
**SUR LES VARIÉTÉS $X \subset \mathbb{P}^N$ TELLES QUE PAR n POINTS
PASSE UNE COURBE DE X DE DEGRÉ DONNÉ**

par

Luc Pirio et Jean-Marie Trépreau

Résumé. — Soit $r \geq 1$, $n \geq 2$, et $q \geq n - 1$ des entiers. On introduit la classe $\mathcal{X}_{r+1,n}(q)$ des sous-variétés X de dimension $r + 1$ d'un espace projectif, telles que

- pour $(x_1, \dots, x_n) \in X^n$ générique, il existe une courbe rationnelle normale de degré q , contenue dans X et passant par les points x_1, \dots, x_n ;
- X engendre un espace projectif dont la dimension, pour r , n et q donnés, est la plus grande possible compte tenu de la première propriété.

Sous l'hypothèse $q \neq 2n - 3$, on détermine toutes les variétés X appartenant à la classe $\mathcal{X}_{r+1,n}(q)$. On montre en particulier qu'il existe une variété $X_0 \subset \mathbb{P}^{r+n-1}$ de degré minimal $n - 1$ et une application birationnelle $X_0 \dashrightarrow X$ qui envoie une section de X_0 par un $\mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^{r+n-1}$ générique sur une courbe rationnelle normale de degré q .

Sans hypothèse sur q , on définit sur l'espace des courbes rationnelles normales de degré q contenues dans la variété $X \in \mathcal{X}_{r+1,n}(q)$ une structure quasi-grassmannienne. La variété X est de la forme précédente si et seulement si cette structure est localement isomorphe à la structure standard, celle de la grassmannienne des $(n-1)$ -plans de \mathbb{P}^{r+n-1} .

Le problème de la détermination des variétés $X \in \mathcal{X}_{r+1,n}(2n - 3)$ reste ouvert. Nous donnons quelques exemples de variétés des classes $\mathcal{X}_{r+1,3}(3)$ et $\mathcal{X}_{r+1,4}(5)$ qui ne sont pas de la forme qu'on vient de décrire.

1. Introduction

1.1. Les classes $\mathcal{X}_{r+1,n}(q)$. — On considère un problème de géométrie projective complexe, auquel nous ont conduits nos travaux récents sur l'algébrisation des tissus de rang maximal, voir Pirio-Trépreau [12].

Soit $r \geq 1$, $n \geq 2$ et $q \geq n - 1$ des entiers.

Définition 1.1. — On note $\mathcal{X}_{r+1,n}(q)$ la classe des variétés X , sous-variétés algébriques irréductibles de dimension $r + 1$ d'un espace projectif quelconque, telles que :

- 1) pour $(x_1, \dots, x_n) \in X^n$ générique, il existe une courbe rationnelle normale de degré q , contenue dans X et passant par les points x_1, \dots, x_n ;
- 2) X engendre un espace projectif dont la dimension, notée $\pi_{r,n}(q)$, est la plus grande possible, compte tenu de la première propriété.

La dimension $\pi_{r,n}(q)$ de l'espace engendré par une variété de la classe $\mathcal{X}_{r+1,n}(q)$ est donnée par la formule (1) de la section suivante.

Notre résultat principal sera la détermination de toutes les variétés X de la classe $\mathcal{X}_{r+1,n}(q)$ sous l'hypothèse $q \neq 2n - 3$. Le cas $q = 2n - 3$ restera ouvert.

L'hypothèse d'irréductibilité est en fait une conséquence des autres hypothèses, la démonstration est laissée au lecteur. On peut aussi remplacer la Propriété 1) par la Propriété 1') suivante, plus faible :

- 1') pour $(x_1, \dots, x_n) \in X^n$ générique, il existe une courbe irréductible de degré $\leq q$, contenue dans X et passant par les points x_1, \dots, x_n ,

sans modifier la classe $\mathcal{X}_{r+1,n}(q)$ que l'on définit, voir la Proposition 2.2.

Il est tentant de penser, mais nous ne le démontrons pas, qu'on peut même la remplacer par la Propriété 1'') suivante, encore plus faible :

- 1'') pour $(x_1, \dots, x_n) \in X^n$ générique, il existe une courbe irréductible contenue dans X , passant par x_1, \dots, x_n et engendrant un espace de dimension $\leq q$.

1.2. Le théorème de la borne. — Notre première tâche est de déterminer la dimension $\pi_{r,n}(q)$ de l'espace engendré par une variété $X \in \mathcal{X}_{r+1,n}(q)$. Ce sera la seule démonstration de l'introduction. Elle est assez typique de cet article.

Soit $X \subset \mathbb{P}^N$ une variété algébrique irréductible de dimension $r + 1$. On note $\langle X \rangle$ le sous-espace projectif qu'elle engendre, X_{reg} sa partie régulière, X_{sing} sa partie singulière. On note $\text{CRN}_q(X)$ l'ensemble des courbes rationnelles normales de degré q contenues dans X . Si \mathbf{L} et \mathbf{L}' sont des sous-espaces d'un espace projectif, on note $\mathbf{L} \oplus \mathbf{L}'$ le sous-espace qu'ils engendrent s'il est de dimension (maximale) $\dim \mathbf{L} + \dim \mathbf{L}' + 1$ et on dit que c'est la *somme directe projective* de \mathbf{L} et de \mathbf{L}' .

La notion d'espace osculateur ou d'osculateur sera omniprésente dans la suite. Étant donné $x \in X_{\text{reg}}$ et $k \in \mathbb{N}$, on note $X_x(k)$ l'*osculateur à l'ordre k de X en x* . C'est par exemple le sous-espace projectif de $\langle X \rangle \subset \mathbb{P}^N$ passant par x et dont la direction est le sous-espace vectoriel de $T_x \mathbb{P}^N$ engendré, dans une carte affine identifiée à \mathbb{C}^N , mais la définition ne dépend pas de cette identification, par les dérivées $v'(0), \dots, v^{(k)}(0)$ des germes de courbes paramétrées $v : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (X, x)$ telles que $v(0) = x$. C'est une notion projective.

On a toujours

$$\dim X_x(k) + 1 \leq \binom{r + 1 + k}{r + 1}.$$

On dit que X est *k -régulière* en $x \in X_{\text{reg}}$ si l'inégalité ci-dessus est une égalité et que X est *k -régulière* si X est k -régulière au point générique de X .

Comme la notion d'osculateur joue un grand rôle dans cet article, on rappelle dans l'Appendice les propriétés, toutes élémentaires, qu'on utilisera sans référence, avec au moins des esquisses de démonstrations. Le lecteur est invité à consulter les quelques énoncés de cet appendice.

La deuxième propriété dans la Définition 1.1 est précisée par l'énoncé suivant :

Théorème 1.2. — Une variété $X \in \mathcal{X}_{r+1,n}(q)$ engendre un espace de dimension le nombre $\pi_{r,n}(q)$ donné par

$$(1) \quad \pi_{r,n}(q) + 1 = m \binom{r + \rho + 1}{r + 1} + (n - 1 - m) \binom{r + \rho}{r + 1},$$

où $q = \rho(n - 1) + m - 1$ est la division euclidienne de q par $n - 1$.

On démontre ici la seule partie de l'énoncé qui est nouvelle : si l'on définit le nombre $\pi_{r,n}(q)$ par (1), une variété $X \in \mathcal{X}_{r+1,n}(q)$ engendre un espace de dimension $\leq \pi_{r,n}(q)$. À la terminologie près, le fait qu'il existe des variétés projectives qui vérifient la première propriété dans la Définition 1.1 et qui engendrent un espace de dimension $\pi_{r,n}(q)$ est déjà connu, voir la fin de cette introduction et le Chapitre 5.

Démonstration. — Soit $X \subset \mathbb{P}^N$ une sous-variété de dimension $r+1$, vérifiant la première propriété dans la Définition 1.1. Par définition, il existe un n -uplet $(a_1, \dots, a_n) \in (X_{\text{reg}})^n$ de points deux-à-deux distincts tel que, pour tout $x \in X$ voisin de a_n , il existe une courbe $C(x) \in \text{CRN}_q(X)$ passant par les points a_1, \dots, a_{n-1} et x .

Considérons des osculateurs

$$X_{a_i}(\rho_i) \quad (i = 1, \dots, n - 1), \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^{n-1} (\rho_i + 1) = q + 1.$$

Une courbe $C(x)$ est contenue dans l'espace engendré par ses osculateurs $C(x)_{a_i}(\rho_i)$, donc dans celui engendré par les osculateurs $X_{a_i}(\rho_i)$, $i = 1, \dots, n - 1$. Comme les courbes $C(x)$ recouvrent un voisinage de a_n dans X , cet espace contient aussi X et donc :

$$(2) \quad \dim \langle X \rangle + 1 \leq \sum_{i=1}^{n-1} \binom{r + 1 + \rho_i}{r + 1}.$$

Il suffit de prendre $\rho_i = \rho$ pour m valeurs de i et $\rho_i = \rho - 1$ pour les $n - m - 1$ autres valeurs de i . On obtient le résultat. \square

On a l'égalité dans (2) si et seulement si les osculateurs $X_{a_i}(\rho_i)$, $i = 1, \dots, n - 1$, sont de dimensions maximales et en somme directe projective. En permutant les points a_1, \dots, a_n , on obtient le résultat suivant dont on démontrera une sorte de réciproque au début du Chapitre 2.

Lemme 1.3. — Soit $X \in \mathcal{X}_{r+1,n}(q)$ et a_1, \dots, a_n des points deux-à-deux distincts de X_{reg} tels que, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in X^n$ voisin de (a_1, \dots, a_n) , il existe une courbe $C \in \text{CRN}_q(X)$ passant par les points x_1, \dots, x_n . Si $q = \rho(n - 1) + m - 1$ est la division euclidienne de q par $n - 1$, X est ρ -régulière en chaque point a_i et pour toute permutation σ de $\{1, \dots, n\}$, on a :

$$(3) \quad \langle X \rangle = (\oplus_{i=1}^m X_{a_{\sigma(i)}}(\rho)) \oplus (\oplus_{i=m+1}^{n-1} X_{a_{\sigma(i)}}(\rho - 1)).$$

1.3. Exemples : les classes $\mathcal{X}_{r+1,n}(n-1)$ et $\mathcal{X}_{r+1,2}(q)$. — Considérons d'abord le cas particulier d'une variété $X \in \mathcal{X}_{r+1,n}(n-1)$. La formule (1) donne $\pi_{r,n}(n-1) = r + n - 1$.

La variété X , de dimension $r + 1$, engendre un espace \mathbb{P}^{r+n-1} et vérifie que, pour $(x_1, \dots, x_n) \in X^n$ générique, il existe une courbe $C \in \text{CRN}_{n-1}(X)$ qui passe par x_1, \dots, x_n . Il est bien connu que, pour $(x_1, \dots, x_n) \in X^n$ générique, les n points x_1, \dots, x_n engendrent un \mathbb{P}^{n-1} et que $X \cap \mathbb{P}^{n-1}$ est une courbe irréductible (et réduite). C'est donc

la courbe C . On en déduit que X est de degré $n - 1$, le degré minimal d'une variété projective de dimension $r + 1$ qui engendre un espace de dimension $r + n - 1$. Une telle variété est appelée une *variété minimale*. La réciproque est évidente :

Lemme 1.4. — *Les variétés appartenant à la classe $\mathcal{X}_{r+1,n}(n - 1)$ sont les variétés minimales de dimension $r + 1$ et de degré $n - 1$.*

Ces variétés sont connues. Nous en rappellerons la classification dans le Chapitre 5.

Une variété de Veronese de dimension $s \geq 1$ et d'ordre q est une variété projective qui, dans l'espace qu'elle engendre, est l'image de \mathbb{P}^s par un plongement associé au système linéaire $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^s}(q)|$. Par exemple, une variété de Veronese de dimension 1 et d'ordre q est une courbe rationnelle normale de degré q .

Bompiani a étudié dans [1] un problème de géométrie différentielle projective dont il a réduit la solution, et cette réduction occupe presque tout l'article, à la démonstration d'un cas particulier de son résultat principal qu'on peut énoncer ainsi :

Théorème 1.5. — *Les variétés appartenant à la classe $\mathcal{X}_{r+1,2}(q)$ sont les variétés de Veronese de dimension $r + 1$ et d'ordre q .*

La démonstration de Bompiani, par récurrence sur r , est simple et synthétique mais guère convaincante sauf pour $r = 1$. Dans le doute, le second auteur [14] a démontré, essentiellement par un calcul formel, le résultat plus fort suivant :

Théorème 1.6. — *Soit $X \subset \mathbb{P}^N$ un germe de variété lisse et q -régulier en $x^* \in \mathbb{P}^N$. Si pour tout $x \in X$ voisin de x^* , il existe une courbe rationnelle normale de degré q localement contenue dans X , qui passe par x^* et x , alors X est une variété de Veronese d'ordre q .*

Pour obtenir la même conclusion, Bompiani suppose que l'hypothèse de l'énoncé précédent reste vérifiée si l'on remplace le point de base x^* par un point voisin.

Dans [14] on trouvera aussi une caractérisation des germes de variétés lisses et q -réguliers en $x^* \in \mathbb{P}^N$ tels que, pour tout $x \in X$ voisin de x^* , il existe une courbe lisse, localement contenue dans X et passant par x^* et x , qui engendre un q -plan. Selon l'avis de son auteur, ce résultat rend plausible que, dans la Définition 1.1, on pourrait remplacer la première propriété par la Propriété 1") sans modifier la classe $\mathcal{X}_{r+1,n}(q)$ que l'on définit.

1.4. Énoncés des principaux résultats. — Notre résultat principal est le suivant, voir aussi le Théorème 3.12 du Chapitre 3 pour un énoncé plus précis.

Théorème 1.7. — *Soit $X \in \mathcal{X}_{r+1,n}(q)$. Si $q \neq 2n - 3$, ou si $q = 2n - 3$ et $r = 1$ ou $n = 2$, il existe une variété $X_0 \subset \mathbb{P}^{r+n-1}$ de degré minimal $n - 1$, et une application birationnelle $\phi : X_0 \dashrightarrow X$ telle que l'image d'une section de X_0 par un $\mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^{r+n-1}$ générique appartienne à $\text{CRN}_q(X)$.*

Pour autant que nous le sachions, ce résultat est nouveau sauf dans le cas $q = n - 1$, dans le cas $n = 2$ et dans le cas $r = 1$.

Dans le cas $q = n - 1$, on retrouve le Lemme 1.4, qui est standard. Dans le cas $n = 2$, on retrouve le théorème de Bompiani. Nous ne le redémontrons pas ici. Il joue un rôle très important dans la démonstration du résultat général.

Le cas $r = 1$ des surfaces est particulier. Il est beaucoup plus simple pour la raison que, dans ce cas, une courbe de X est un diviseur. La théorie des systèmes linéaires permet alors de démontrer sans trop de difficultés le Théorème 1.7. Même si nous n'avons pas trouvé l'énoncé correspondant dans la littérature, il est bien possible qu'il soit folklorique.

