (η,η) .记 $t_2^{\max}=\lim_{T\to\infty}t_2(T)=T_0+\ln\{1+\theta(\alpha B+\gamma AS_0)[\gamma(\theta c+h)(\alpha+(\beta+\theta)S_0)]\}/\theta$,

$$\tau\triangleq\lim_{T\to\infty}g(T)=[(\theta c+h)\frac{\alpha+(\beta+\theta)S_0}{\theta}+\frac{\alpha B}{\gamma}+AS_0]t_2^{\max}+\frac{\alpha B}{\gamma\theta}-\frac{\alpha B}{\gamma^2}+\frac{\beta(\theta p+h)}{\beta+\theta}[\alpha+(\beta+\theta)S_0]T_0+\frac{\beta AS_0}{\theta(\beta+\theta)}+c_r<0,$$

则优化问题(P2)最优解的存在性和求解方法见定理 3.

定理 3①如果 $\tau<0$,当 $A<0$ 时,或者 $A\ge 0$ 且 $g(\eta)\ge 0$ 时,则方程 $g(T)=0$ 有惟一根 $T^{(2)}$,且 $(t_2(T^{(2)}),T^{(2)})$ 为(P2)的最优解;当 $A\ge 0$ 且 $g(\eta)<0$ 时,则方程 $d\pi_2(T,T)/dT=0$ 有惟一实根 $T^{(3)}$,且 $(T^{(3)},T^{(3)})$ 为(P2)的最优解.②如果 $\tau\ge 0$,则(P2)无最优解.

总结以上求解过程,可得零售商最优订货策略的求解步骤如下:

Step1:如果 $A\ge 0$,计算 $g(\eta)$,若 $g(\eta)\ge 0$,转入第 2 步,若 $g(\eta)<0$,转入第 3 步;否则,如果 $A<0$,求解 $T^{(1)}$ 和 $t_1(T^{(1)})$,转入第 2 步;

Step2:如果 $t_1(T^{(1)})\le T_0$,则零售商的最优订货策略为 $t_1^*=t_1(T^{(1)})$ 和 $T^*=T^{(1)}$,结束;否则,如果 $t_1(T^{(1)})>T_0$,求解 $T^{(2)}$ 和 $t_2(T^{(2)})$,则零售商的最优订货策略为 $t_1^*=t_2(T^{(2)})$ 和 $T^*=T^{(2)}$,结束;

Step3:求解 $T^{(3)}$,则零售商的最优订货策略为 $t_1^*=T^{(3)}$ 和 $T^*=T^{(3)}$,结束

4 数值算例

假设库存系统的相关参数如下:$\alpha=100,p=20,c=5,h=2,s_r=0.5,o_r=0.5,c_r=500,T_0=1.3$;计算 $S_0=164.62$,利用 Matlab7.0 可求出不同状态下的各项指标.

表 1 模型参数库存模型的影响

$\gamma=0.5,\theta=0.05$				$\beta=0.3,\theta=0.05$				$\beta=0.3,\gamma=0.5$			
β	I_0	Q	π	γ	I_0	Q	π	θ	I_0	Q	π
0.3	346.18	351.12	1463.50	0.3	351.23	378.14	1704.71	0.03	339.69	365.72	1613.17
0.4	406.28	409.08	1655.09	0.4	339.07	363.08	1559.09	0.05	320.93	351.12	1463.50
0.5	473.15	474.58	1873.63	0.5	331.59	351.12	1463.50	0.07	229.51	265.16	1268.67
0.6	541.89	542.61	2121.03	0.6	289.37	307.13	1297.68	0.10	192.78	231.59	1134.05

从表 1 看出,当参数 β 增加时,零售商的利润 π,Q 和 I_0 都增加,原因是 β 是需求对库存水平的变化率,β 越大,增加单位库存所对应的需求量增加越大,因此零售商愿意提高库存水平 I_0.当 γ 增加时,π 减少,$Q-I_0$ 减小(即缺货期减少),理由是 γ 越大,缺货时单位时间的损失销售越多,因此零售商通过缩短缺货时间来减小损失.当 θ 增加时,变质的产品越多,由于变质品无残值,因此零售商通过降低 I_0 来减小损失;同时 $Q-I_0$ 增大(即零售商增加缺货期),原因是缺货期发生是无产品变质.

