图上字典序积的非零三流问题

徐永[1]，舒驰[2]
[1]华中师范大学数学与统计学学院，武汉(430079)
[2]武汉理工大学计算机学院，武汉(430079)
E-mail：shuchi1025@163.com

摘　要：在这篇文章中，我们研究了两个图的字典序积允许3—流的情况，那就是两个非平凡图的字典序积一定允许3—流通过。本文首先将图进行分解，分解后的图就是一些路和圈，路和路的字典序积，路和圈的字典序积，圈和圈的字典序积都是Z_3—联通的,并且将它们粘起来还是Z_3—联通的，这就得到了本文的结论。3—流问题在图论中有广泛的研究，所以本文的研究是非常有意义的，解决了除图的笛卡儿积和张量积后的又一个两个图的积的问题。

关键词： 整数流；字典序积； Z_3—联通

1. 引言

本文中的所有图都是简单联通图。一个图叫做平凡图，如果它与K_1同构。分别把长度为n的路和圈定义为P_n和C_n。一个图是偶图如果它的所有点都是偶度点，这样的图称为欧拉图。

令D为图G的一个方向，令$f:E(G)\to Z$，$s.t. -k<f(e)<k$，$\forall e\in E(G)$。序偶(D,f)是G的k—流，如果满足条件

$$\sum_{e\in E^+(v)} f(e)=\sum_{e\in E^-(v)} f(e),\quad \forall v\in V(G)$$

其中$e\in E^+(v)$，$e\in E^-(v)$分别表示方向D在点v上出边的集合和入边的集合。

一个k—流(D,f)是处处非零的（或简称为NZ）如果$f(e)\neq 0$，$\forall e\in E(G)$。

令G是一个无向图，A是一个非平凡的阿贝尔加群，A^*是A中非零元素所构成的集合。我们定义

$$F(G,A)=\{f\mid f:E(G)\to A\}\text{和}F^*(G,A)=\{f\mid f:E(G)\to A^*\}。$$

对于每一个$f\in F(G,A)$，f的边界函数$\partial f:V(G)\to A$定义如下：

$$\partial f(v)=\sum_{e\in E^+(v)} f(e)-\sum_{e\in E^-(v)} f(e),$$

其中“$\sum$“指的是A中的加法。我们定义

$$Z(G,A)=\{b\mid b:V(G)\to A,\ \sum_{v\in V(G)} b(v)=0\}。$$

一个G中的A—处处非零流（简称A—NZF）是一个函数$f\in F^*(G,A)$使得$\partial f=0$成立。对于任意的$b\in Z(G,A)$，如果有一个函数$f\in F^*(G,A)$使得$\partial f=b$成立，那么我们称f是一个(A,b)—NZF。

一个无向图G成为A—联通的，如果G有一些定向G'使得对于每一个$b\in Z(G',A)$，

都存在一个(A,b)—NZF。同样的，G 允许一个 A—NZF 通过当G 有一些定向G'使得G'允许一个 A—NZF 通过。

$k-NZF$ 的概念是由 Tutte 在[1,2]中提出的。Tutte[1]证明了一个三次方图允许一个$3-NZF$ 通过当且仅当它是$k-$面可着色的。此外，每一个欧拉图都允许$2-NZF$ 通过。关于$k-NZF$ 问题的一些深入研究在[3]中。A—连通性的概念是 Jaeger 等人在[10]中提出的，A—NZF 与A—连通性有密切关联。

下面我们来考虑笛卡儿积上的处处非零流。两个图G_1和G_2的笛卡儿积是图$G_1 \square G_2$，其中点集$V(G_1)\times V(G_2)=\{(u,v):u\in V(G_1),v\in V(G_2)\}$，$(u_1,v_1)$和$(u_2,v_2)$相邻如果要么在$G_1$中$u_1=u_2$，在$G_2$中$v_1$和$v_2$相邻，要么在$G_2$中$v_1=v_2$，在$G_1$中$u_1$和$u_2$相邻。

定理 1.1（Imrich and Skrekovski[4]）令G_1,G_2是两个非平凡连通图，那么$G_1 \square G_2$允许

（i）$3-NZF$ 通过当G_1和G_2都是两部图

（ii）$4-NZF$ 通过，一般地

两个图的张量积$G_1\times G_2$ $G_1\times G_2$上相邻当在G_1中u_1和u_2相邻以及在G_2中v_1和v_2相邻

令Φ是如下的一类图：

（i）$K_2\in\Phi$

(ii) 对于任意的两个图$H_1,H_2\in\Phi$,由一条边把H_1和H_2连接起来的一个图仍在Φ中

定理 1.2（Z.Zhang, Y.-R Zheng, and Aygul Mamut [9]）令G_1是一个图，并且$\delta_{G_1}\geq 2$，G_2是不在Φ中的一个图，那么$G_1\times G_2$是一个$3-NZF$ 。