La démonstration du Théorème 1.7 occupe le Chapitre 2 et le Chapitre 3. Le lecteur désireux d'en avoir une idée peut survoler les introductions à ces chapitres.

Le Théorème 1.7 suggère la définition suivante :

Définition 1.8. — La variété $X \in \mathcal{X}_{r+1,n}(q)$ est *standard*, sous-entendu comme élément de $\mathcal{X}_{r+1,n}(q)$, s'il existe une variété minimale $X_0 \in \mathcal{X}_{r+1,n}(n-1)$ et une application birationnelle $\phi : X_0 \dashrightarrow X$ telle que l'image d'une section de X_0 par un $\mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^{r+n-1}$ générique appartienne à $\text{CRN}_q(X)$. On dit alors que X est *associée* à X_0 par l'application ϕ . Elle est *spéciale* dans le cas contraire.

Avec cette terminologie, on peut réécrire le Théorème 1.7 sous la forme suivante.

Si $q \neq 2n - 3$, ou si $r = 1$ ou $n = 2$, toute variété de la classe $\mathcal{X}_{r+1,n}(q)$ est standard.

Une même variété X peut appartenir à plusieurs classes $\mathcal{X}_{r+1,n}(q)$ distinctes. L'exemple de la variété de Veronese de dimension 3 et d'ordre 3 est curieux : cette variété est un élément standard de la classe $\mathcal{X}_{3,2}(3)$ et un élément spécial de la classe $\mathcal{X}_{3,6}(9)$, comme on le verra dans le Chapitre 6.

Si $X \in \mathcal{X}_{r+1,n}(q)$, nous montrerons dans le Chapitre 4 qu'un ouvert $\Sigma_q(X)$ de l'ensemble $\text{CRN}_q(X)$, qu'on définira précisément, admet une $G_{r,n}$ -structure naturelle. On appelle ainsi le type de G -structure modélée sur la structure infinitésimale de la grassmannienne $\mathbb{G}_{r,n}$ des \mathbb{P}^{n-1} de \mathbb{P}^{r+n-1} . Si par exemple X_0 est une variété minimale de degré $n - 1$, c'est la structure induite par l'application qui, à un $\mathbb{P}^{n-1} \in \mathbb{G}_{r,n}$ générique, associe la courbe $X_0 \cap \mathbb{P}^{n-1} \in \Sigma_{n-1}(X_0)$. Nous démontrerons :

Théorème 1.9. — *La variété $X \in \mathcal{X}_{r+1,n}(q)$ est standard si et seulement si la $G_{r,n}$ -structure naturelle de $\Sigma_q(X)$ est intégrable.*

Le Chapitre 5 peut être lu indépendamment du reste de l'article. Il contient la classification des variétés standards, qu'on obtiendra à partir de celle des variétés minimales et de la structure de leurs groupes de Picard. Cette classification est donnée par le Théorème 5.3, dont l'énoncé est trop long pour qu'on le reproduise ici.

Le premier exemple que nous avons connu d'une variété spéciale nous a été communiqué par F. Russo [13]. Il s'agit de l'image de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ par le plongement de Segre de type $(1, 1, 1)$. C'est une variété spéciale de la classe $\mathcal{X}_{3,3}(3)$.

Dans le Chapitre 5, nous présenterons cet exemple ainsi que quelques autres, obtenant en particulier le résultat suivant.

Théorème 1.10. — *Pour tout $r \geq 2$, les classes $\mathcal{X}_{r+1,3}(3)$ et $\mathcal{X}_{r+1,4}(5)$ contiennent des variétés spéciales.*

Cet énoncé ne fait qu'effleurer le problème très intéressant de la classification complète des variétés des classes $\mathcal{X}_{r+1,n}(2n - 3)$ avec $r \geq 2$ et $n \geq 3$. Nous connaissons quelques exemples encore de variétés spéciales en plus de ceux que nous mentionnerons mais, à

l'heure qu'il est, nous savons très peu de choses. Nous ne savons même pas s'il existe des variétés spéciales dans toutes ces classes.

1.5. Une relation avec les variétés de genre maximal. — Pour finir, nous présentons sans démonstration la relation intéressante qui existe entre les classes $\mathcal{X}_{r+1,n}(q)$ et les variétés de genre géométrique maximal.

Soit $Z \subset \mathbb{P}^{r+n-1}$ une variété projective de dimension r et de degré d , qui engendre \mathbb{P}^{r+n-1} . Si Z est irréductible et lisse, le *genre géométrique* de Z est la dimension $g(Z)$ de l'espace $H^0(Z, \Omega_Z^r)$ des r -formes holomorphes sur Z . Écrivons

$$d - 1 = \sigma(n - 1) + m, \quad m \in \{1, \dots, n - 1\}.$$

Pour une dimension r et un degré d donnés, le genre géométrique de Z est au plus égal, et le résultat est optimal, au nombre

$$(4) \quad g_{r,n}(d) = m \binom{\sigma + 1}{r + 1} + (n - 1 - m) \binom{\sigma}{r + 1}.$$

C'est la *borne de Castelnuovo-Harris*. Deux démonstrations au moins de ce résultat sont connues. La première est due à Chern et Griffiths [2] et repose sur le théorème d'addition d'Abel et un argument combinatoire inspiré de la théorie des tissus. La deuxième est due à Harris [9] et appartient à la géométrie algébrique. La formule (4) est une écriture légèrement modifiée de la formule de [9], page 65.

En fait, pour le problème qui nous intéresse, c'est trop demander que Z soit lisse ou même que Z soit irréductible.

Dans [7], en supposant seulement que Z est réduit, Griffiths associe à toute r -forme rationnelle ω sur Z sa trace $\text{Tr}(\omega)$, une r -forme rationnelle sur la grassmannienne $\mathbb{G}_{r,n}$. Il introduit l'espace des r -formes rationnelles sur Z de trace nulle. (Si Z est lisse, ce sont les formes holomorphes sur Z .) Faute d'une terminologie traditionnelle, appelons *genre géométrique corrigé* de Z la dimension $g(Z)$ de cet espace. On suppose de plus qu'un $\mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^{r+n-1}$ générique coupe Z en d points en position générale dans ce \mathbb{P}^{n-1} . Sous cette hypothèse, on a encore l'inégalité $g(Z) \leq g_{r,n}(d)$.

Supposons $d \geq (r + 1)(n - 1) + 2$ et posons $q = d - r(n - 1) - 2$. On a donc $q \geq n - 1$ et $q = (\sigma - r)(n - 1) + m - 1$ est la division euclidienne $q = \rho(n - 1) + m - 1$ de q par $(n - 1)$. La comparaison des formules (4) et (1) donne $g_{r,n}(d) = \pi_{r,n}(q) + 1$.

Le nombre $\pi_{r,n}(q) + 1$ est le genre géométrique corrigé maximal d'une variété de dimension r et de degré $d = q + r(n - 1) + 2$, qui engendre un espace de dimension $r + n - 1$.

Rappelons maintenant quelques résultats de Harris [9] dans le cas où Z est irréductible. Si $g(Z) = g_{r,n}(d)$, la variété Z est contenue dans une variété minimale $X_0 \in \mathcal{X}_{r+1,n}(n-1)$. L'espace des r -formes rationnelles sur Z de trace nulle définit une *application canonique* $Z \dashrightarrow \mathbb{P}^{\pi_{r,n}(q)}$ qui, c'est une propriété importante, se prolonge « canoniquement » en une application rationnelle $c_Z : X_0 \dashrightarrow \mathbb{P}^{\pi_{r,n}(q)}$, dont l'image est de dimension $r + 1$. (Celle-ci ne dépend que de la classe du diviseur Z dans le groupe de Picard de X_0 .) L'image d'une section de X_0 par un $\mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^{r+n-1}$ générique est une courbe rationnelle normale de degré q . Il en résulte que l'image $c_Z(X_0)$ de X_0 est une variété de la classe $\mathcal{X}_{r+1,n}(q)$.

Nous avons :

Théorème 1.11. — *Toute variété standard $X \in \mathcal{X}_{r+1,n}(q)$ associée, au sens de la Définition 1.8, à une variété minimale $X_0 \in \mathcal{X}_{r+1,n}(n-1)$, est l'image de X_0 par l'application $c_Z : X_0 \dashrightarrow \mathbb{P}^{\pi_{r,n}(q)}$ associée à une variété $Z \subset X_0$, de dimension r , de degré $d = q + r(n-1) + 2$ et de genre géométrique corrigé maximal, i.e. égal à $g_{r,n}(d)$.*

C'est essentiellement une conséquence du Théorème 1.2, à ceci près qu'il faut vérifier la compatibilité entre les points de vue de [9] et de [7]. Comme cette vérification fait appel à des notions qui ne sont pas introduites dans cet article, nous la reportons à [12].

1.6. Remarques sur le style. — Le style de cet article est relativement élémentaire. Nous n'utilisons pas le langage de la géométrie algébrique moderne. Une certaine familiarité avec la géométrie projective complexe, par exemple telle qu'elle est exposée dans le « cours préparatoire » de Mumford [11] est suffisante pour sa lecture. Le rédacteur a souvent préféré donner une démonstration, surtout si elle est courte, plutôt qu'une référence à la littérature.

Nous espérons que nos résultats intéresseront quelques géomètres et qu'ils ne seront pas rebutés par le style, qu'ils trouveront peut-être démodé. L'expert pourra toujours sauter les passages qu'il juge exagérément pointilleux.

Enfin, certains arguments sont inspirés par des théorèmes classiques, par exemple le théorème de déformation de Kodaira [10] ou la caractérisation des systèmes linéaires due à Enriques [3]. Compte tenu du cadre très particulier de notre étude, il s'est toutefois avéré plus simple de s'en passer que de chercher à savoir si d'éventuelles versions de ces résultats pouvaient être appliquées.

2. Projections sur des variétés de Veronese et applications

2.1. Introduction. — Dans tout ce chapitre, $r \geq 1$, $n \geq 2$, et $q \geq n-1$ sont des entiers fixés. On note

$$q = \rho(n-1) + m - 1$$

la division euclidienne de q par $n-1$.

On note N l'entier $\pi_{r,n}(q)$ défini par la formule (1) et on se donne une variété $X \subset \mathbb{P}^N$ de la classe $\mathcal{X}_{r+1,n}(q)$.

On va obtenir des propriétés importantes de X grâce aux projections $\mathbb{P}^N \dashrightarrow X_{a_i}(\rho_i)$, $\rho_i \in \{\rho, \rho-1\}$, associées aux décompositions $\mathbb{P}^N = \bigoplus_{i=1}^{n-1} X_{a_i}(\rho_i)$ de \mathbb{P}^N en somme directe d'osculateurs qui apparaissent dans le Lemme 1.3.

On montrera en effet que l'image de la variété X par une projection de ce type est une variété de la classe $\mathcal{X}_{r+1,2}(\rho_i)$. Le point crucial est alors que ces variétés sont connues. D'après le Théorème 1.5, ce sont des variétés de Veronese d'ordre ρ_i .

Grâce à cela, on sera en mesure de montrer que X est lisse au voisinage de toute courbe C élément d'un ouvert dense $\Sigma_q(X)$, qu'on définira précisément, de la seule composante irréductible intéressante de $\text{CRN}_q(X)$. Ce résultat sera utile dans le Chapitre 3.

On montrera aussi que, pour toute courbe $C \in \Sigma_q(X)$, le fibré normal $N_C X$ est une somme directe de r fibrés en droites de degré $n-1$. C'est cette propriété qui fait que $\Sigma_q(X)$ admet la $G_{r,n}$ -structure naturelle qu'on considérera dans le Chapitre 4.

Les projections sur des variétés de Veronese joueront encore un rôle majeur dans le Chapitre 3 pour construire, dans les cas favorables, le système linéaire qui permet d'associer X à une variété minimale de degré $n - 1$, au sens de la Définition 1.8.

2.2. Une réciproque au Lemme 1.3. — On note $\text{CR}_q(\mathbb{P}^N)$ la composante irréductible de la variété de Chow des 1-cycles effectifs de degré q de \mathbb{P}^N qui contient, comme ouvert dense, l'ensemble $\text{CRN}_q(\mathbb{P}^N)$ des courbes rationnelles normales de degré q .

Un élément C de $\text{CR}_q(\mathbb{P}^N)$ s'écrit

$$C = m_1 C_1 + \cdots + m_d C_d, \quad m_1, \dots, m_d \in \mathbb{N}^*,$$

où C_i , $i = 1, \dots, d$, est une courbe irréductible de degré q_i et $m_1 q_1 + \cdots + m_d q_d = q$. De plus, le support $|C| = \cup_{i=1}^d C_i$ du cycle C est connexe. D'autre part, les composantes C_i sont en fait des courbes rationnelles, mais nous n'utiliserons pas cette propriété.

Si X est une sous-variété algébrique irréductible de \mathbb{P}^N , on note $\text{CR}_q(X)$ la sous-variété algébrique des éléments de $\text{CR}_q(\mathbb{P}^N)$ dont le support est contenu dans X . La variété d'incidence

$$I = \{(C, \mathbf{x}) \in \text{CR}_q(X) \times X^n, \mathbf{x} \subset |C|\}$$

est une variété projective compacte. Si $X \in \mathcal{X}_{r+1,n}(q)$, l'image de la projection canonique $I \rightarrow X^n$ contient un ouvert non vide de X^n , donc est égale à X^n . Le même argument montre que si X engendre un espace de dimension $\pi_{r,n}(q)$ et si l'on suppose seulement que la première propriété de la Définition 1.1 est vérifiée au voisinage d'un n -uplet $\mathbf{a} \in X^n$, alors la variété X appartient à la classe $\mathcal{X}_{r+1,n}(q)$. Nous utiliserons cette remarque à plusieurs reprises.

On a la réciproque suivante au Lemme 1.3 :

Lemme 2.1. — Soit $X \in \mathcal{X}_{r+1,n}(q)$ et a_1, \dots, a_n des points deux-à-deux distincts de X_{reg} tels que, pour toute permutation σ de $\{1, \dots, n\}$, on ait :

$$(5) \quad \langle X \rangle = (\oplus_{i=1}^m X_{a_{\sigma(i)}}(\rho_i)) \oplus (\oplus_{i=m+1}^{n-1} X_{a_{\sigma(i)}}(\rho - 1)).$$

Toute courbe algébrique connexe $C \subset X$ de degré $\leq q$ qui passe par les points a_1, \dots, a_n est une courbe rationnelle normale de degré q .

Il en existe au moins une d'après les remarques précédentes.

