

对 K 分布形状参数的 M 估计器的再改进

李大朋 姚迪*

(北京理工大学电子信息技术学院 北京 100081)

摘要: K 分布形状参数的 M 估计器是一种估计精度比较高的估计器, 2005 年由郝程鹏提出, 2007 年得到了进一步的改进。该文对 2007 年的改进的 M 估计器进行了进一步的改进, 省去了其中的一些中间环节, 仿真实验证明, 该文方法显著提高了估计器的精度与效率。

关键词: 参数估计器; K 分布; M 估计器

中图分类号: TN911.23

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2011)07-1752-04

DOI: 10.3724/SP.J.1146.2010.00958

A Further Enhanced M-estimator for the K-distribution Shape Parameter

Li Da-peng Yao Di

(School of Information and Electronics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

Abstract: M-estimator is a new estimator presented by Hao Cheng-peng in 2005, which possesses higher accuracy in the estimation of shape parameter of K-distribution and is enhanced in 2007. In this paper, a further enhanced M-estimator is proposed based on the enhanced M-estimator in 2007, in which some original middle procedures are omitted. The simulation results show that the estimation accuracy and efficiency both increase dramatically.

Key words: Parametric estimator; K-distribution; M-estimator

1 引言

K 分布是较成功的雷达杂波统计模型之一, 几十年来对它的研究一直没有间断过。众多研究主要集中在对 K 分布杂波模型的参数估计上。国内外学者做了大量工作, 提出了多种方法^[1-4]。在实际应用中, 矩估计方法却有其独到之处, 它实现简单, 又能在雷达应用感兴趣的形状参数范围内, 达到一定精度, 因而成为许多学者对于 K 分布研究的重要课题, 并得到不少重要成果。其中与本文有关的是, Oliver^[5]讨论的 U 估计器, 文献[6]提出的 X 估计器。

特别是继 Jahangir 等人^[7]提出一种由两个估计器的线性组合形成的新型估计器之后, 郝程鹏等人^[8,9]提出了通过 U, X 矩估计组合而形成的新型的 K 分布形状参数估计器: M 估计器和改进的 M 估计器。

本文首先对这几种比较有代表性的 K 分布形状参数估计器进行介绍, 然后在此基础上给出一种新的组合式矩估计器。为方便叙述, 本文称 M 估计器、改进的 M 估计器和本文提出的(对改进的 M 估计器再改进的)估计器分别为: M 估计器, M2 估计器和 M2* 估计器。Monte-Carlo 仿真实验结果表明, 在 K 分布形状参数 v 值较大变化范围内, 与 U, M, M2 估

计器相比, M2* 估计器在估计的精度及效率上都有显著的提高。

2 K 分布

K 分布的密度函数(PDF)为

$$P_z(z) = \frac{2}{\Gamma(v)} \left(\frac{v}{\mu}\right) \left(\frac{v}{\mu} z\right)^{(v-1)/2} K_{v-1} \left(2\sqrt{\frac{v}{\mu}} z\right) \quad (1)$$

其中 z 为信号强度, μ 为杂波均值, K_{v-1} 是 $v-1$ 阶第 2 类修正 Bessel 函数, v 为形状参数, $z \geq 0, v > 0$ 。

形状参数 v 决定了 K 分布的形状, 其值越小, K 分布的峰态越陡, K 分布偏离瑞利分布的程度越大, 具有比瑞利分布更大的尾部, 在采用相同检测门限进行检测的情况下, 造成虚警概率的增大。而 v 越大, K 分布的峰态越平缓。因此, 小 v 值的参数估计精度是我们最关心的。通常雷达杂波的形状参数在 $v = 0.1$ (城市)到 $v = 10$ (开阔平原)的范围内变化, 而海杂波也有相似的范围。

3 与对 K 分布参数 v 有关的矩估计

为便于叙述, 以下本文用 $E(f)$ 表示 f 的期望, 用 $[f]$ 表示 $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i$, 其中 N 表示样本长度。