既然如此，我们还可以来考虑下图G_1和G_2的字典序积。两个图的字典序积$G_1 \square G_2$是指点集$V(G_1)\times V(G_2)$，(u_1,v_1)和(u_2,v_2)相邻，当$u_1=u_2$，v_1和v_2在G_2中相邻或者u_1和u_2相邻。下面就来考察下G_1和G_2的字典序积的 3—流问题。

2. 预备知识

在这一章中，我们将列出一些对这篇文章的证明非常有用的结论。

令G是一个图，又设$e\in E(G)$是一条边，在图G中把边e收缩成一点（若e是环，这等价于把e去掉；若e不是环，这等价于把e去掉，同时把e的两个顶点叠合成一个顶点），所得到的图称为图G的一个**收缩**。我们用G/e来表示从图G把e缩掉的收缩。若$X\subseteq E(G)$是个子集，则用G/X来表示从图G中逐次把X中的边缩掉的收缩。

性质 2.1（Lai[6]）令A是一个阿贝尔群。那么$\langle A\rangle$满足下面的性质：

$(C1) K_1\in\langle A\rangle$；

$(C2)$ 如果$G\in\langle A\rangle$并且$e\in E(G)$，那么$G/e\in\langle A\rangle$；

$(C3)$ 如果H是G的一个子图,$H\in\langle A\rangle$，$G/H\in\langle A\rangle$，那么$G\in\langle A\rangle$。

引理 2.2（Lai[6]）令A是一个阿贝尔群，C_n是n个点的圈（其中$n\geq 1$），那么$C_n\in\langle A\rangle$当且仅当$|A|\geq n+1$。

引理 2.3（Lai,Xu and Zhang[7]）$W_{2n}\in\langle Z_3\rangle$。

引理 2.4 K_n^- 和 K_n $(n \ge 5)$ 是 Z_3—流可收缩的。

引理 2.5（Fan,Lai,Xu and Zhang[8]）一个图是 Z_k—联通的 $\Leftrightarrow$ 它是 Z_k—流可收缩的。

3. 主要结论

在这一章中，我们将研究图的字典序积允许 $3-NZF$ 的问题。

首先，对于任意两点 $v_1 \in V(G_1)$ 和 $v_2 \in V(G_2)$，有 $d_{G_1 \square G_2}(v_1,v_2) = d_{G_1}(v_1) \cdot d_{G_2}(v_2)$ $+d_{G_1}(v_1) + d_{G_2}(v_2)$。

那么，我们可以得到

引理 3.1 令 G_1, G_2 是两个偶图，则 $G_1 \square G_2$ 允许 $2-NZF$ 通过。

推论 3.2 $C_m \square C_n$ 允许 $2-NZF$ 通过，$\forall m \ge n \ge 2$。

引理 3.3 $C_m \square C_n \in \langle Z_3 \rangle$，$\forall m \ge n \ge 2$。

证明：如果 $m \ge 2$，$n = 2$ 那么 $C_m \square C_2$ 包含 C_2，由引理 2.2，$C_2 \in \langle Z_3 \rangle$，且 $C_m \square C_2 / C_2 \in \langle Z_3 \rangle$，由引理 2.1 知，$C_m \square C_n \in \langle Z_3 \rangle$。

如果 $m \ge n \ge 3$，那么 $C_m \square C_n$ 包含 W_4，由引理 2.3 知，$W_4 \in \langle Z_3 \rangle$，记 $C_m \square C_n / W_4$ 为 G'，则 G' 包含 C_2，再由引理 2.2 知，$C_2 \in \langle Z_3 \rangle$，且 $G' / C_2 \in \langle Z_3 \rangle$，由引理 2.1 知，$C_m \square C_n \in \langle Z_3 \rangle$。

引理 3.4 $P_3 \square P_3 \in \langle Z_3 \rangle$.