Démonstration. — Soit d'abord $p \leq n - 1$ et $C' \subset X$ une courbe algébrique connexe passant par au moins p points parmi a_1, \dots, a_n , par exemple par a_1, \dots, a_p . Le degré de la courbe C' est au moins égal à la dimension de l'espace qu'elle engendre. D'autre part, il existe un p -uplet (b_1, \dots, b_p) , aussi voisin qu'on veut de (a_1, \dots, a_p) , composé de points de C'_{reg} . Selon que p est $\leq m$ ou est $> m$, on peut supposer que les osculateurs

$$X_{b_1}(\rho), \dots, X_{b_p}(\rho); \quad \text{ou} \quad X_{b_1}(\rho), \dots, X_{b_m}(\rho), X_{b_{m+1}}(\rho - 1), \dots, X_{b_p}(\rho - 1),$$

sont en somme directe projective. Dans chaque cas, la courbe C' est lisse et donc ρ_i -régulière en b_i , $i = 1, \dots, p$, et les osculateurs correspondants $C'_{b_i}(\rho_i) \subset X_{b_i}(\rho_i)$ sont en somme directe projective. On a donc, suivant les cas :

$$\dim \langle C' \rangle + 1 \geq p(\rho + 1); \quad \text{ou} \quad \dim \langle C' \rangle + 1 \geq m(\rho + 1) + (p - m)\rho.$$

En résumé, une courbe algébrique connexe qui passe par $p \leq n - 1$ points parmi a_1, \dots, a_n engendre un espace de dimension $\geq pp + \min(p, m) - 1$.

Soit maintenant C une courbe *connexe* de degré $\leq q$ qui passe par a_1, \dots, a_{n-1} . Elle engendre un espace de dimension $\geq q$ d'après ce qui précède. Si elle est irréductible, c'est donc une courbe rationnelle normale de degré q . Il reste à montrer qu'elle est irréductible.

Si ce n'est pas le cas, on peut écrire $C = C' \cup C''$ où C' et C'' sont des courbes connexes de degré ≥ 1 et $q \geq \deg C = \deg C' + \deg C''$. Si C' passe par tous les points a_1, \dots, a_n , où même par $(n-1)$ d'entre eux, elle est de degré $\geq q$, ce qui est impossible.

On peut donc supposer que C' passe par exactement $p \in \{1, \dots, n-1\}$ points parmi a_1, \dots, a_n et C'' par les autres. On obtient $q \geq \rho n + \min(p, m) + \min(n-p, m) - 2$. Comme $q = \rho(n-1) + m - 1$ et $\rho \geq 1$, il vient $m \geq \min(p, m) + \min(n-p, m)$ et enfin, puisque m, p et $n-p$ sont strictement positifs, on obtient $m \geq n$, une contradiction. \square

On a mentionné le résultat suivant dans la Section 1.1. S'il est intéressant en tant que tel, il ne servira pas dans la suite.

Corollaire 2.2. — *Soit X une sous-variété algébrique irréductible de dimension $r+1$ d'un espace projectif telle que, pour $(x_1, \dots, x_n) \in X^n$ générique, il existe une courbe irréductible de degré $\leq q$, contenue dans X et passant par les points x_1, \dots, x_n . La variété X engendre un espace de dimension $\leq \pi_{r,n}(q)$. Si elle engendre un espace de dimension $\pi_{r,n}(q)$, elle appartient à la classe $\mathcal{X}_{r+1,n}(q)$.*

Démonstration. — Soit $q = \rho(n-1) + m - 1$ la division euclidienne de q par $n-1$.

Dans la démonstration précédente, on n'a pas utilisé le fait que X appartient à la classe $\mathcal{X}_{r+1,n}(q)$ mais seulement le fait que X engendre un espace de dimension $\pi_{r,n}(q)$ et vérifie la propriété (5). Il suffit donc, pour démontrer le corollaire, de montrer que X engendre un espace de dimension $\leq \pi_{r,n}(q)$ et que, si X engendre un espace de dimension $\pi_{r,n}(q)$, la propriété (5) est vérifiée pour $(a_1, \dots, a_n) \in X^n$ générique.

On fait l'hypothèse, plus faible que celle de l'énoncé, que pour $(x_1, \dots, x_n) \in X^n$ générique, il existe une courbe irréductible, engendrant un espace de dimension $\leq q$, contenue dans X et passant par x_1, \dots, x_n . On adapte la démonstration du Théorème 1.2.

Soit $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ un n -uplet de points deux-à-deux distincts de X_{reg} tels que l'hypothèse précédente soit vérifiée pour tout $\mathbf{x} \in X^n$ voisin de \mathbf{a} . On peut imposer au n -uplet \mathbf{a} de vérifier la propriété (générique) suivante : pour toute permutation σ de $\{1, \dots, n\}$, la dimension de l'espace engendré par les osculateurs

$$X_{a_{\sigma(1)}}(\rho), \dots, X_{a_{\sigma(m)}}(\rho), X_{a_{\sigma(m+1)}}(\rho-1), \dots, X_{a_{\sigma(n-1)}}(\rho-1),$$

est maximale, parmi celles qu'on peut obtenir quand \mathbf{a} décrit X_{reg}^n .

Il suffit maintenant de considérer le cas où la permutation σ est l'identité. Notons $X_{a_i}(\rho_i)$ les osculateurs qui interviennent, $i = 1, \dots, n-1$. Les courbes C , dont on suppose l'existence, qui passent par a_1, \dots, a_{n-1} et un point x voisin de a_n recouvrent un voisinage de a_n dans X donc engendrent $\langle X \rangle$. D'autre part, une telle courbe C étant fixée, l'espace de dimension $\leq q$ qu'elle engendre est aussi engendré par ses osculateurs $C_{b_i}(\rho_i)$, pour $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_{n-1}) \in C_{\text{reg}}^{n-1}$ générique. Elle est donc contenue dans l'espace engendré par les osculateurs $X_{b_i}(\rho_i)$. En faisant tendre \mathbf{b} vers \mathbf{a} et compte tenu des conditions imposées au n -uplet \mathbf{a} , on obtient qu'elle est contenue dans l'espace engendré par les osculateurs $X_{a_i}(\rho_i)$. On conclut comme à la fin de la démonstration du Théorème 1.2. \square

2.3. Objets admissibles; notations. — Plutôt que d’abuser du mot *générique*, on introduit une terminologie et des notations qui seront d’un usage courant dans la suite.

Quand on parle d’un p -uplet $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_p)$ de points, il est sous-entendu que ces points sont deux-à-deux distincts⁽¹⁾.

Abusivement, on confondra souvent un p -uplet \mathbf{a} et l’ensemble $\{a_1, \dots, a_p\}$ sous-jacent en s’autorisant des notations telles que $\mathbf{a} \subset C$ ou $\mathbf{b} \subset \mathbf{a}$... Si \mathbf{a} est un p -uplet et \mathbf{b} un q -uplet disjoint de \mathbf{a} , (\mathbf{a}, \mathbf{b}) désigne le $(p + q)$ -uplet obtenu par juxtaposition.

Définition 2.3. — Un n -uplet $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in X^n$ est *admissible* si $\mathbf{a} \in X_{\text{reg}}^n$ et si, pour toute permutation σ de $\{1, \dots, n\}$, on a :

$$\mathbb{P}^N = (\oplus_{i=1}^m X_{a_{\sigma(i)}}(\rho)) \oplus (\oplus_{i=m+1}^{n-1} X_{a_{\sigma(i)}}(\rho - 1)).$$

De façon équivalente, a_1, \dots, a_n sont des points deux-à-deux distincts de X_{reg} et, pour toute permutation σ de $\{1, \dots, n\}$, les courbes $C \in \text{CRN}_q(X)$ qui passent par les points $a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n-1)}$ recouvrent un voisinage de $a_{\sigma(n)}$.

Ce sont en fait des propriétés de l’ensemble sous-jacent à \mathbf{a} . Le fait qu’elles sont équivalentes résulte de la démonstration du Théorème 1.2 et du Lemme 2.1.

On étend la notion d’être admissible à d’autres objets :

Définition 2.4. — Si $1 \leq p \leq n - 1$, un p -uplet $\mathbf{a} \in X^p$ est *admissible* si on peut le compléter en un n -uplet admissible (\mathbf{a}, \mathbf{b}) . Une courbe C de X est *admissible* si C appartient à $\text{CRN}_q(X)$ et contient un n -uplet admissible.

On utilisera systématiquement les notations suivantes.

- $X_{\text{adm}}^{(p)}$ est l’ouvert dense de X^p des p -uplets admissibles de X . On note X_{adm} au lieu de $X_{\text{adm}}^{(1)}$. C’est l’ensemble des *points admissibles* de X .
- Si $\mathbf{a} \in X_{\text{adm}}^{(p)}$ et $p + p' \leq n$, on note $X_{\text{adm}}^{(p')}(\mathbf{a})$ l’ouvert dense de $X^{p'}$ défini par la formule $X_{\text{adm}}^{(p')}(\mathbf{a}) = \{\mathbf{b} \in X^{p'}, (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \text{ est admissible}\}$. On note $X_{\text{adm}}(\mathbf{a})$ au lieu de $X_{\text{adm}}^{(1)}(\mathbf{a})$.
- $\Sigma_q(X)$ est l’ensemble des courbes admissibles de X .
- $\Sigma_q(X; \mathbf{a})$ est l’ensemble des courbes $C \in \Sigma_q(X)$ qui contiennent le p -uplet \mathbf{a} .

Le fait que $X_{\text{adm}}^{(p')}(\mathbf{a})$ est un ouvert dense de $X^{p'}$ se vérifie sans difficulté.

Considérons l’exemple fondamental d’une variété $X \in \mathcal{X}_{r+1,2}(q)$, autrement dit d’une variété de Veronese d’ordre q . Dans ce cas, $X_{\text{adm}} = X$ et $X_{\text{adm}}(\mathbf{a}) = X \setminus \{a\}$ pour tout $a \in X$. Tout 2-uplet de X est admissible et $\Sigma_q(X) = \text{CRN}_q(X) = \text{CR}_q(X)$ est une variété compacte lisse de dimension $2r$. Un isomorphisme de Veronese $\mathbb{P}^{r+1} \rightarrow X$ induit un isomorphisme de la paire $(\mathbb{P}^{r+1}, \Sigma_1(\mathbb{P}^{r+1}))$, où $\Sigma_1(\mathbb{P}^{r+1})$ est la grassmannienne $\mathbb{G}_{r,2}$ des droites de \mathbb{P}^{r+1} , sur la paire $(X, \Sigma_q(X))$. Les propriétés de la seconde paire qu’on utilisera sont simplement des traductions de propriétés bien connues de la première.

1. Les p -uplets avec $p \geq 2$ seront toujours notés par des minuscules latines grasses $\mathbf{a}, \hat{\mathbf{a}}, \mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}} \dots$

2.4. Projections sur une variété de Veronese. — On sait que, si $n = 2$, X est une variété de Veronese d'ordre q . On suppose maintenant $n \geq 3$.

Définition 2.5. — Une *pondération* est un élément $(\rho_1, \dots, \rho_{n-1})$ de \mathbb{N}^{n-1} tel qu'on ait $\rho_i = \rho$ pour m et $\rho_i = \rho - 1$ pour $n - 1 - m$ valeurs de $i \in \{1, \dots, n - 1\}$.

Une pondération étant fixée, si $p \in \{1, \dots, n - 2\}$ et si $\max(\rho_{p+1}, \dots, \rho_{n-1}) \geq 1$, on associe à tout p -uplet admissible $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_p)$ les projections $\theta_{\mathbf{a}}$ de centre la somme directe $\bigoplus_{i=1}^p X_{a_i}(\rho_i)$. On dit que $\theta_{\mathbf{a}}$ est une *projection osculatrice associée à \mathbf{a}* .

La condition $\max(\rho_{p+1}, \dots, \rho_{n-1}) \geq 1$ est là pour éviter des projections dont la restriction à X dégénère. On pourra toujours supposer sans dommage qu'on a $\rho_{n-1} \geq 1$.

On considère d'abord des projections osculatrices associées à des $(n - 2)$ -uplets admissibles. Ce sont de loin les plus importantes.

Pour fixer les idées, on choisit dans ce chapitre, sauf la dernière section, la pondération

$$(6) \quad (\rho_1, \dots, \rho_{n-1}) = (\rho - 1, \dots, \rho - 1, \rho, \dots, \rho),$$

(on utilisera les deux notations) mais on aurait un résultat analogue au suivant pour une pondération générale avec $\rho_{n-1} \geq 1$, la projection de X étant alors une variété de Veronese d'ordre ρ_{n-1} .

Le résultat suivant est l'outil-clé pour toute la suite.

Proposition 2.6. — Soit \mathbf{a} un $(n - 2)$ -uplet admissible de X et $\theta_{\mathbf{a}}$ une projection osculatrice associée. Elle induit une application birationnelle $\theta_{\mathbf{a}} : X \dashrightarrow X'$, où $X' = \theta_{\mathbf{a}}(X)$ est une variété de Veronese d'ordre ρ , et un difféomorphisme de $X_{\text{adm}}(\mathbf{a})$ sur son image.

Si $\mathbf{x} \in X_{\text{adm}}^{(2)}(\mathbf{a})$, il existe un seul cycle $C \in \text{CR}_q(X)$ qui contient (\mathbf{a}, \mathbf{x}) . Il appartient à $\Sigma_q(X; \mathbf{a})$ et $\theta_{\mathbf{a}}(C)$ est l'unique élément de $\Sigma_\rho(X')$ qui contient $\theta_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$. De plus, la projection $\theta_{\mathbf{a}}$ est définie comme morphisme au voisinage de $C \setminus \mathbf{a}$ et $\theta_{\mathbf{a}} : C \setminus \mathbf{a} \rightarrow \theta_{\mathbf{a}}(C)$ est la restriction d'un isomorphisme de C sur $\theta_{\mathbf{a}}(C)$.

Démonstration. — Comme $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_{n-2})$ est fixé, on ne note pas \mathbf{a} en indice. On considère une projection de centre $\mathbb{Q} = \bigoplus_{i=1}^{n-2} X_{a_i}(\rho_i)$, soit

$$(7) \quad \theta : \mathbb{P}^N \dashrightarrow X_c(\rho),$$

où $c \in X_{\text{adm}}(\mathbf{a})$. Bien sûr le choix de la cible est sans importance.

On note X' l'image $\theta(X)$ de X et $\theta : X \dashrightarrow X'$ l'application induite⁽²⁾. Comme $\langle X \rangle = \mathbb{P}^N$, on a $\langle X' \rangle = X_c(\rho)$, donc $\dim \langle X' \rangle = \pi_{r,2}(\rho)$.

Soit $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in X_{\text{adm}}^{(2)}(\mathbf{a})$. Comme $\mathbb{P}^N = \mathbb{Q} \oplus X_{x_1}(\rho)$, la projection θ induit un difféomorphisme local du germe de X en x_1 sur un germe lisse et ρ -régulier $\tilde{X}' \subset X'$ en $\theta(x_1)$, de dimension $r + 1$. On ne sait pas si X' est lisse aux points $\theta(x_1)$ et $\theta(x_2)$ mais c'est bien sûr vrai pour un choix générique de $\mathbf{x} \in X_{\text{adm}}^{(2)}(\mathbf{a})$.