3.1 X 估计^[6]

Blacknell 和 Tough 2001 年提出的 X 估计如式(2), 式(3)所示。

$$\widehat{X} = \frac{[z \ln z]}{[z]} - [\ln z] \quad (2)$$

$$X = E(\widehat{X}) = 1 + 1/v \quad (3)$$

3.2 U 估计

Oliver^[5]1993 年提出的 U 估计如式(4)，式(5)所示。

$$\widehat{U} = [\ln z] - \ln([z]) \quad (4)$$

$$U = \psi^{(0)}(v) - \ln v - \gamma \quad (5)$$

其中 $\psi^{(0)}(v)$ 是双 gamma 函数， γ 是 Euler 常数， $\gamma = 0.57721$ 。

3.3 M 估计^[8]

郝程鹏等人^[8]2005 年提出 M 估计如式(6)，式(7)所示。

$$\widehat{M} = 0.15\widehat{X} + 0.85\widehat{U} \quad (6)$$

$$M = E(\widehat{M}) = 0.15(1+1/v) + 0.85[\psi^{(0)}(v) - \ln v - \gamma] \quad (7)$$

3.4 改进的 M 估计 M2

郝程鹏等人^[9]2007 年提出改进的 M 估计 M2 如式(8)，式(9)所示。

$$\widehat{M} = \alpha\widehat{X} + (1-\alpha)\widehat{U} \quad (8)$$

$$M = E(\widehat{M}) = \alpha(1+1/v) + (1-\alpha)[\psi^{(0)}(v) - \ln v - \gamma] \quad (9)$$

其中 $\psi^{(0)}(v)$ 是双 gamma 函数， γ 是 Euler 常数， $\gamma = 0.57721$ 。 α 取两个值。

(1)根据观测数据计算出 U, X 分量值。

(2)取 $\alpha = 0.15$ 对 U, X 分量进行加权，根据式(9)的转换关系将统计量转换成对形状参数的估值 $v_{估1}$ 。

(3)如果 $v_{估1} < 3.2$ ，则最终估值 $v_{估} = v_{估1}$ 。

(4)如果 $v_{估1} \geq 3.2$ ，取 $\alpha = 0.5$ 对 U, X 分量重新进行加权，得到最终估值 $v_{估}$ 。

注：按文献[9]，在形状参数 $v \geq 3.2$ 时，式(8)中取 $\alpha = 0.5$ 精度较高。故 M2 估计以 $v = 3.2$ 为判断 α 取值为 0.15 还是 0.5 的关键点。另外，以上(1)至(4)项内容及其中的有关符号均摘自文献[9]。

4 对改进的 M 估计器的再改进

经分析，改进的M估计M2的(1)-(4)步骤可以通过下述方法自动实现：

(1)寻求 $v_0=3.2$ 。仿真实验表明，当仿真产生 $v=3.2$ 的K分布杂波强度信号时，在样本长度 $N=256$ ，进行10000次Mote-Carlo实验试验时，每次都会用U估计器得到对 $v=3.2$ 的估计 \hat{v}_u ，及10000次 \hat{v}_u 的均值 $\bar{v}_u \approx 3.4269$ ，这是一个精确到小数点后第4位的常数。辛钦大数定理指出： P 次实验的均值会随着试验次数 P 的增加而趋近它的期望值。如此，我们有理由认为， \bar{v}_u 等于3.4269就相当于在某一精度下

仿真产生的 v 参数真值3.2。换言之，我们有理由认为，在该精度下， $v = 3.2$ 等价于 $\bar{v}_u \approx 3.4269$ 。

(2)实现 α 值0.15与0.5的自动转换。表1给出在样本长度 $N=256$ ，经过10000次Monte-Carlo仿真实验，得到的 v 的U估计均值 \bar{v}_u 与 α 关系的数据。

表1 v 的U估计均值 \bar{v}_u 与 α 对应关系表

\bar{v}_u	0.1001	3.4269	40(详见本节注)
α	0.15	0.5	0.5

实际上，我们需要的是一个象开关一样的分段函数。为此：

(1)在表1的基础上，为减少由0.1001到3.4269过渡过程对 α 的影响，在3.4269的左边添加一个距离3.4269很近的数例如3.4268作为过渡得到表2。