证明：$P_3 \square P_3$ 包含一个 W_4，其中 $W_4 \in \langle Z_3 \rangle$，$P_3 \square P_3 / W_4$ 包含 C_2，由引理 2.2，$C_2 \in \langle Z_3 \rangle$，那么由引理 2.1 知，$P_3 \square P_3 / W_4 \in \langle Z_3 \rangle$，则 $P_3 \square P_3 \in \langle Z_3 \rangle$。

推论 3.5 $P_m \square P_n \in \langle Z_3 \rangle$，$\forall m \ge n \ge 3$。

证明：如果 $m = n = 3$，由引理 3.4 知，$P_3 \square P_3 \in \langle Z_3 \rangle$。

如果 $m \ge 4$，$n = 3$，那么 $P_m \square P_3$ 包含 W_4，其中 $W_4 \in \langle Z_3 \rangle$，将 $P_m \square P_3 / W_4$ 记为 G'，易知 G' 包含 C_2，由引理 2.2，$C_2 \in \langle Z_3 \rangle$，则 $G' \in \langle Z_3 \rangle$，由引理 2.1 知，$P_m \square P_3 \in \langle Z_3 \rangle$。

如果 $m \ge n \ge 4$，那么 $P_m \square P_n$ 包含 W_4，由引理 2.3 知，$W_4 \in \langle Z_3 \rangle$，记 $P_m \square P_n / W_4$ 为 G'，则 G' 包含 C_2，再由引理 2.2 知，$C_2 \in \langle Z_3 \rangle$，且 $G' / C_2 \in \langle Z_3 \rangle$，则 $G' \in \langle Z_3 \rangle$，再由引理 2.1 知，$P_m \square P_n \in \langle Z_3 \rangle$。

引理 3.6 $C_m \square P_n \in \langle Z_3 \rangle, \forall m \ge n \ge 2$.

证明：如果 $m = 2$，$n \ge 2$，那么 $C_2 \square P_n$ 包含 C_2，由引理 2.2，$C_2 \in \langle Z_3 \rangle$，$C_2 \square P_n / C_2$ 包含 C_2，则 $C_2 \square P_n / C_2 \in \langle Z_3 \rangle$，由引理 2.1 知，$C_2 \square P_n \in \langle Z_3 \rangle$。

如果 $m = 3$，$n = 2$，$C_3 \square P_2 \cong K_6$，由引理 2.4、2.5 知，$K_6 \in \langle Z_3 \rangle$，则 $C_3 \square P_2 \in \langle Z_3 \rangle$。

如果 $m \ge n \ge 3$，$C_m \square P_n$ 包含一个 W_4，其中 $W_4 \in \langle Z_3 \rangle$，将 $C_m \square P_n / W_4$ 记为 G'，则 G' 包含 C_2，再由引理 2.2 知，$C_2 \in \langle Z_3 \rangle$，且 $G' / C_2 \in \langle Z_3 \rangle$，则 $G' \in \langle Z_3 \rangle$，再由引理 2.1 知，$C_m \square P_n \in \langle Z_3 \rangle$。

下面就来证明这篇文章的主要结论，首先介绍一个定义

$(*)$我们把点分为不动点和可动点两类，令v是度≥ 3的可动点，将它分成一个度为 2 的点v_1和度为$d(v)-2$的点v_2，令v_1为不动点，v_2为可动点。

定理 3.7 令$G_1 \square G_2$是两个非平凡图的字典序积，那么$G_1 \square G_2 \in \langle Z_3 \rangle$。

证明：首先假设G是一个非平凡图，所有点都是可动点，我们对图G反复应用运算$(*)$使之变为图G^*，直到G^*中所有可动点的度<3。

因为经过运算$(*)$后，所有不动点的度都为 2，我们推断G^*的联通分支是一些路和圈。显然这样的路由可动端点，我们想要G^*有下面的性质：

(I) G^*中每个圈的可动点数不是一个。

显然G有性质(I)。下面我们将来描述如何通过应用$(*)$使得拥有性质(I)。

令n—环是一个有n个圈和一个公共点的图，假设这个点是图中唯一一个可动点。我们发现在构造G^*的过程中，避免n—环的产生，性质(I)就保持。

假设$\hat{G}$是构造过程中反复应用$(*)$没有n—环的一个图，$v \in V(\hat{G})$是度≥ 3的一个可动点。假设对v应用$(*)$后我们获得一个拥有m—环的图$\hat{G}$。显然，v_1或者v_2是这个m—环的一个点。如果v_1和v_2在同一个分支，那么显然v属于$\hat{G}$的一个$m+1$—环，所以我们假设v_1和v_2属于$\hat{G}$上的不同分支。