5 结束语

本文建立了需求有上限,允许缺货且缺货期的需求与缺货量有关的变质品的库存模型.重点讨论了零售商的最优订货的求解问题,给出了相应的求解算法;并且通过数值算例对模型中相关参数进行灵敏度分析.对于多产品销售等情形是可作为下一步研究的方向之一.

参考文献

[1]Levin P I, McLaughlin C P, Lamone R P, *et al*. Productions/Operations Management: Contemporary Policy for Managing Operating systems[M]. New York: McGeaw-Hill, 1972: p373.

[2]Silver E A. Peterson R. Decision Systems for Inventory Management and Production Planning, 2nd Ed.[M]. New York: Wiley, 1985.

[3]Mandal B N, Phaujdar S. An inventory model for deteriorating items and stock-dependent consumption rate[J]. Journal of the Operational Research Society, 1989(b),40(5):483-488.

[4] Padmanabhan G, Prem Vrat. A EOQ models for perishable items under stock dependent selling rate [J]. European Journal of Operational Research, 1995, 86(2):281-291.

[5]Ouyang L-Y, Hsieh T-P, Dye C-Y. An inventory model for deteriorating items with stock dependent demand under the conditions of inflation and time-value of money[J]. Engineering Economist, 2003, 48(1):52-68.

[6]Fariborz Jolai R, Tavakkoli-Moghaddam M, Rabbaniand M R, *et al*. An economic production lot size model with deteriorating items, stock-dependent demand, inflation, and partial backlogging[J]. Applied Mathematics and Computation, 2006, 181(1):380-389.

[7] S Sana, K S Chaudhuri. On a volume flexible stock-dependent inventory model[J]. Advanced Modeling and Optimization.2003,5(3):197-210.

[8]Kun-Shan Wu, Liang-Yuh Ouyang, Chih-Te Yang. An optimal replenishment policy for non-instantaneous deteriorating items with stock-dependent demand and partial backlogging[J]. Int .J. Production Economics, 2006, 101(2):369–384.

[9]Hardik Soni, Nita H Shah. Optimal ordering policy for stock-dependent demand under progressive payment scheme[J]. European Journal of Operational Research, 2008, 184(1):91-100.

[10]Shib Sankar Sana, K S Chaudhuri. A deterministic EOQ model with delays in payments and price-discount offers[J]. European Journal of Operational Research, 2008, 184(2):509-533.

[11]Min Jie, Zhou Yong-wu, Zhao Ju. An Inventory Model for Perishable Items with Maximum Customer Waiting Time under Inflation[J]. Mathematical Application, 2007, 20(4):688-696.

附录.引理 1 证明. 记 $\pi_1(t_1,T)-\pi_2(t_1,T)\triangleq\varphi(t_1)/T$,易验证 $\varphi(T_0)=0$, $\varphi'(T_0)=0$ 和 $\varphi'(t_1)=\{\alpha A[e^{(\beta+\theta)t_1}-1]/(\beta+\theta)-AS_0+(\theta c+h)[\alpha+(\beta+\theta)S_0][e^{\theta(t_1-T_0)}-1]/\theta\}/T>0(t_1>T_0)$,所以①,②结论成立.③由于 $B>0$,若 $A\ge 0$,则 $\partial\pi_1(t_1,T)/\partial t_1=\{\alpha A[e^{(\beta+\theta)t_1}-1]/(\beta+\theta)+\alpha B[1-e^{\gamma(t_1-T)}]/\gamma\}/T>0$ 说明 $\pi_1(t_1,T)$ 是 t_1 的增函数.因此 $\pi_1(t_1,T)$ 的最大值在 E_1 的边界线上取得.取 $t_1=T$ 并带入到 $\pi_1(t_1,T)$,得 $d\pi_1(T,T)/dT=\{\alpha A[(\beta+\theta)Te^{(\beta+\theta)T}-e^{(\beta+\theta)T}+1]/(\beta+\theta)^2+c_r\}/T^2>0$,说明 $\pi_1(T,T)$ 是 T 的增函数,但是 $t_1\le T_0$,所以 $t_1=T_0$,因此优化问题(P1)的最大值在 Γ 上取得.容易验证 $\pi_1(T_0,T)=\pi_2(T_0,T)$,故(P2)的最优解不小于(P1)的最优解,所以零售商的最优订货策略在(P2)中取得.