表2 表1基础上增加过渡数值3.4268得到的 \bar{v}_u 与 α 对应关系表

\bar{v}_u	0.1001	3.4268	3.4269	40
α	0.15	0.15	0.5	0.5

(2)在表2的基础上，用适当的方法进行插值。

仿真实验证明，用三次Hermite多项式对表2进行分段保形插值，是一种效果良好的方法。

分段保形三次 Hermite 多项式插值很容易通过 matlab 中的 pchip 函数即 $f(t) = \text{pchip}(x, y, t)$ 实现。其中， x, y 分别为插值点横坐标、纵坐标构成的点集， t 为插值变量。于是，可得 M2* 估计器如式(10)，式(11)所示。

$$\widehat{M2^*} = [1 - L(\hat{v}_u)]\widehat{X} + L(\hat{v}_u)\widehat{U} \quad (10)$$

$$M2^* = E(\widehat{M2^*}) = \alpha(1 + 1/v) + (1 - \alpha)[\psi^{(0)}(v) - \ln v - \gamma] \quad (11)$$

其中

$$1 - \alpha = L(\hat{v}_u) = \begin{cases} \alpha_i, & \hat{v}_u = \hat{v}_u^{(i)} \\ p_3(\hat{v}_u), & \hat{v}_u \neq \hat{v}_u^{(i)} \end{cases} \quad (12)$$

\hat{v}_u 为 U 估计器对形状参数等于 v 的输入杂波的估计值， $\hat{v}_u^{(i)}$ 为 \hat{v}_u 的第 i 个插值节点， $p_3(\hat{v}_u) \in P_3, P_3$ 为所有 \hat{v}_u 的三次多项式构成的集合， $i=1,2,3,4$ 。

注：由于形状参数 $v > 0$ ，则事实上表 1，表 2 中最右端的 \bar{v}_u 可以不必通过计算求出，而根据形状参数 v 估值范围的需要，取大于等于估值范围的最大值的任一数值即可。实际上，结合插值函数的外推特性，不难看出，表 1，表 2 中最右端的 \bar{v}_u 即使取值 400, 4000, ... 等等，也不会对估计器性能造成影响。

5 仿真实验结果

因为M2*估计器主要是对M2估计器的4个估计步骤的一种自动化改进,因此理论分析和Monte-Carlo仿真实验都表明,在样本长度 N 的多种取值情况下,M2*估计器与M和M2估计器的比较情况基本相同。故为便于说明问题,以下以样本长度 $N=256$,经过10000次Monte-Carlo仿真实验所得结果为例,给出相应结果。

小 v 值的仿真实验方差的比较结果见图1。

从图1可以看出,在 $v=1.4$ 以后,本文的M2*估计器精度越来越好于M, M2估计器。还需说明的是:

(1) v 值在0到2的范围内,由于都是属于M和M2估计的公式中 $\alpha=0.15$ 的情况,因而M与M2的估值曲线是一样的。有鉴于此, v 值在0到2的范围内,M与M2的对应的曲线是重合的。

(2)由图1看到,本来在 $[0.1, 2]$ 的范围内,M, M2估计与M2*估计公式中相应的 $1-\alpha$ 值都是0.85,那么,为什么图1中,M2*的方差会明显优于M和M2呢?让我们举例说明。事实上,假定在仿真实验中输入形状参数 $v=1.8$ 的杂波,而由于杂波的随机性,某次实际输入到估计器的杂波的形状参数可能是 $v=3.3$ 。此时,M和M2估计器都会把杂波当成 $v=2$ 即 $\alpha=0.15$ 来处理,而M2*估计器则会对杂波按照 $v=3.3$ (对应的 $1-\alpha$ 值应该是0.5)来处理。参照文献[9]可知,在 $v>3.2$ 时,取 $\alpha=0.5$ 方差较小。所以,就会出现图2反映出的在 $v>1.4$ 的情况下,