2. Soit \widehat{X} une variété irréductible et $\theta : \widehat{X} \dashrightarrow \mathbb{P}^m$ une application rationnelle. Celle-ci est définie comme morphisme sur un ouvert dense \widehat{X}' de \widehat{X} . Suivant l'usage, si X est une sous-variété irréductible de \widehat{X} et si $X \cap \widehat{X}'$ est non vide, on note $\theta(X)$ l'adhérence de Zariski de $\theta(X \cap \widehat{X}')$ et $\theta : X \dashrightarrow \theta(X)$ l'application rationnelle induite par la restriction de θ à $X \cap \widehat{X}'$.

Soit C un élément de $\text{CR}_q(X)$ qui contient (\mathbf{a}, \mathbf{x}) . Compte tenu du Lemme 2.1, C est une courbe admissible. Elle n'est pas contenue dans \mathbb{Q} et d'après ce qui précède, $\theta(C)$ est une courbe irréductible $C' \subset X'$.

Si H' est un hyperplan de $X_c(\rho)$ et $H = \mathbb{Q} \oplus H'$, la courbe C coupe H en a_i avec au moins la multiplicité $\rho_i + 1$, $i = 1, \dots, n - 2$. Le degré de son image C' est donc majoré par $q - \sum_{i=1}^{n-2} (\rho_i + 1)$, c'est-à-dire par ρ . D'autre part, l'image du germe de C en x_1 est un germe de courbe lisse contenu dans le germe ρ -régulier \tilde{X}' et donc ρ -régulier. Ainsi C' est une courbe ρ -régulière de degré $\leq \rho$, une courbe rationnelle normale de degré ρ .

Comme les courbes C et C' sont lisses, l'application rationnelle induite $\theta : C \dashrightarrow C'$ est en fait un morphisme qu'on note $\theta_C : C \rightarrow C'$, pour éviter les confusions ($\theta_C(\mathbf{a})$ dépend de C). Reprenons le décompte de $C \cap H$. On a $C \cap \mathbb{Q} = \mathbf{a}$, sinon on trouverait que le degré de C' est au plus $\rho - 1$, et comme le cardinal de $C \cap (H \setminus \mathbb{Q})$ est $\leq \rho$, θ_C est un isomorphisme. En résumé,

la projection θ est définie comme morphisme au voisinage de $C \setminus \mathbf{a}$ et sa restriction à $C \setminus \mathbf{a}$ se prolonge en un isomorphisme de C sur $\theta(C)$, un élément de $\text{CRN}_\rho(X')$.

Dans le raisonnement qu'on vient de faire, $\mathbf{x} \in X_{\text{adm}}^{(2)}(\mathbf{a})$ était quelconque et, comme on a dit, pour \mathbf{x} voisin d'un 2-uplet \mathbf{x}_0 bien choisi, les deux points distincts $\theta(x_1)$ et $\theta(x_2)$ appartiennent à X'_{reg} . Ainsi, pour toute paire (x'_1, x'_2) d'un ouvert non vide de X' , il existe une courbe $C' \in \text{CRN}_\rho(X')$ qui passe par x'_1 et x'_2 . Comme X' engendre un espace de dimension $\pi_{r,2}(\rho)$, X' est une variété de la classe $\mathcal{X}_{r+1,2}(\rho)$. Compte tenu du Théorème 1.5,

X' est une variété de Veronese d'ordre ρ , en particulier X' est lisse.

Soit $x_1, x_2 \in X_{\text{adm}}(\mathbf{a})$. Comme $X_{\text{adm}}(\mathbf{a}, x_1)$ et $X_{\text{adm}}(\mathbf{a}, x_2)$ sont des ouverts denses de X , on peut considérer un point x_0 de X tel que les n -uplets $\mathbf{x}_1 = (\mathbf{a}, x_0, x_1)$ et $\mathbf{x}_2 = (\mathbf{a}, x_0, x_2)$ soient admissibles. Soit $C_1, C_2 \in \text{CR}_q(X)$ des cycles qui contiennent respectivement \mathbf{x}_1 et \mathbf{x}_2 . Compte tenu du Lemme 2.1, ce sont des courbes admissibles. Si $\theta(x_1) = \theta(x_2)$, les courbes admissibles C_1 et C_2 ont la même image par θ , la courbe $C' \in \text{CRN}_\rho(X')$ qui passe par $\theta(x_0)$ et $\theta(x_1) = \theta(x_2)$. Ainsi C_1 et C_2 ont le même germe en x_0 , donc $C_1 = C_2$. Comme la restriction de θ à $C_1 \setminus \mathbf{a}$ est injective, on obtient $x_1 = x_2$.

Ceci montre que la restriction de θ à $X_{\text{adm}}(\mathbf{a})$ est injective. Comme elle est de rang constant $r + 1$, c'est un difféomorphisme de $X_{\text{adm}}(\mathbf{a})$ sur son image dans X' . En particulier, $\theta : X \dashrightarrow X'$ est birationnelle.

Ceci montre aussi que, pour tout $\mathbf{x} \in X_{\text{adm}}^{(n)}$, il existe un et un seul cycle $C \in \text{CR}_q(X)$, nécessairement un élément de $\text{CRN}_q(X)$, dont le support contient \mathbf{x} . \square

2.5. Une traduction et une première application. — La Proposition 2.6 a une jumelle qu'on obtient en composant l'application osculatrice $\theta_{\mathbf{a}} : X \dashrightarrow X'$ avec l'inverse d'un isomorphisme de Veronese de \mathbb{P}^{r+1} sur X' .

Proposition 2.7. — *Soit $n \geq 3$, X une variété de la classe $\mathcal{X}_{r+1,n}(q)$ et \mathbf{a} un $(n - 2)$ -uplet admissible de X . Il existe une application birationnelle $\pi_{\mathbf{a}} : X \dashrightarrow \mathbb{P}^{r+1}$, telle $\pi_{\mathbf{a}}(C)$ est une droite de \mathbb{P}^{r+1} pour toute courbe $C \in \Sigma_q(X; \mathbf{a})$.*

L'application $\pi_{\mathbf{a}}$ induit un difféomorphisme de $X_{\text{adm}}(\mathbf{a})$ sur son image dans \mathbb{P}^{r+1} et si $C \in \Sigma_q(X; \mathbf{a})$, $\pi_{\mathbf{a}}$ est un morphisme au voisinage de $C \setminus \mathbf{a}$ dont la restriction à $C \setminus \mathbf{a}$ se prolonge en un isomorphisme de la courbe C sur la droite $\pi_{\mathbf{a}}(C)$.

On dira aussi que l'application birationnelle $\pi_{\mathbf{a}} : X \dashrightarrow \mathbb{P}^{r+1}$ est *associée à \mathbf{a}* . Elle est déterminée à la composition à gauche près par un automorphisme de \mathbb{P}^{r+1} . Selon la situation on utilisera la Proposition 2.6 ou la Proposition 2.7.

L'un des points de la Proposition 2.6 s'énonce sans référence à une projection osculatrice. Si $\mathbf{x} \in X_{\text{adm}}^{(n)}$, un seul élément de $\text{CR}_q(X)$ contient \mathbf{x} , c'est une courbe admissible. L'adhérence de Zariski $\overline{\Sigma}_q(X)$ de $\Sigma_q(X)$ dans $\text{CR}_q(X)$ est donc la seule composante Z de $\text{CR}_q(X)$, telle que la projection $\{(C, \mathbf{x}) \in Z \times X^n, \mathbf{x} \subset |C|^n\} \rightarrow X^n$ soit surjective.

Considérons la variété d'incidence $I = \{(C, \mathbf{x}) \in \overline{\Sigma}_q(X) \times X^n, \mathbf{x} \subset |C|\}$ et la projection $p : I \rightarrow X^n$. L'image réciproque d'un élément $\mathbf{x} \in X_{\text{adm}}^{(n)}$ est réduite à un point. Il en résulte qu'il existe une et une seule composante irréductible I_0 de I telle que le morphisme induit $p : I_0 \rightarrow X^n$ soit surjectif. Pour la même raison, c'est une application birationnelle, dont l'inverse $p^{-1} : X^n \dashrightarrow I_0$ n'a pas de point d'indétermination sur l'ouvert lisse $X_{\text{adm}}^{(n)}$. On a donc le résultat suivant.

Lemme 2.8. — *L'adhérence de Zariski $\overline{\Sigma}_q(X)$ de l'ensemble $\Sigma_q(X)$ des courbes admissibles de X est la seule composante irréductible de $\text{CR}_q(X)$ qui vérifie que, pour $\mathbf{x} \in X^n$, il existe un élément de cette composante dont le support contient \mathbf{x} . L'application*

$$(8) \quad \gamma : X_{\text{adm}}^{(n)} \rightarrow \Sigma_q(X),$$

qui à tout $\mathbf{x} \in X_{\text{adm}}^{(n)}$ associe l'unique cycle $C \in \text{CR}_q(X)$ dont le support contient \mathbf{x} , en fait une courbe admissible, est analytique et ouverte.

2.6. Applications. — Comme on ne fait pas d'hypothèse de régularité sur X , on préfère dans un premier temps voir X comme une sous-variété de \mathbb{P}^N et $\Sigma_q(X)$ comme une sous-variété de la variété lisse (non fermée) $\text{CRN}_q(\mathbb{P}^N)$.

On s'intéresse à l'application analytique et ouverte $\gamma : X_{\text{adm}}^{(n)} \rightarrow \Sigma_q(X)$, définie dans le lemme précédent.

Si $\widehat{\mathbf{a}} \in X_{\text{adm}}^{(n)}$, l'espace tangent à la variété lisse $\text{CRN}_q(\mathbb{P}^N)$ en $\gamma(\widehat{\mathbf{a}})$ s'identifie à un sous-espace, en fait à tout l'espace mais ce n'est pas important ici, de l'espace des sections analytiques globales du fibré normal $N_{\gamma(\widehat{\mathbf{a}})}\mathbb{P}^N$ à $\gamma(\widehat{\mathbf{a}})$ dans \mathbb{P}^N , qu'on note $H^0(\gamma(\widehat{\mathbf{a}}), N_{\gamma(\widehat{\mathbf{a}})}\mathbb{P}^N)$. Dans la suite, on fait cette identification :

$$T_{\gamma(\widehat{\mathbf{a}})}\text{CRN}_q(\mathbb{P}^N) \subset H^0(\gamma(\widehat{\mathbf{a}}), N_{\gamma(\widehat{\mathbf{a}})}\mathbb{P}^N).$$

Rappelons comment elle s'interprète.

Soit Λ un germe de variété lisse et $v : \Lambda \rightarrow \text{CRN}_q(\mathbb{P}^N)$ une application analytique. Quitte à choisir le représentant Λ assez petit, il existe un relèvement $V : \Lambda \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^N$ de v , c'est-à-dire une application analytique telle que, pour $\lambda \in \Lambda$ fixé, l'application $V_\lambda : t \mapsto V(\lambda, t)$ est un isomorphisme de \mathbb{P}^1 sur la courbe $v(\lambda)$.

La différentielle $dv(\lambda) : T_\lambda\Lambda \rightarrow T_{v(\lambda)}\text{CRN}_q(\mathbb{P}^N)$ de v en $\lambda \in \Lambda$, associée à $\nu \in T_\lambda\Lambda$ la section de $N_{v(\lambda)}\mathbb{P}^N$ donnée par :

$$(9) \quad p \in v(\lambda), \quad (dv(\lambda) \cdot \nu)(p) = \frac{\partial V}{\partial \lambda}(\lambda, V_\lambda^{-1}(p)) \cdot \nu \text{ modulo } T_p v(\lambda).$$

On vérifie sans peine, et c'est bien connu, que le résultat ne dépend pas du relèvement choisi et qu'il est local. On entend par là que si $p_0 \in v(\lambda_0)$, pour calculer la section $dv(\lambda_0) \cdot \nu$ au voisinage de p_0 dans $v(\lambda_0)$, un relèvement local de v suffit, *i.e.* une application

analytique $V : \Lambda \times \omega \rightarrow \mathbb{P}^N$, où ω est un voisinage d'un point $t_0 \in \mathbb{P}^1$, telle qu'on ait $V(\lambda_0, t_0) = p_0$ et que, pour tout $\lambda \in \Lambda$, $t \mapsto V(\lambda, t)$ soit un plongement $V_\lambda : \omega \rightarrow v(\lambda)$.

Dans cette section, on démontre un résultat sur la régularité de la variété X et un autre sur la régularité et la structure de la variété $\Sigma_q(X)$ des courbes admissibles. Les démonstrations reposent sur la considération de certaines applications partielles induites par l'application γ définie par (8) et sur la Proposition 2.7.

On décrit la situation modèle. On se donne un n -uplet admissible

$$\widehat{\mathbf{a}} = (a_1, \dots, a_n),$$

qu'on note aussi

$$\widehat{\mathbf{a}} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}), \quad \mathbf{a} = (a_1, \dots, a_{n-2}), \quad \mathbf{b} = (b_1, b_2).$$

Soit $\pi : X \dashrightarrow \mathbb{P}^{r+1}$ une application birationnelle associée à \mathbf{a} . On note $\mathbf{b}' = \pi(\mathbf{b})$, c'est-à-dire $b'_1 = \pi(b_1)$, $b'_2 = \pi(b_2)$. On introduit les *germes* d'applications

$$(10) \quad v : (X^2, \mathbf{b}) \rightarrow \text{CRN}_q(\mathbb{P}^N), \quad l : ((\mathbb{P}^{r+1})^2, \mathbf{b}') \rightarrow \text{CRN}_1(\mathbb{P}^{r+1}),$$

où $v(\mathbf{x}) = \gamma(\mathbf{a}, \mathbf{x})$ pour \mathbf{x} voisin de \mathbf{b} et $l(\mathbf{x}')$ est la droite qui contient \mathbf{x}' , pour \mathbf{x}' voisin de \mathbf{b}' . On introduit des *germes* de relèvements de v et de l

$$(11) \quad V : (X^2, \mathbf{b}) \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^N, \quad L : ((\mathbb{P}^{r+1})^2, \mathbf{b}') \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^{r+1}.$$

On les choisit *normalisés de façon concordante*. Par exemple, on se donne un troisième point $b_3 \in X_{\text{adm}}(\mathbf{a}) \cap \gamma(\widehat{\mathbf{a}})$ et on impose les conditions de normalisation

$$(12) \quad V(\mathbf{x}, t_k) \in Y_{b_k}, \quad L(\mathbf{x}, t_k) \in \pi(Y_{b_k}), \quad k = 1, 2, 3,$$

où Y_{b_k} est un germe d'hypersurface lisse donné transverse à la courbe $\gamma(\widehat{\mathbf{a}})$ en b_k et par exemple $(t_1, t_2, t_3) = (1, 0, \infty)$.

Comme le morphisme $v(\mathbf{x}) \setminus \mathbf{a} \rightarrow l(\pi(\mathbf{x}))$ induit par π est la restriction d'un isomorphisme de $v(\mathbf{x})$ sur $l(\pi(\mathbf{x}))$ et compte tenu de la concordance des relèvements, on a :

$$(13) \quad V(\mathbf{x}, t) \notin \mathbf{a} \Rightarrow \pi(V(\mathbf{x}, t)) = L(\pi(\mathbf{x}), t).$$

Cette remarque est suffisante pour démontrer le résultat suivant, qui sera important dans le Chapitre 3. Il implique en particulier que le nombre d'intersection $Y \cdot C$ est bien défini, si Y est une hypersurface de X et $C \not\subset Y$ une courbe admissible.