引理 2 证明. 设 $d\pi_1(t_1(T),T)/dT=f(T)/T^2$,其中 $f(T)=\alpha A\{Te^{(\beta+\theta)t_1(T)}+[1/\gamma-1/(\beta+\theta)](e^{(\beta+\theta)t_1(T)}-1)\}/(\beta+\theta)+[\alpha B/\gamma-\alpha A/(\beta+\theta)][T-t_1(T)]+c_r$,则 $d\pi_1(t_1(T),T)/dT=0\Leftrightarrow f(T)=0$.由(12)可得, $dt_1(T)/dT>0$,所以 $df(T)/dT=T\alpha Ae^{(\beta+\theta)t_1(T)}dt_1(T)/dT<0\ \ (A<0)$,即 $f(T)$ 是 T 的减函数.由于 $\lim_{T\to 0^+}t_1(T)=0$ 和 $\lim_{T\to+\infty}t_1(T)=t_1^{\max}$,所以 $\lim_{T\to 0^+}f(T)=c_r>0$ 和 $\kappa\triangleq\lim_{T\to+\infty}f(T)$.若 $\kappa<0$,则存在惟一 $T^{(1)}\in(0,+\infty)$ 满足 $f(T^{(1)})=0$,且 $d^2\pi_1(t_1(T),T)/dT^2|_{T=T^{(1)}}=f'(T^{(1)})/(T^{(1)})^2<0$,说明 $\pi_1(t_1(T),T)$ 在点 $(t_1(T^{(1)}),T^{(1)})$ 处取得最大值.若 $\kappa\ge 0$,则 $f(T)>0,T\in(0,+\infty)$,所以 $d\pi_1(t_1(T),T)/dT=f(T)/T^2>0$,说

明$\pi_1(t_1(T),T)$是T的增函数,无最大值点,但是$\lim\limits_{T\to+\infty}\pi_{r1}(t_1(T),T)=-(s_r/\gamma+o_r)\alpha<0$.

定理 1 证明. ①如果$\kappa<0$,由引理 1 中的③知,$\pi_1(t_1(T^{(1)}),T^{(1)})$为$\pi_1(t_1(T),T)$的最大值.若$t_1(T^{(1)})\le T_0$,则$(t_1(T^{(1)}),T^{(1)})\in E_1$,所以$(t_1(T^{(1)}),T^{(1)})$是(P1)的最优解.若$t_1(T^{(1)})>T_0$,则(P1)的最优解在$E_1$的边界线$\Gamma$上取得,但不会在边界线$\Gamma_1=\{(t_1,T)\,|\,0\le t_1=T\le T_0\}$上取得.事实上,假设(P1)最优解在$\Gamma_1$的某个点$(T',T')$处取得,在方程(12)中令$T=T'$,解出$t_1(T')$,显然点$(t_1(T'),T')\in E_1$,且$\pi_1(t_1(T'),T')>\pi_1(T',T')$,这与$(T',T')$是最大值点矛盾,因此(P1)最优解在$\Gamma$上取得.②如果$\kappa\ge 0$,由引理 2 知,$\pi_1(t_1(T),T)$是$T$的增函数,且$\lim\limits_{T\to+\infty}\pi_1(t_1(T),T)=-(s_r/\gamma+o_r)\alpha<0$,所以$\pi_1(t_1,T)<0,\ \forall\ (t_1,T)\in\{(t_1,T)\,|\,0\le t_1\le T\}$.