现在假设v_1属于一个m—环，那么v_1多分支包含不同于v_2的一个可动点。分别把$\hat{G}$中的边v_1x_1和v_2y用v_1y和v_2x_1代替，并记为G'。显然G'能够通过$\hat{G}$在v上使用$(*)$得到，发现v_1和v_2属于G'中的同一个分支，这个分支至少包含两个可动点，所以G'不含n—环。

最后假设v_1不属于一个m—环而v_2属于，那么包含v_1的分支不是一个有可动点的圈，否则v在$\hat{G}$的$m+1$—环中。现在，按照上面的方式构造G'，它不包含n—环。

下面是一个显然的结论：

(II) 令H是一个包含可动点和不动点的图，如果图$G^* \square_w H$允许一个NZ k—流通过，那么$G \square_w H$也是。

现在，令G_1和G_2是两个非平凡图，G_1^*和G_2^*由G_1和G_2分别按照上面的方式构造出来的两个图。研究积$H_1 \square_w H_2$，其中H_i是G_i^*的一个分支，$i \in \{1,2\}$。因为由性质(I)知，G_1^*和G_2^*的分支是圈和拥有可动点的路，，那么$H_1 \square_w H_2$就同胚于$C_m \square C_n$、$P_m \square P_n$或$C_m \square P_n$中的一个。

所以，由引理 3.3、3.5、3.6 知，$G_1 \square G_2 \in \langle Z_3 \rangle$。

4. 总结

本文通过对两个图上的笛卡儿积和张量积的三流问题的研究，将其推广到两个图上的字典序的三流问题的研究。所采取的方法是将两个图作字典序积后的图分解成一些路和路的字典序积，路和圈的字典序积，圈和圈的字典序积，这三类图都是Z_3—联通的，从而将它们粘起来还是Z_3—联通的，所以得到了这篇文章的主要结果，两个图的字典序积是Z_3—联通的。

参考文献

[1] Tutte, *On the imbedding of linear graphs in surfaces,* Proc.London Maths. Soc. 51(1954)474-483

[2] W.T. Tutte, *A contribution to the theory of chromatic polynomials,* J.Canad.math.Soc.6(1954)80-91

[3] C.-Q.Zhang, *Integer flows and cycle covers of graphs,* Marcel Dekker Inc., New York,1997.

[4] W.Imrich and R.Skrekovski, *A theorem on integer flows on Catesian products of graphs,* J Graph Theory 43(2003),93-98.

[5] J.A.Bondy and U.S.R.Murty, *Graph theory with applications* ,Macmillan,London,1976.

[6]H.-J.Lai, *Group connectivity of 3-edge-connected chordal graphs*,Graphs and Combinatorics.16(2000), 165-176

[7] H.-J. Lai, R. Xu, and C.-Q. Zhang, *Group connectivity of trangularly connected graphs,* submitted

[8]G.-H. Fan, H.-J. Lai, R. Xu, and C.-Q. Zhang, *Nowhere-zero 3-flows in trangularly connected graphs,* Journal of Combinatorial Theory, Series B 98(2008)1325-1336

[9]Z.Zhang, Y.-R Zheng, and Aygul Mamut, *Nowhere-zero flows in Tensor product of graphs,* J Graph Theory

[10]F.Jaeger, N.Linial, C.Payan, and M.Tarsi, *Group connectivity of graph—a nonhomogeneous analogue of nowhere-zero flow properties,* J.Combin.Theory.Ser.B56(1992)165-182

Nowhere-Zero 3-Flows in lexicographic products of Graphs

Shuchi[1], Xuyong[2]

[1]School of mathematics and statistics, HuaZhong Normal University, Wuhan(430079)

[2]Computer science and technology, Wuhan University of Technology, Wuhan (430079)

Abstract

In this article,we looked at the lexicographic product of two nontrivial graphs admites a nowhere-zero 3-flow. First of all,we decomposite the graph, the graph which were decomposited are some path and cycle,and the lexicographic product of path and path,path and cycle,cycle and cycle are Z_3-connected.Then stick these graphs up are Z_3-connected,too.We can observe the mian result.In graph thoery,there are a wide range of reserch in the 3-flow problem,so this study is very significant.It resolve another 3-flow problem of products in graphs,in addition to the Cartesian product and the tensor product of two graphs.

Keywords: Nowhere-zero flow; lexicographic product; Z_3-connected

作者简介：舒驰，女，1984 年生，硕士研究生，主要研究方向是运筹学与图论。