Théorème 2.9. — *Une variété $X \in \mathcal{X}_{r+1, n}(q)$ est lisse au voisinage de toute courbe admissible de X . Tout n -uplet de points deux-à-deux distincts d'une courbe admissible est admissible. L'ouvert X_{adm} des points admissibles de X est donc aussi la réunion des courbes admissibles de X .*

Démonstration. — On considère la situation qu'on vient de décrire en préambule à l'énoncé et on conserve ses notations, en particulier (11). Il est commode de choisir la normalisation (12) des relèvements normalisés concordants V et L .

Comme un point admissible appartient à X_{reg} , il suffit, pour démontrer la première partie de l'énoncé, de montrer que X est lisse au voisinage de tout point $p_0 \in \gamma(\widehat{\mathbf{a}}) \setminus \widehat{\mathbf{a}}$. Notons Y pour Y_{b_2} , Y' pour $\pi(Y_{b_2})$ et :

$$V_\star(y, t) = V(b_1, y, t), \quad L_\star(y', t) = L(b'_1, y', t), \quad y \in Y, \quad y' \in Y', \quad t \in \mathbb{P}^1 \setminus \{0\}.$$

Soit $p_0 = V(\mathbf{b}, t_0) \in \gamma(\widehat{\mathbf{a}}) \setminus \widehat{\mathbf{a}}$ donc avec $t_0 \neq 0$. L'application L_* est de rang constant $r+1$. Compte tenu de l'égalité (13), il en découle que $(y, t) \mapsto \pi(V_*(y, t))$ est de rang maximal $r+1$ en (b_2, t_0) . On en déduit d'abord que $(y, t) \mapsto V_*(y, t)$ est de rang maximal $r+1$ au même point donc paramètre un germe de variété lisse $\tilde{X} \subset X$ en p_0 , de dimension $r+1$, ensuite que la restriction de π à \tilde{X} est de rang $r+1$ en p_0 , donc induit un difféomorphisme local de \tilde{X} sur son image dans \mathbb{P}^{r+1} .

En particulier, l'image de \tilde{X} contient un voisinage U de $\pi(p_0)$ dans \mathbb{P}^{r+1} . Si \tilde{X} n'était pas le germe de X en p_0 , il existerait en p_0 un *autre* germe $\check{X} \subset X$ de variété de dimension $r+1$ et, dans la situation qu'on considère, l'image de \check{X} contiendrait un ouvert non vide de U puisque $\pi : X \dashrightarrow \mathbb{P}^{r+1}$ est dominante, en contradiction avec le fait que $\pi : X \dashrightarrow \mathbb{P}^{r+1}$ est birationnelle.

Pour démontrer la deuxième partie de l'énoncé il suffit, dans la même situation, de montrer que le n -uplet (\mathbf{a}, p_0, b_2) est admissible. Le résultat annoncé, que tout n -uplet de $\gamma(\widehat{\mathbf{a}})$ est admissible, en découle par itération et en changeant de $(n-2)$ -uplet \mathbf{a} .

Comme $p_0 \in X_{\text{reg}}$, compte tenu de la Définition 2.3 et par symétrie, il suffit de montrer que les courbes admissibles qui passent par \mathbf{a} et b_2 recouvrent un voisinage de p_0 , ce qu'on vient de faire, et que les courbes admissibles qui passent par \mathbf{a} et p_0 recouvrent un voisinage de b_2 , ce qui maintenant est clair, puisque les droites qui passent par $\pi(p_0)$ et un point voisin de b'_1 recouvrent un voisinage de b'_2 . \square

On revient à la situation modèle décrite avant l'énoncé précédent⁽³⁾. On s'intéresse maintenant aux dérivées des applications (10),

$$dv(\mathbf{b}) : T_{\mathbf{b}}X^2 \rightarrow T_{v(\mathbf{b})}\text{CRN}_q(\mathbb{P}^N), \quad dl(\mathbf{b}') : T_{\mathbf{b}'}(\mathbb{P}^{r+1})^2 \rightarrow T_{l(\mathbf{b}')}\text{CRN}_1(\mathbb{P}^{r+1}),$$

en \mathbf{b} et en $\mathbf{b}' = \pi(\mathbf{b})$. Les propriétés de $dl(\mathbf{b}')$ sont connues, elles concernent la grassmannienne des droites de \mathbb{P}^{r+1} . D'autre part, en dérivant l'identité de (13) en \mathbf{b} , dans la direction $\boldsymbol{\nu} \in T_{\mathbf{b}}X^2$, voir aussi la formule (9), on obtient la relation

$$(14) \quad p \in v(\mathbf{b}) \setminus \mathbf{a}, \quad d\pi(p) \cdot ((dv(\mathbf{b}) \cdot \boldsymbol{\nu})(p)) = (dl(\mathbf{b}') \cdot \boldsymbol{\nu}')(p),$$

où $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2) \in T_{(b_1, b_2)}(X \times X)$ et $\boldsymbol{\nu}' = (d\pi(b_1) \cdot \nu_1, d\pi(b_2) \cdot \nu_2)$.

Notons l la droite $l(\mathbf{b}')$. Le fibré normal $N_l\mathbb{P}^{r+1}$ est une somme directe de r fibrés en droites de degré 1. On a :

$$\ker dl(\mathbf{b}') = T_{(b'_1, b'_2)}(l \times l), \quad \text{im } dl(\mathbf{b}') = H^0(l, N_l\mathbb{P}^{r+1}).$$

Une section globale non nulle de $N_l\mathbb{P}^{r+1}$ s'annule au plus en un point, simplement.

Notons C la courbe $\gamma(\widehat{\mathbf{a}}) = v(\mathbf{b})$. Pour tout $p \in C \setminus \mathbf{a}$, l'application birationnelle $\pi : X \dashrightarrow \mathbb{P}^{r+1}$ induit un difféomorphisme local au voisinage de p . La dérivée $d\pi(p)$ induit des isomorphismes de T_pX sur $T_{\pi(p)}\mathbb{P}^{r+1}$ et de T_pC sur $T_{\pi(p)}l$, donc aussi de la fibre $(N_CX)_p$ de N_CX en p sur la fibre $(N_l\mathbb{P}^{r+1})_{\pi(p)}$ de $N_l\mathbb{P}^{r+1}$ en $\pi(p)$. Cette remarque s'applique en particulier à la relation $(\nu'_1, \nu'_2) = (d\pi(b_1) \cdot \nu_1, d\pi(b_2) \cdot \nu_2)$.

Du côté de $dv(\mathbf{b})$, on a :

$$\ker dv(\mathbf{b}) = T_{(b_1, b_2)}(C \times C), \quad \text{im } dv(\mathbf{b}) \subset H^0(C, N_CX) \subset H^0(C, N_C\mathbb{P}^N).$$

3. Le résultat qu'on a en vue est important seulement dans le Chapitre 4. Les considérations qui suivent ne servent pas dans la démonstration du Théorème 1.7.

La première relation résulte des propriétés de $dl(\mathbf{b}')$ et de (14), la seconde rappelle qu'on a identifié $T_C \text{CRN}(\mathbb{P}^N)$ à un sous-espace de $H^0(C, N_C \mathbb{P}^N)$ et que X est lisse au voisinage de C . Il résulte encore de (14) qu'on a un isomorphisme $\phi : \text{im } dv(\mathbf{b}) \rightarrow \text{im } dl(\mathbf{b}')$, compatible avec l'action naturelle de $d\pi(p) : (N_C X)_p \rightarrow (N_l \mathbb{P}^{r+1})_{\pi(p)}$ en dehors de \mathbf{a} . On a donc un isomorphisme

$$(15) \quad \phi : \text{im } dv(\mathbf{b}) \rightarrow H^0(l, N_l \mathbb{P}^{r+1}); \quad \phi(\xi)(\pi(p)) = d\pi(p) \cdot \xi(p) \text{ si } p \in C \setminus \mathbf{a}.$$

On a presque obtenu le lemme suivant, dont l'énoncé ne fait plus référence aux applications osculatrices. Rappelons qu'une section non nulle de $N_C X$ engendre un sous-fibré en droites $L(\xi)$ de $N_C X$ dont elle est une section ⁽⁴⁾.

Lemme 2.10. — *Soit C une courbe admissible de X et $\hat{\mathbf{a}} = (a_1, \dots, a_n)$ un n -uplet de C . Pour $i = 1, \dots, n$, soit $E_i \subset H^0(C, N_C X)$ l'image de la restriction de la dérivée $d\gamma(\hat{\mathbf{a}})$ au sous-espace $\{0\} \times \dots \times \{0\} \times T_{a_i} X \times \{0\} \times \dots \times \{0\}$ de $T_{\hat{\mathbf{a}}} X^n$. On a :*

1. *pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ l'espace E_i est de dimension r et une section non nulle $\xi \in E_i$ de $N_C X$ s'annule simplement aux points de $\hat{\mathbf{a}} \setminus \{a_i\}$ et nulle part ailleurs ;*
2. *pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$ et toute section non nulle $\xi \in E_i$, il existe une section non nulle $\eta \in E_j$ qui définit le même sous-fibré en droites de $N_C X$: $L(\eta) = L(\xi)$.*

Démonstration. — Par symétrie, on peut supposer $i = n$. Notons $a_n = b_2$. Si $a_{n-1} = b_1$, on retrouve la situation modèle et $E_n \subset H^0(C, N_C X)$ est aussi l'image de la restriction de $dv(\mathbf{b})$ au sous-espace $\{0\} \times T_{b_2} X$ de $T_{\mathbf{b}} X^2$. Compte tenu de (15), E_n est de dimension r et une section non nulle $\xi \in E_n$ de $N_C X$ s'annule en a_1, \dots, a_{n-2} , simplement en a_{n-1} et nulle part ailleurs. Par symétrie, on obtient la première partie de l'énoncé.

La seconde partie est évidente si $i = j$. Par symétrie, on peut supposer $i = n, j = n-1$ et retrouver la situation modèle. Soit $\xi \in E_n$ une section non nulle de $N_C X$. Son image $\xi' = \phi(\xi)$ engendre un sous-fibré en droite $L(\xi')$ de $N_l \mathbb{P}^{r+1}$, de degré 1, et l'image de $dl(\mathbf{b}')$ contient les sections de ce fibré. Soit η' une section non nulle de $L(\xi')$ qui s'annule en $b'_1 = \pi(a_{n-1})$. Comme ϕ est un isomorphisme et compte tenu de (15), $\eta' = \phi(\eta)$ pour un $\eta \in E_{n-1}$. D'autre part η est une section de $L(\xi)$ d'après (15). D'où la seconde partie du lemme. \square

La conséquence suivante est importante.

Théorème 2.11. — *La variété algébrique $\overline{\Sigma}_q(X)$ est de dimension rn et l'ouvert dense $\Sigma_q(X)$ des courbes admissibles de X est contenu dans sa partie lisse.*

Pour toute courbe admissible C de X , son fibré normal $N_C X$ est une somme directe de r sous-fibrés en droites de degré $n-1$ et $T_C \Sigma_q(X) = H^0(C, N_C X)$.

Si \mathbf{a} est un p -uplet de C , l'ensemble $\Sigma_q(X; \mathbf{a})$ des courbes admissibles qui contiennent \mathbf{a} est une sous-variété lisse de dimension $(n-p)r$ de $\Sigma_q(X)$ et $T_C \Sigma_q(X; \mathbf{a})$ est l'espace des sections de $N_C X$ qui s'annulent sur \mathbf{a} .

4. Rappelons pourquoi. Au voisinage d'un zéro d'ordre $p \geq 1$ de ξ , on identifie C à un voisinage de $0 \in \mathbb{C}$ et on écrit $\xi(t) = t^p e(t)$; alors e définit un fibré en droites sur un voisinage U de 0, qui prolonge celui que ξ définit sur $U \setminus \{0\}$.

Démonstration. — L'application $\gamma : X_{\text{adm}}^{(n)} \rightarrow \Sigma_q(X)$ est ouverte donc l'image du germe de $X_{\text{adm}}^{(n)}$ en un point est le germe de $\Sigma_q(X)$ au point image. Compte tenu du théorème du rang, il suffit, pour montrer que $\Sigma_q(X)$ est lisse de dimension rn , de montrer que l'application $\gamma : X_{\text{adm}}^{(n)} \rightarrow \text{CRN}_q(\mathbb{P}^N)$ est de rang constant rn .

Soit $\hat{\mathbf{a}} \in X_{\text{adm}}^{(n)}$. Notons $C = \gamma(\hat{\mathbf{a}})$ et

$$E = \text{im } d\gamma(\hat{\mathbf{a}}) \subset H^0(C, N_C X).$$

On définit les sous-espaces E_1, \dots, E_n de E comme dans le lemme précédent. Ils sont de dimension r et $E = \sum_{i=1}^n E_i$. Cette somme est directe : si $\xi_i \in E_i$, et $\sum_{i=1}^n \xi_i = 0$, on vérifie que chaque terme s'annule en a_1, \dots, a_n , donc est nul d'après la première partie du Lemme 2.10. On a donc

$$E = \bigoplus_{i=1}^n E_i.$$

Ceci donne en particulier la première partie de l'énoncé.

La première partie du Lemme 2.10 montre aussi que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, la fibre $E_i(p) = \{\xi(p), \xi \in E_i\}$ de E_i vérifie $E_i(p) = (N_C X)_p$ si $p \in C \setminus \hat{\mathbf{a}}$ ou si $p = a_i$. Il en résulte que la fibre $E(p)$ de E est de dimension r pour tout $p \in C$.

Pour déterminer la structure de $N_C X$, partons par exemple d'une base $(\xi^\alpha)_{\alpha=1}^r$ de E_n . Pour chaque α , le fibré $\mathbb{L}(\xi^\alpha)$ engendré par ξ^α est de degré $n-1$. Les espaces

$$F^\alpha = H^0(C, \mathbb{L}(\xi^\alpha)) \subset H^0(C, N_C X), \quad \alpha = 1, \dots, r,$$

sont de dimension n et évidemment en somme directe. Pour α fixé et compte tenu de la seconde partie du Lemme 2.10, il existe, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ une section non nulle $\eta_i^\alpha \in E_i$ de $\mathbb{L}(\xi^\alpha)$. Les sections $\eta_1^\alpha, \dots, \eta_n^\alpha \in E$ sont linéairement indépendantes donc engendrent F^α . En particulier $F^\alpha \subset E$.

Ceci montre que $E = \bigoplus_{\alpha=1}^r F^\alpha$ puisque le premier membre contient le second et que les deux membres ont la même dimension. Comme les fibres de E sont de dimension r , les fibrés $\mathbb{L}(\xi^1), \dots, \mathbb{L}(\xi^r)$ sont en somme directe comme sous-fibrés de $N_C X$. On obtient que $N_C X = \bigoplus_{k=1}^r \mathbb{L}(\xi^k)$ est une somme directe de fibrés en droites de degré $n-1$ et que $E = H^0(C, N_C X)$. Ceci démontre la deuxième partie de l'énoncé.