定理 3 证明. 由于$g'(T)=\alpha BT\cdot e^{\gamma(t_2(T)-T)}[dt_2(T)/dT-1]<0$,故$g(T)$是$T$的减函数.若$\tau\ge 0$,则$g(T)>0$,所以$\pi_2(t_2(T),T)$是$T$的增函数,无最大值.若$\tau<0$,当$A<0$时,由于$t_1(T^{(1)})>T_0$,所以$f(t_1^{-1}(T_0))>0$,由于曲线$t_1=t_1(T)$和$t_1=t_2(T)$相交于点$(T_0,t_1^{-1}(T_0))$,容易验证$g(t_1^{-1}(T_0))=f(t_1^{-1}(T_0))>0$,故方程$g(T)=0$在$((t_1^{-1}(T_0),+\infty)$有惟一实根.当$A\ge 0$时,设曲线$t_1=t_2(T)$和直线$t_1=T$的交点坐标为$(\eta,\eta)$,如果$g(\eta)\ge 0$,则方程$g(T)=0$在$[\eta,+\infty)$上有惟一实根(记为$T^{(2)}$),则$\pi_2(t_2(T^{(2)}),T^{(2)})$为$\pi_2(t_2(T),T)$的最大值.当$A\ge 0$时,若$g(\eta)<0$,见引理$2'$.

引理$2'$:若$A\ge 0$,且$g(\eta)<0$,则$\pi_{r2}(t_2,T)$在线段$L=\{(t_1,T)\,|\,t_1=T,T_0\le T\le\eta\}$取得惟一最大值.

引理$2'$证明.由于$\pi_{r2}(t_1,T)$是t_1的上凸函数,所以$\pi_2(t_1,T)$的最大值点一定在曲线$t_1=t_2(T)$上取得.任作水平直线$l:T=a$,若$a>\eta$,则$\pi_2(t_1,T)$在直线l上的最大值点是在与曲线$t_1=t_2(T)$的交点$(t_2(a),a)$处取得,由于$g(\eta)<0$,故$\pi_2(t_2(T),T)$在$[\eta,+\infty)$是减函数,所以$\pi_2(t_2(a),a)<\pi_{r2}(\eta,\eta)$.若$T_0\le a\le\eta$,则$\pi_2(t_1,T)$在直线$l$的最大值点在与线段$L$的交点处取得.综上所述,(P2)的最大值在线段$L$上取得.易证$\pi_{r2}(T,T)$是$T$的单峰函数,且$d\pi_2(T,T)/dT|_{T=T_0}=\{\alpha A[(\beta+\theta)T_0e^{(\beta+\theta)T_0}-e^{(\beta+\theta)T_0}+1]/(\beta+\theta)^2+c_r\}/T_0^2>0$和$d\pi_2(T,T)/dT|_{T=\eta}=g(\eta)/\eta^2<0$,故方程$d\pi_2(T,T)/dT=0$在$(T_0,\eta)$内有惟一实根(记为$T^{(3)}$),则$(T^{(3)},T^{(3)})$为(P2)的最优解.

①由以上证明易得.②如果$\tau\ge 0$,则$\pi_2(t_2(T),T)$是增函数,$\lim\limits_{T\to+\infty}\pi_2(t_2(T),T)=-\alpha(s_r/\gamma+o_r)<0$,说明对$\forall(t_1,T)\in E_2$,都有$\pi_2(t_1,T)<0$,所以(P2)无最优解.

Inventory model with demand influenced by shortage for deteriorating items

Zhou Yong-wu   Cao Zong-hong

Institute of Logistics and Supply Chain Management, Hefei University of Technology, Hefei (230009), , China

Abstract

Under the situation of considering linearly stock-dependent demand and allowable shortage, where the backlogging demand is influenced by the negative inventory level during the stock out period, the paper studies how the retailer designs the strategies so as to maximize his/her own profit. The uniqueness and existence of optimal strategies are testified theoretically, and the simple resolving method is afforded. A numerical example was offered to illustrate the model.

Key words: stock-level-dependent demand; deterioration; shortage