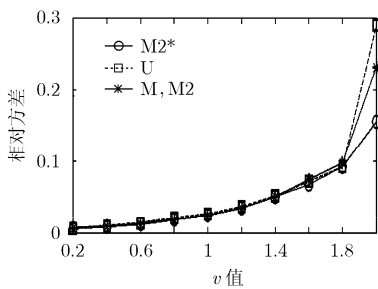


图1 M2*,U,M,M2估计器在 $v \in [0.2, 2]$ 的范围内的方差比较

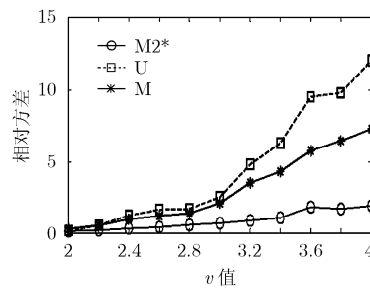


图2 M2*,U,M估计器在 $v \in [2, 4]$ 的范围内的方差比较

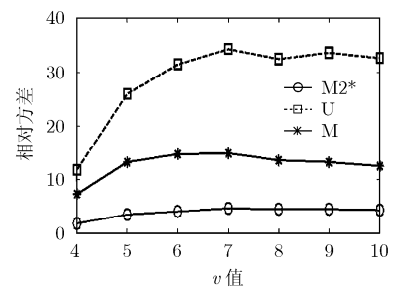


图3 M2*,U,M估计器在 $v \in [4, 10]$ 的范围内的方差比较

M2*估计器显著优于M和M2。(提示:参考上一节, $v=3.2$ 等价于 $\bar{v}_u=3.4269$ 。)

图2给出在K分布形状参数 $v \in [2, 4]$ 的情况下,U, M与M2*估计的方差比较的情况。由图2容易看出,在 v 值较大的情况下,本文估计器M2*的方差较图1的方差情况相比,更加优于其他两种估计器。

$v \in [4, 10]$ 的大 v 值情况下,U, M与M2*估计的方差比较的情况见图3。由图3易见,在大 v 值的情况下,本文估计器M2*的方差情况与其他两种估计器相比,有更加明显的优势。

6 结束语

在介绍了与M估计器, M2估计器有关的U估计器, X估计器几个估计器之后,本文重点介绍了M和M2估计器。这两种估计器,在U估计和X估计器的基础上,通过U, X两个矩估计器的常数系数加权的线性组合,得到了在一定范围内精度更高的矩估计器。

本文提出的M2*估计器,对改进的M估计器即M2估计器进行了再改进,自动实现了M2估计器的前述(1)-(4)共4个步骤,显著提高了估计器的效率。

大量Monte-Carlo仿真实验表明,本文提出的M2*估计器,不但显著提高了估计器的效率,而且显著提高了估计器的精度;因而,从实用性考虑,M2*估计器显著提高了这类组合式矩估计器的实际应用价值。

参考文献

- [1] Hruska D P and Oelze M L. Improved parameter estimators based on the homodyned K-distribution. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, 2009, 56(11): 2471-2481.
- [2] Abraham D A and Lyons A P. Reliable methods for estimating the K-distribution shape parameter. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, 2010, 35(2): 288-302.
- [3] Maresh A. Properties of moment estimators for the K-distribution. *Proceedings of 6th European Radar Conference, Roma*, 2009: 397-406.
- [4] 余慧, 王岩飞, 闫鸿慧. 一种K分布杂波参数估计的快速算法. *电子与信息学报*, 2009, 31(1): 139-142.
Yu Hui, Wang Yan-fei, and Yan Hong-hui. A new method for estimating parameters of K-distributed clutter. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2009, 31(1): 139-142.
- [5] Oliver C J. Optimum texture estimators for SAR clutter. *Journal of Physics: D*, 1994, 26(1): 1824-1835.

- [6] Blacknell D and Tough R J A. Parameter estimation for the K-Distribution based on $[z \log(z)]$. *IEE Proceedings Radar, Sonar & Navigation*, 2001, 148(6): 309-312.
- [7] Jahangir M, Blacknell D, and White R G. Accurate approximation to the optimum parameter estimate for K-distributed clutter. *IEE Proceedings Radar, Sonar & Navigation*, 1996, 143(6): 383-390.
- [8] 郝程鹏等. 一种新的K分布形状参数估计器, 电子与信息学报, 2005, 27(9): 1404-1407.
Hao Cheng-peng, *et al.* A new estimator for estimating the parameters of K-distribution. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2005, 27(9): 1404-1407.
- [9] 郝程鹏等. 一种K分布杂波背景下的双参数恒虚警检测器. 电子与信息学报, 2007, 29(3): 756-759.
Hao Cheng-peng, *et al.* A two parameter CFAR detector in K-distribution clutter. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2007, 29(3): 756-759.
- [10] 张德丰等. MATLAB 数值计算方法. 北京: 机械工业出版社, 第 1 版, 2010: 143-147.
Zhang De-feng, *et al.* Numerical computing with MATLAB. Beijing: Machinery Industry Press, 1st Edition, 2010: 143-147.
- 李大朋: 男, 1979 年生, 博士生, 研究方向为 SAR 图像处理、景象匹配.
- 姚迪: 男, 1978 年生, 讲师, 研究方向为 SAR 成像技术及处理.