Si $1 \leq p \leq n-1$, exactement le même argument qu'au début de la démonstration, appliqué à la restriction de γ à $\{(a_1, \dots, a_p)\} \times X_{\text{adm}}^{(n-p)}(a_1, \dots, a_p)$, montre que la variété $\Sigma_q(X; a_1, \dots, a_p)$ est lisse et que son espace tangent en C est donné par

$$T_C \Sigma_q(X; a_1, \dots, a_p) = \bigoplus_{i=p+1}^n E_i.$$

Il est de dimension $(n-p)r$. Comme $N_C X$ est une somme directe de fibrés en droites de degré $n-1$, l'espace de ses sections qui s'annulent en a_1, \dots, a_p est de dimension $(n-p)r$ et donc $T_C \Sigma_q(X; a_1, \dots, a_p)$ est égal à cet espace. \square

Finissons par une remarque. On obtient des « cartes locales » de $\Sigma_q(X)$ au voisinage de la courbe $C = \gamma(\hat{\mathbf{a}})$ en choisissant, pour $i = 1, \dots, n$, un germe d'hypersurface lisse $Y_i \subset X$, transverse à C en a_i . La restriction de γ ,

$$\gamma|_{Y_1 \times \dots \times Y_n} : \prod_{i=1}^n Y_i \rightarrow \Sigma_q(X)$$

est, compte tenu de ce qui précède, un difféomorphisme local. De même, si $1 \leq p \leq n-1$, sa restriction $\prod_{i=1}^p \{a_i\} \times \prod_{i=p+1}^n Y_i \rightarrow \Sigma_q(X; a_1, \dots, a_p)$ est un difféomorphisme local.

2.7. Projections osculatrices générales. — On démontre l'analogue de la Proposition 2.6 pour une projection osculatrice associée à un point admissible pondéré de X . Par composition de telles projections, le résultat couvre en fait le cas d'une projection osculatrice générale. On se donne une pondération

$$(\rho_1, \dots, \rho_{n-1}), \quad \text{avec } \rho_{n-1} \geq 1.$$

Proposition 2.12. — *On suppose $n \geq 3$. Soit $a \in X_{\text{adm}}$ et θ_a une projection osculatrice de centre $X_a(\rho_1)$. La variété $\theta_a(X)$ appartient à la classe $\mathcal{X}_{r+1, n-1}(q - (\rho_1 + 1))$ et $\theta_a : X \dashrightarrow \theta_a(X)$ est birationnelle et induit un difféomorphisme de $X_{\text{adm}}(a)$ sur son image, contenue dans $\theta_a(X)_{\text{adm}}$. Si $\mathbf{b} \in X_{\text{adm}}^{(n-1)}(a)$, alors $\theta_a(\mathbf{b}) \in \theta_a(X)_{\text{adm}}^{(n-1)}$.*

Démonstration. — Soit (a, \mathbf{b}) un n -uplet admissible avec $\mathbf{b} = (b_2, \dots, b_n)$. On peut choisir la cible de la projection θ_a , soit :

$$\theta_a : \mathbb{P}^N \dashrightarrow \bigoplus_{i=2}^{n-1} X_{b_i}(\rho_i).$$

On note $\theta = \theta_a$, $X' = \theta(X)$ et $q' = q - (\rho_1 + 1)$.

Le début est une répétition de la démonstration de la Proposition 2.6. À défaut d'être clair, on essaiera d'être bref.

L'image X' de X engendre un espace de dimension $\pi_{r, n-1}(q')$ et pour $i = 2, \dots, n$, l'application $\theta : X \dashrightarrow X'$ induit un difféomorphisme local du germe de X en b_i sur un germe lisse et ρ' -régulier $X'_i \subset X'$ en b_i , de dimension $r + 1$. On a choisi la cible de telle sorte que $(X'_i)_{b_i}(\rho_i) = X_{b_i}(\rho_i)$.

Si un hyperplan H contient $X_a(\rho_1)$, une courbe $C \in \Sigma_q(X; a)$ coupe H au moins à l'ordre $(\rho_1 + 1)$ en a . Le degré de $C' = \theta(C)$ est donc $\leq q'$. D'autre part, pour tout $i \in \{2, \dots, n-1\}$, l'image C'_i du germe de C en b_i est un germe lisse donc ρ' -régulier en b_i et les osculateurs $(C'_i)_{b_i}(\rho_i)$ sont en somme directe projective. Il en résulte que C' engendre un espace de dimension $\geq q'$. Finalement $C' \in \text{CRN}_{q'}(X')$.

En faisant varier \mathbf{b} , on obtient que X' appartient à la classe $\mathcal{X}_{r+1, n-1}(q')$.

Pour montrer que, si $\mathbf{b} \in X_{\text{adm}}^{(n-1)}(a)$, alors $\theta(\mathbf{b}) = \mathbf{b}$ est un $(n-1)$ -uplet admissible de X' , il suffit, voir la Définition 2.3, de montrer que \mathbf{b} est contenu dans X'_{reg} . On utilise les résultats obtenus sur les projections osculatrices associées à un $(n-2)$ -uplet admissible pour le vérifier. C'est la raison pour laquelle on n'a pas traité d'emblée les projections osculatrices générales.

Il suffit de montrer que $b_{n-1} \in X'_{\text{reg}}$. Soit ϕ la projection $\bigoplus_{i=2}^{n-1} X_{b_i}(\rho_i) \dashrightarrow X_{b_{n-1}}(\rho_{n-1})$ de centre $\bigoplus_{i=2}^{n-2} X_{b_i}(\rho_i)$. La composée $\hat{\theta} = \phi \circ \theta$ est une projection osculatrice qui envoie X sur une variété de Veronese X'' d'ordre ρ_{n-1} . Comme $\hat{\theta} : X \dashrightarrow X''$ est birationnelle d'après la Proposition 2.6, il en va de même de $\theta : X \dashrightarrow X'$ et de $\phi : X' \dashrightarrow X''$. De même, comme $\hat{\theta}$ induit un difféomorphisme d'un voisinage de b_{n-1} dans X sur un voisinage de b_{n-1} dans X'' , le germe X'_{n-1} est le germe de X' en b_{n-1} . Donc b_{n-1} appartient à X'_{reg} . \square

Il est clair, compte tenu en particulier de la dernière partie de l'énoncé, qu'on obtient par itération un énoncé analogue pour une projection osculatrice associée à un p -uplet admissible, quel que soit $p \in \{1, \dots, n-2\}$.

3. Intégrabilité

3.1. Introduction. — Dans cette section, nous terminons la démonstration du Théorème 1.7. Présentons la stratégie suivie.

Si $X_0 \in \mathcal{X}_{r+1,n}(n-1)$, une section hyperplane générique de X_0 dans \mathbb{P}^{r+n-1} est une variété minimale de même degré. Le système $\mathcal{Y}(X_0)$ des sections hyperplanes de X_0 est donc un système linéaire de dimension $r+n-1$, dont l'élément générique Y appartient à la classe $\mathcal{X}_{r,n}(n-1)$. Compte tenu de la propriété fondamentale d'une application $\phi : X \dashrightarrow X_0$ qui associe une variété *standard* $X \in \mathcal{X}_{r+1,n}(q)$ à X_0 au sens de la Définition 1.8, le système linéaire $\phi^*(\mathcal{Y}(X_0))$ (comme X n'est pas supposée lisse, on précisera ce qu'on entend par là) est de dimension $r+n-1$ et son élément générique appartient à la classe $\mathcal{X}_{r,n}(q)$. En général, le problème est de définir, dans les cas favorables, un système linéaire $\mathcal{Y}(X)$ sur X qui vérifie ces propriétés.

Si $n=2$, X est une variété de Veronese d'ordre q et $\mathcal{Y}(X)$ est le système des variétés de Veronese $Y \subset X$, de dimension r et d'ordre q . C'est aussi l'image du système des hyperplans de $X_0 = \mathbb{P}^{r+1}$ par un isomorphisme de Veronese $\mathbb{P}^{r+1} \rightarrow X$.

En général, la solution est donnée par les projections osculatrices. En effet, soit C une courbe admissible, $\mathbf{a} \subset C$ un $(n-2)$ -uplet et $\theta_{\mathbf{a}}$ une application birationnelle associée de X sur une variété de Veronese $\theta_{\mathbf{a}}(X)$ d'ordre ρ . Si $Y \in \mathcal{X}_{r,n}(q)$ contient C , son image $\theta_{\mathbf{a}}(Y)$ appartient à $\mathcal{X}_{r,2}(\rho)$ pour la même raison que $\theta_{\mathbf{a}}(X)$ appartient à $\mathcal{X}_{r+1,2}(\rho)$.

Ceci suggère de considérer, pour tout $\mathbf{a} \in X_{\text{adm}}^{(n-2)}$, le système linéaire $\theta_{\mathbf{a}}^*(\mathcal{Y}(\theta_{\mathbf{a}}(X)))$. On introduira une notion provisoire d'« intégrabilité » de X dont on montrera qu'elle est équivalente au fait que les systèmes $\theta_{\mathbf{a}}^*(\mathcal{Y}(\theta_{\mathbf{a}}(X)))$ appartiennent à un même système linéaire, puis au fait que la variété X est standard.

Un argument géométrique très simple montrera que X est intégrable si $\rho \geq m$ dans la division euclidienne $q = \rho(n-1) + m - 1$ de q par $n-1$. En particulier, c'est le cas si $X \in \mathcal{X}_{r+1,3}(q)$ et $q \neq 3$.

Le cas général sera résolu grâce à un résultat d'hérédité de l'intégrabilité, qui a son intérêt propre :

si $n \geq 4$, la variété $X \in \mathcal{X}_{r+1,n}(q)$ est standard si et seulement si $\theta_{\mathbf{a}}(X)$ est un élément standard de $\mathcal{X}_{r+1,n-1}(q - (\rho_{\mathbf{a}} + 1))$ pour tout point admissible pondéré $\mathbf{a} \in X$.

Cet énoncé est faux si $n=3$.

3.2. Intégrabilité. — Les hypothèses générales et les notations sont les mêmes que dans le Chapitre 2. On suppose toujours $n \geq 3$. On utilisera le Théorème 2.9 et selon les cas, par commodité ou par hasard, la Proposition 2.6 ou la Proposition 2.7.

On notera $\pi_{\mathbf{a}} : X \dashrightarrow \mathbb{P}^{r+1}$ une application birationnelle associée à un $(n-2)$ -uplet admissible \mathbf{a} de X et \mathcal{H} le système linéaire des hyperplans de \mathbb{P}^{r+1} .

On notera $\theta_{\mathbf{a}} : X \dashrightarrow \theta_{\mathbf{a}}(X)$ une application birationnelle sur une variété de Veronese d'ordre ρ associée à $\mathbf{a} \in X_{\text{adm}}^{(n-2)}$ et souvent, $\mathcal{H}_{\mathbf{a}}$ au lieu de $\mathcal{Y}(\theta_{\mathbf{a}}(X))$, le système linéaire des diviseurs de Veronese d'ordre ρ de $\theta_{\mathbf{a}}(X)$.

Définition 3.1. — Un *diviseur admissible* de X est une sous-variété $Y \subset X$ irréductible de dimension r qui possède la propriété suivante : il existe une courbe admissible $C \subset Y$ et un $(n-2)$ -uplet \mathbf{a} de C tels que $\pi_{\mathbf{a}}(Y) \in \mathcal{H}$.

Les diviseurs admissibles *génériques* seront, dans les cas favorables, des générateurs du système linéaire qu'on va construire. On les obtient tous de la manière suivante.

Soit C une courbe admissible, $\mathbf{a} \subset C$ un $(n-2)$ -uplet et x_0 un point de $C \setminus \mathbf{a}$. Si $h \subset T_{x_0}X$ est un hyperplan qui contient $T_{x_0}C$ et si H est l'hyperplan de \mathbb{P}^{r+1} passant par $\pi(x_0)$ et de direction l'image de h dans $T_{\pi(x_0)}\mathbb{P}^{r+1}$, il est clair que $\pi_{\mathbf{a}}^{-1}(H)$ ⁽⁵⁾ est l'unique diviseur admissible Y qui contient C et est tel que $\pi_{\mathbf{a}}(Y) = H$.

Par construction, si $\hat{\mathbf{x}} \in Y^n$ est un n -uplet admissible qui contient \mathbf{a} , la courbe $\gamma(\hat{\mathbf{x}})$ est contenue dans Y , mais rien ne dit que Y contienne d'autres courbes admissibles que celles-ci.

Définition 3.2. — Si $n \geq 3$, on dit que $X \in \mathcal{X}_{r+1,n}(q)$ est *intégrable* (en tant qu'élément de la classe $\mathcal{X}_{r+1,n}(q)$) si tout diviseur admissible de X appartient à la classe $\mathcal{X}_{r,n}(q)$. On convient que tout $X \in \mathcal{X}_{r+1,2}(q)$ est intégrable.

Le résultat suivant donne des caractérisations de l'intégrabilité qu'on utilisera :

Proposition 3.3. — *Soit Y une sous-variété irréductible de X , de dimension r , contenant au moins une courbe admissible. Elle engendre un espace de dimension plus grande que $\pi_{r-1,n}(q)$ et les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *La variété Y appartient à la classe $\mathcal{X}_{r,n}(q)$.*
2. *On a $Y \cdot C = n - 1$ pour une ou toute courbe admissible $C \not\subset Y$.*
3. *On a $Y \cdot C \leq n - 1$ pour une ou toute courbe admissible $C \not\subset Y$.*
4. *Pour toute courbe admissible $C \subset Y$ et tout $(n-2)$ -uplet $\mathbf{a} \subset C$, on a $\pi_{\mathbf{a}}(Y) \in \mathcal{H}$.*
5. *Le diviseur Y est admissible et, pour toute courbe admissible $C \subset Y$ et pour tout $(n-2)$ -uplet $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_{n-2}) \subset C$, si $b_1 \in C \setminus \mathbf{a}$ et $\mathbf{b} = (b_1, a_2, \dots, a_{n-2})$, on a l'implication :*

$$(16) \quad \pi_{\mathbf{a}}(Y) \in \mathcal{H} \Rightarrow \pi_{\mathbf{b}}(Y) \in \mathcal{H}.$$

Démonstration. — Soit Y une sous-variété irréductible de X , de dimension r et contenant au moins une courbe admissible. Comme toute courbe $C \in \Sigma_q(X)$ est contenue dans X_{reg} le nombre d'intersection $Y \cdot C$ est bien défini si $C \not\subset Y$. D'autre part, si C est contenue dans Y et si $\hat{\mathbf{a}} \subset C$ est un n -uplet, un n -uplet $\hat{\mathbf{b}} \in Y_{\text{reg}}^n$ assez voisin de $\hat{\mathbf{a}}$ est admissible. Les osculateurs $Y_{b_1}(\rho), \dots, Y_{b_m}(\rho), Y_{b_{m+1}}(\rho-1), \dots, Y_{b_{n-1}}(\rho-1)$ sont alors de dimension maximale et, comme sous-espaces d'espaces en somme directe projective, ils le sont aussi. Donc Y engendre un espace de dimension $\geq \pi_{r-1,n}(q)$.

Supposons $Y \in \mathcal{X}_{r,n}(q)$. Si $\hat{\mathbf{x}}$ est un n -uplet admissible de X contenu dans Y , la courbe $\gamma(\hat{\mathbf{x}})$ est le *seul* élément de $\text{CR}_q(X)$ qui contient $\hat{\mathbf{x}}$. Par hypothèse, il existe un élément de $\text{CR}_q(Y)$ qui contient $\hat{\mathbf{x}}$. C'est nécessairement $\gamma(\hat{\mathbf{x}})$. Il en résulte qu'une courbe admissible qui a n points deux-à-deux distincts dans Y est contenue dans Y .

Par hypothèse, Y contient une courbe admissible C . Soit $\mathbf{a} \subset C$ un $(n-2)$ -uplet et $\mathbf{b} = (b_1, b_2) \subset C \setminus \mathbf{a}$ un 2-uplet. Soit $\mathbf{x} \in X^2$ voisin de \mathbf{b} et $C(\mathbf{x}) = \gamma(\mathbf{a}, \mathbf{x})$. Si $\mathbf{x} \subset Y$, la courbe $C(\mathbf{x})$ a au moins n points distincts dans Y donc est contenue dans Y . Il en

5. La notation $\pi_{\mathbf{a}}^{-1}(H)$ correspond à l'image de H par $\pi_{\mathbf{a}}^{-1} : \mathbb{P}^{r+1} \dashrightarrow X$, voir la note en bas de page signalée au début de la démonstration de la Proposition 2.6.

résulte que, pour tout 2-uplet $\mathbf{x}' \subset \pi_{\mathbf{a}}(Y)$ voisin de $\pi_{\mathbf{a}}(\mathbf{b})$, la droite qui contient \mathbf{x}' est contenue dans $\pi_{\mathbf{a}}(Y)$. Autrement dit $\pi_{\mathbf{a}}(Y)$ est un hyperplan H de \mathbb{P}^{r+1} .

On choisit maintenant $\mathbf{x} = (b_1, x)$ avec $x \notin Y$. La courbe $C(b_1, x)$ n'est pas contenue dans Y donc coupe Y en a_1, \dots, a_{n-1}, b_1 et nulle part ailleurs. Son image par $\pi_{\mathbf{a}}$ est une droite $l \not\subset H$: elle n'est pas tangente à H en $\pi_{\mathbf{a}}(b_1)$. Ainsi, la courbe $C(b_1, x)$ coupe Y transversalement en b_1 . Par symétrie en a_1, \dots, a_{n-1} et b_1 , elle coupe Y transversalement en tous ces points et donc $Y \cdot C(b_1, x) = n - 1$. Ceci montre que (1) implique (2). Évidemment (2) implique (3).

Supposons maintenant qu'on a $Y \cdot C \leq n - 1$ pour toute courbe admissible $C \not\subset Y$. En particulier, une courbe admissible qui a n points deux-à-deux distincts dans Y est contenue dans Y . Comme c'est la seule propriété utilisée, dans le paragraphe précédent, pour montrer que $\pi_{\mathbf{a}}(Y)$ est un hyperplan pour tout $(n - 2)$ -uplet \mathbf{a} contenu dans une courbe admissible contenue dans Y , on obtient que (3) implique (4).

Il est clair que (4) implique (5). On suppose enfin que Y vérifie (5). Notons \mathbf{A} l'ensemble des $(n - 2)$ -uplets \mathbf{a} contenus dans au moins une courbe admissible contenue dans Y et tels que $\pi_{\mathbf{a}}(Y) \in \mathcal{H}$.

Par hypothèse Y est un diviseur admissible, donc \mathbf{A} est non vide. On fixe $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$ et une courbe admissible $C \subset Y$ qui contient \mathbf{a} . On sait que $\pi_{\mathbf{a}}$ induit un difféomorphisme d'un voisinage de $C \setminus \mathbf{a}$ sur son image. En particulier, Y est lisse au voisinage de $C \setminus \mathbf{a}$.

Si $\mathbf{b} \subset C$ est un $(n - 2)$ -uplet disjoint de \mathbf{a} , l'hypothèse (5), appliquée $(n - 2)$ fois donne que \mathbf{b} appartient à \mathbf{A} . En particulier Y est lisse au voisinage de $C \setminus \mathbf{b}$ donc au voisinage de C . Si $\mathbf{b} \subset C$ n'est pas disjoint de \mathbf{a} , on obtient encore que \mathbf{b} appartient à \mathbf{A} en passant par l'intermédiaire d'un $(n - 2)$ -uplet $\mathbf{c} \subset C$, disjoint à la fois de \mathbf{a} et de \mathbf{b} . En résumé, si $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$, tout $(n - 2)$ -uplet d'une courbe admissible contenue dans Y qui contient \mathbf{a} appartient à \mathbf{A} et, d'autre part, on sait que toute courbe admissible qui contient un n -uplet admissible $\hat{\mathbf{y}} \subset Y$ qui contient \mathbf{a} est contenue dans Y .

Soit $\hat{\mathbf{a}} = (a_1, \dots, a_n)$ un n -uplet de C et $\hat{\mathbf{y}} = (y_1, \dots, y_n) \in Y^n$ voisin de $\hat{\mathbf{a}}$. On passe de $\hat{\mathbf{a}}$ à $\hat{\mathbf{y}}$ par l'intermédiaire des n -uplets admissibles

$$\hat{\mathbf{y}}_p = (y_1, \dots, y_p, a_{p+1}, \dots, a_n) \in Y^n, \quad p = 0, \dots, n.$$

La courbe $\gamma(\hat{\mathbf{y}}_0) = C$ est contenue dans Y et $(a_1, \dots, a_{n-2}) \in \mathbf{A}$ donc aussi tout $(n - 2)$ -uplet de $\gamma(\hat{\mathbf{y}}_0)$. En particulier $(a_2, \dots, a_{n-1}) \in \mathbf{A}$ et donc la courbe $\gamma(\hat{\mathbf{y}}_1)$, qui contient ce $(n - 2)$ -uplet, est contenue dans Y . Comme elle contient un élément de \mathbf{A} , on peut itérer le raisonnement. On obtient finalement que $\gamma(\hat{\mathbf{y}})$ est contenu dans Y et donc que Y appartient à la classe $\mathcal{X}_{r,n}(q)$. Ceci montre que (5) implique (1) et termine la démonstration. \square

3.3. Premiers exemples d'intégrabilité. — Le cas $r = 1$ est rapidement réglé. En effet un diviseur admissible n'est alors rien d'autre qu'une courbe admissible :

Proposition 3.4. — *Toute surface appartenant à la classe $\mathcal{X}_{2,n}(q)$ est intégrable.*

On suppose maintenant $r \geq 2$. Le cas particulier suivant, dont la démonstration est très simple, est crucial. Il a comme corollaire immédiat qu'une variété $X \in \mathcal{X}_{r+1,3}(q)$ est intégrable si $q \neq 2n - 3$ et comme conséquence indirecte, comme on le verra dans la

prochaine section, qu'une variété $X \in \mathcal{X}_{r+1,n}(q)$ est intégrable si $q \neq 2n - 3$, ce qui est une version préliminaire du Théorème 1.7.

Proposition 3.5. — *Soit X une variété de la classe $\mathcal{X}_{r+1,n}(q)$. Si $\rho \geq m$ dans la division euclidienne $q = \rho(n - 1) + m - 1$ de q par $n - 1$, alors X est intégrable.*

Démonstration. — Soit Y un diviseur admissible de X . On peut introduire une courbe admissible $C \subset Y$, un $(n - 2)$ -uplet \mathbf{a} de C et $\theta_{\mathbf{a}} : X \dashrightarrow \theta_{\mathbf{a}}(X)$, une application birationnelle sur une variété de Veronese d'ordre ρ , telle que $\theta_{\mathbf{a}}(Y) \in \mathcal{H}_{\mathbf{a}}$.

Fixons un n -uplet $\widehat{\mathbf{b}} = (b_1, \dots, b_n) \subset C \setminus \mathbf{a}$. Si $\widehat{\mathbf{y}} \in Y^n$ est assez voisin de $\widehat{\mathbf{b}}$, la courbe $\gamma(\widehat{\mathbf{y}})$ n'est pas contenue dans le centre de la projection $\theta_{\mathbf{a}}$. On peut donc considérer son image $\theta_{\mathbf{a}}(\gamma(\widehat{\mathbf{y}}))$. C'est une courbe de degré $q' \leq q$, ce qu'on écrit sous la forme

$$q' \leq \rho(n - 1) + m - 1.$$

D'autre part son degré q' est un multiple de ρ car c'est l'image d'une courbe de \mathbb{P}^{r+1} par un plongement de Veronese d'ordre ρ .

On suppose maintenant $\rho \geq m$. Alors le degré de la courbe $\theta_{\mathbf{a}}(\gamma(\widehat{\mathbf{y}}))$ est $\leq \rho(n - 1)$.

Comme $\widehat{\mathbf{b}} \subset C$ est disjoint de \mathbf{a} et que $\theta_{\mathbf{a}}$ induit un difféomorphisme de $C \setminus \mathbf{a}$ sur son image, pour $\widehat{\mathbf{y}}$ assez voisin de $\widehat{\mathbf{b}}$, la courbe $\theta_{\mathbf{a}}(\gamma(\widehat{\mathbf{y}}))$ a n points différents dans $\theta_{\mathbf{a}}(Y)$. Elle est donc contenue dans $\theta_{\mathbf{a}}(Y)$, puisque c'est l'image, par un plongement de Veronese $v : \mathbb{P}^{r+1} \rightarrow \theta_{\mathbf{a}}(X)$ d'ordre ρ , d'une courbe de degré $\leq n - 1$ qui a n points différents dans l'hyperplan $v^{-1}(\theta_{\mathbf{a}}(Y))$. La courbe $\gamma(\widehat{\mathbf{y}})$ est contenue dans Y .

Ainsi le diviseur admissible Y engendre un espace de dimension $\geq \pi_{r-1,n}(q)$ et, pour tout $\widehat{\mathbf{y}} \in Y^n$ voisin de $\widehat{\mathbf{b}}$, il contient la courbe $\gamma(\widehat{\mathbf{y}})$. Il appartient à la classe $\mathcal{X}_{r,n}(q)$.

Par définition, la variété X est intégrable. \square

On en déduit une version préliminaire du Théorème 1.7 dans le cas $n = 3$.

Proposition 3.6. — *Toute variété $X \in \mathcal{X}_{r+1,3}(q)$ est intégrable si $q \neq 3$.*

Démonstration. — En effet, si $q = 2$, X est une variété minimale et si $q \geq 4$, alors $q = 2\rho + m - 1$ avec $m \in \{1, 2\}$ et $\rho \geq 2$. \square

3.4. Hérité de l'intégrabilité. — Dans ce paragraphe, on se donne une pondération

$$(\rho_1, \dots, \rho_{n-1}), \text{ avec } \rho_{n-1} \geq 1.$$

Rappelons qu'auparavant, on a souvent choisi la pondération (6) seulement pour fixer les idées. On utilisera la Proposition 2.12.

Supposons $n \geq 3$ et $q \geq n$. Soit $X \in \mathcal{X}_{r+1,n}(q)$ une variété intégrable, $a \in X_{\text{adm}}$ un point affecté du poids ρ_1 et $q' = q - (\rho_1 + 1)$. Il résulte facilement de la Proposition 2.12, qu'un diviseur admissible générique de la variété $\theta_a(X)$ appartient à la classe $\mathcal{X}_{r,n-1}(q')$. La restriction de généricité empêche d'en déduire que l'intégrabilité est stable par projection osculatrice, à cause du choix qu'on fait d'une définition « forte » de l'intégrabilité. On verra que c'est vrai à la fin de ce chapitre. Quoi qu'il en soit, cette propriété est banale. Ce n'est pas le cas de la réciproque partielle suivante.

Proposition 3.7. — *Soit $n \geq 4$, $q \geq n$ et $X \in \mathcal{X}_{r+1,n}(q)$. Si pour tout point $c_1 \in X_{\text{adm}}$ affecté du poids ρ_1 , la variété $\theta_{c_1}(X)$ est intégrable, alors X est intégrable.*

Ce résultat est important. Il est faux si $n = 3$. On le réénoncera en termes de variétés standards à la fin de ce chapitre. Bien sûr, la démonstration ci-dessous n'utilise pas la stabilité de l'intégrabilité par projection osculatrice.

Démonstration. — On utilise la propriété (5) de la Proposition 3.3 comme critère d'intégrabilité. On se donne un diviseur admissible Y de X , une courbe admissible $C \subset Y$ et deux $(n - 2)$ -uplets de C de la forme

$$\mathbf{a} = (c_1, \dots, c_{n-3}, a), \quad \mathbf{b} = (c_1, \dots, c_{n-3}, b).$$

Il s'agit de montrer qu'on a l'implication : $\theta_{\mathbf{a}}(Y) \in \mathcal{H}_{\mathbf{a}} \Rightarrow \theta_{\mathbf{b}}(Y) \in \mathcal{H}_{\mathbf{b}}$.

Notons $\mathbf{c} = (c_1, \mathbf{c}') = (c_1, \dots, c_{n-3})$. Pour fixer les idées, on se donne $d, e \in C \setminus (\mathbf{a} \cup \mathbf{b})$ avec $d \neq e$ et on écrit les décompositions en sommes directes projectives

$$\mathbb{P}^N = X_{c_1}(\rho_1) \oplus \mathbb{Q}, \quad \mathbb{Q} = (\oplus_{i=2}^{n-3} X_{c_i}(\rho_i)) \oplus \mathbb{Q}', \quad \mathbb{Q}' = X_d(\rho_{n-2}) \oplus X_e(\rho_{n-1}),$$

qu'on utilise pour choisir les cibles des projections osculatrices

$$\theta_{c_1} : \mathbb{P}^N \dashrightarrow \mathbb{Q}, \quad \theta_{\mathbf{c}} : \mathbb{P}^N \dashrightarrow \mathbb{Q}', \quad \theta_{\mathbf{a}} : \mathbb{P}^N \dashrightarrow X_e(\rho_{n-1}), \quad \theta_{\mathbf{b}} : \mathbb{P}^N \dashrightarrow X_e(\rho_{n-1}).$$

Soit $\phi_{\mathbf{c}'} : \mathbb{Q} \dashrightarrow \mathbb{Q}'$ la projection de centre $\oplus_{i=2}^{n-3} X_{c_i}(\rho_i)$. (C'est l'identité si $n = 4$.) On a

$$\theta_{\mathbf{c}} = \phi_{\mathbf{c}'} \circ \theta_{c_1}.$$

Compte tenu de la Proposition 2.12, la variété $\theta_{\mathbf{c}}(X)$ appartient à la classe $\mathcal{X}_{r+1,3}(q')$ avec $q' = \rho_{n-2} + \rho_{n-1} + 1$ et de plus, $(\theta_{\mathbf{c}}(a), e)$ et $(\theta_{\mathbf{c}}(b), e)$ sont des paires admissibles de $\theta_{\mathbf{c}}(X)$. On leur associe les projections osculatrices σ_a et σ_b de \mathbb{Q}' sur $X_e(\rho_{n-1})$, de centres respectifs $\theta_{\mathbf{c}}(X)_{\theta_{\mathbf{c}}(a)}(\rho_{n-2})$ et $\theta_{\mathbf{c}}(X)_{\theta_{\mathbf{c}}(b)}(\rho_{n-2})$. Par construction, on a :

$$\theta_{\mathbf{a}} = \sigma_a \circ \theta_{\mathbf{c}} = \sigma_a \circ \phi_{\mathbf{c}'} \circ \theta_{c_1}, \quad \theta_{\mathbf{b}} = \sigma_b \circ \theta_{\mathbf{c}} = \sigma_b \circ \phi_{\mathbf{c}'} \circ \theta_{c_1}.$$

Finalement, revenons au problème posé au début de la démonstration. On suppose $\theta_{\mathbf{a}}(Y) \in \mathcal{H}_{\mathbf{a}}$. La variété $\theta_{c_1}(Y)$ contient la courbe admissible $\theta_{c_1}(C)$ et

$$(\sigma_a \circ \phi_{\mathbf{c}'})(\theta_{c_1}(Y)) = \theta_{\mathbf{a}}(Y) \in \mathcal{H}_{\mathbf{a}},$$

donc $\theta_{c_1}(Y)$ est un diviseur admissible de $\theta_{c_1}(X)$. Sous les hypothèses de l'énoncé, la variété $\theta_{c_1}(X)$ est intégrable donc $(\sigma_b \circ \phi_{\mathbf{c}'})(\theta_{c_1}(Y))$ appartient à $\mathcal{H}_{\mathbf{b}}$. On a obtenu que $\theta_{\mathbf{b}}(Y)$ appartient à $\mathcal{H}_{\mathbf{b}}$, ce qui termine la démonstration. \square

Corollaire 3.8. — *Toute variété X de la classe $\mathcal{X}_{r+1,m}(q)$ est intégrable si $q \neq 2n - 3$.*

Démonstration. — On sait que le résultat est vrai si $n = 3$. On suppose $n \geq 4$ et que le résultat est vrai à l'ordre $n - 1$. On écrit la division euclidienne $q = \rho(n - 1) + m - 1$ avec, par hypothèse $(\rho, m) \neq (1, n - 1)$.

Soit a un point admissible de X , pondéré par $\sigma \in \{\rho - 1, \rho\}$, avec $\sigma = \rho$ si $m = n - 1$. La variété $\theta_a(X)$ appartient à $\mathcal{X}_{r+1,n-1}(q')$,

$$q' = \rho(n - 1) + m - 1 - (\sigma + 1) = \rho(n - 2) + m - 1 - (\sigma + 1 - \rho).$$

Soit aussi $q' = \rho'(n - 2) + m' - 1$ la division euclidienne de q' par $(n - 2)$.

Si $m \geq 2$, on choisit $\sigma = \rho$. Alors $(\rho', m') = (\rho, m - 1) \neq (1, n - 2)$ et $\theta_a(X)$ est intégrable par hypothèse de récurrence.

Si $m = 1$, on choisit $\sigma = \rho - 1$. Alors $(\rho', m') = (\rho, 1)$ et on a la même conclusion.

D'après la Proposition 3.7, la variété X est intégrable. \square

3.5. Construction d'un système linéaire sur X . — On note $R(X)$ le corps des fonctions rationnelles sur X . On n'exclut pas *a priori* que X_{sing} ait une composante irréductible de dimension r . Si une fonction rationnelle sur X s'annule sur une telle composante, la définition de son ordre d'annulation n'est pas élémentaire, voir Fulton [4]. C'est une difficulté bien connue de la théorie des systèmes linéaires. La circonstance suivante permet d'échapper à cette difficulté.

Lemme 3.9. — *Si la restriction de $f \in R(X)$ à X_{reg} n'a pas de pôle (ou de zéro) sur une courbe admissible, f est constante. En particulier, une fonction $f \in R(X) \setminus \{0\}$ est déterminée modulo \mathbb{C}^* par le diviseur qu'elle définit sur X_{reg} par restriction.*

Démonstration. — Si f n'a pas de pôle sur la courbe admissible C et si $a \in C$, f est constante, égale à $f(a)$, sur toute courbe admissible voisine de C qui passe par a . Comme ces courbes recouvrent un ouvert non vide de X , f est constante. \square

Compte tenu de cette remarque, en négligeant les éventuelles composantes irréductibles de dimension r de X_{sing} , on dispose d'une théorie des systèmes linéaires sur X (on dira plutôt sur X_{reg}) tout à fait analogue à celle qu'on aurait si X était lisse. On fait quelques rappels et on renvoie le lecteur à la présentation de Mumford [11] pour toute précision.

Si $f \in R(X) \setminus \{0\}$, le diviseur $(f|_{X_{\text{reg}}}) = (f|_{X_{\text{reg}}})_0 - (f|_{X_{\text{reg}}})_\infty$ des zéros et des pôles de f dans X_{reg} est bien défini. Deux diviseurs D et D' de X_{reg} sont *linéairement équivalents*, ce qu'on note $D \sim_{X_{\text{reg}}} D'$, s'il existe une fonction $f \in R(X)$ telle que $(f|_{X_{\text{reg}}}) = D' - D$. À tout diviseur *effectif* Y_0 de X_{reg} , on associe :

1. l'ensemble $|Y_0|$ des diviseurs effectifs de X_{reg} linéairement équivalents à Y_0 , c'est le *système linéaire complet engendré* par Y_0 ;
2. l'espace vectoriel $Q(Y_0)$ des $f \in R(X)$ telles que, ou bien $f = 0$, ou bien le diviseur $(f|_{X_{\text{reg}}}) + Y_0$ est effectif. Si $f \neq 0$, il revient au même de dire que le diviseur $Y_0 - (f|_{X_{\text{reg}}})_\infty$ est effectif ou encore que $(f|_{X_{\text{reg}}}) = Y - Y_0$ où $Y \in |Y_0|$.

Le point est que, compte tenu du Lemme 3.9, si $Y \sim_{X_{\text{reg}}} Y_0$, il existe une fonction $f \in R(X) \setminus \{0\}$, *unique modulo \mathbb{C}^** telle que $(f|_{X_{\text{reg}}}) = Y - Y_0$. On a donc, comme c'est le cas pour une variété lisse, une correspondance biunivoque entre les droites vectorielles de $Q(Y_0)$ et les éléments de $|Y_0|$.

Par définition, un système linéaire \mathcal{Y} sur X_{reg} est un ensemble de diviseurs effectifs de X_{reg} associé par une telle correspondance à un sous-espace non nul F d'un espace $Q(Y_0)$. Si cet espace est de dimension finie, $\dim F - 1$ est la dimension du système \mathcal{Y} .

Soit $\pi : X \dashrightarrow \mathbb{P}^{r+1}$ une application birationnelle associée à un $(n-2)$ -uplet admissible de X . Si $H_0, H \in \mathcal{H}$ sont deux hyperplans distincts et si $u \in R(\mathbb{P}^{r+1}) \setminus \{0\}$ est une fonction rationnelle de diviseur $(u) = H - H_0$, la fonction rationnelle non constante $u \circ \pi$ induit un diviseur non nul sur X_{reg} , toujours en vertu du Lemme 3.9.

Compte tenu de cette remarque on peut, de la même façon par exemple que dans [11], associer à tout $H \in \mathcal{H}$ un diviseur *non nul* $(\pi|_{X_{\text{reg}}})^*(H)$ de X_{reg} . Ce diviseur est aussi la somme (non vide) $\sum_{i=1}^m n_i W_i$, où W_i décrit la famille des sous-variétés irréductibles de dimension r de X_{reg} d'image H et où n_i est le degré de l'application induite $\theta : W_i \dashrightarrow H$.

Ces diviseurs sont les éléments d'un système linéaire $(\pi|_{X_{\text{reg}}})^*(\mathcal{H})$. Si $H_0 \in \mathcal{H}$, c'est le sous-système du système linéaire complet $|(\pi|_{X_{\text{reg}}})^*(H_0)|$ associé au sous-espace de

$Q((\pi|_{X_{\text{reg}}})^*(H_0))$ des fonctions de la forme $u \circ \pi$, où $u \in R(\mathbb{P}^{r+1})$ et, ou bien $u = 0$, ou bien $(u)_\infty = \emptyset$, ou bien $(u)_\infty = H_0$.

On notera abusivement π^* au lieu de $\pi|_{X_{\text{reg}}}^*$.

Soit $\Gamma_\pi \subset X \times \mathbb{P}^{r+1}$ le graphe de l'application π . Si $K \subset X$ est un ensemble algébrique, on note $\pi[K]$ le sous-ensemble algébrique $\{x' \in \mathbb{P}^{r+1}, \exists x \in K, (x, x') \in \Gamma_\pi\}$ de \mathbb{P}^{r+1} . Si $H \in \mathcal{H}$, on définit $\pi^{-1}[H]$ de façon analogue. D'ailleurs, $\pi^{-1}[H] \cap X_{\text{reg}}$ est aussi le support du diviseur $\pi^*(H)$.

On note $\mathcal{H}(x)$ la sous-variété des $H \in \mathcal{H}$ qui passent par le point $x \in \mathbb{P}^{r+1}$. On utilisera le lemme suivant :

Lemme 3.10. — Soit \mathbf{a} un $(n-2)$ -uplet admissible et $b \in X_{\text{adm}}(\mathbf{a})$. L'ensemble des $H \in \mathcal{H}$ qui contiennent l'image d'une courbe $C \in \Sigma_q(X; \mathbf{a}, b)$ et tels que $\pi_{\mathbf{a}}^*(H)$ soit irréductible, autrement dit que $\pi_{\mathbf{a}}^{-1}(H) = \pi_{\mathbf{a}}^*(H)$, contient un ouvert dense de $\mathcal{H}(\pi_{\mathbf{a}}(b))$.

Démonstration. — Comme \mathbf{a} est fixé, on ne le note pas en indice. Notons $b' = \pi(b)$. On rappelle que π induit un difféomorphisme de $X_{\text{adm}}(\mathbf{a})$ sur son image dans \mathbb{P}^{r+1} . Comme (\mathbf{a}, b) est admissible, l'image de $\Sigma_q(X; \mathbf{a}, b)$ est un ouvert dense de $\Sigma_1(\mathbb{P}^{r+1}; b')$. La première propriété définit donc un ouvert dense Ω de $\mathcal{H}(b')$.

Si $H \in \Omega$, le diviseur $\pi^*(H)$ est de la forme $\pi^*(H) = \pi^{-1}(H) + \sum_{i=1}^m n_i W_i$, où les diviseurs irréductibles W_1, \dots, W_m sont contenus dans $X \setminus X_{\text{adm}}(\mathbf{a})$. Pour $i = 1, \dots, m$, on peut choisir un point $w_i \in W_i$ tel que $\pi[w_i]$ soit fini : $\pi[w_i] = \{w'_{i,1}, \dots, w'_{i,m_i}\}$. D'autre part, π est un difféomorphisme d'un voisinage de b sur un voisinage de b' et, compte tenu d'un cas particulier élémentaire d'un théorème de Zariski, la fibre $\pi^{-1}[b']$ est connexe donc réduite au point b . Il en résulte que b' n'est pas un des points $w'_{i,j}$. Pour que $\pi^*(H)$ soit irréductible, il suffit que H ne passe par aucun des points $w'_{i,j}$, ce qui définit un ouvert dense de Ω . \square

On peut enfin énoncer :

Proposition 3.11. — Soit X une variété intégrable de la classe $\mathcal{X}_{r+1,n}(q)$. La réunion, pour $\mathbf{a} \in X_{\text{adm}}^{(n-2)}$, des systèmes linéaires $\mathcal{Y}(X; \mathbf{a}) = \pi_{\mathbf{a}}^*(\mathcal{H})$ est contenue dans un système linéaire $\mathcal{Y}(X)$ sur X_{reg} , uniquement déterminé. Il est complet, de dimension $r+n-1$.

Un diviseur admissible générique appartient à $\mathcal{Y}(X)$ et $Y \cdot C = n-1$ pour tout $Y \in \mathcal{Y}(X)$ et toute courbe admissible $C \not\subset Y$.

Démonstration. — Le point important est de montrer que deux systèmes $\mathcal{Y}(X; \mathbf{a})$ et $\mathcal{Y}(X; \mathbf{b})$ sont contenus dans un même système linéaire sur X_{reg} , autrement dit qu'on a

$$(17) \quad Y_1 \in \mathcal{Y}(X; \mathbf{a}), \quad Y_2 \in \mathcal{Y}(X; \mathbf{b}), \quad \Rightarrow \quad Y_1 \sim_{X_{\text{reg}}} Y_2.$$

En utilisant la transitivité de la relation $\sim_{X_{\text{reg}}}$ on se ramène, un peu comme dans la dernière partie de la démonstration de la Proposition 3.3, à un cas particulier.

Comme $X_{\text{adm}}(\mathbf{a})$ et $X_{\text{adm}}(\mathbf{b})$ sont des ouverts denses de X , on peut choisir $c_1 \in X$ tels que les $(n-1)$ -uplets $(c_1, a_1, \dots, a_{n-2})$ et $(c_1, b_1, \dots, b_{n-2})$ soient admissibles et donc aussi les $(n-2)$ -uplets $(c_1, a_2, \dots, a_{n-2})$ et $(c_1, b_2, \dots, b_{n-2})$. De proche en proche, on construit un $(n-2)$ -uplet admissible $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_{n-2})$ tels que tous les $(n-2)$ -uplets

$$(c_1, \dots, c_p, a_{p+1}, \dots, a_{n-2}), \quad (c_1, \dots, c_p, b_{p+1}, \dots, b_{n-2}), \quad p = 0, \dots, n-2,$$

soient admissibles. On passe donc de \mathbf{a} à \mathbf{c} puis de \mathbf{c} à \mathbf{b} par deux suites de $(n-2)$ -uplets admissibles, tels que deux $(n-2)$ -uplets consécutifs aient $n-3$ éléments communs, à la même position (ceci est important à cause de la pondération).

On peut donc supposer $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_{n-2})$ et $\mathbf{b} = (b_1, a_2, \dots, a_{n-2})$. Finalement, soit $c \in X$ tel que (c, \mathbf{a}) et (c, \mathbf{b}) soient admissibles. Deux $(n-2)$ -uplets consécutifs de la suite \mathbf{a} , (c, a_2, \dots, a_{n-2}) , \mathbf{b} sont contenus dans une même courbe admissible.

On s'est ainsi ramené à ne considérer que le cas particulier de deux $(n-2)$ -uplets admissibles $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_{n-2})$ et $\mathbf{b} = (b_1, a_2, \dots, a_{n-2})$ contenus dans une même courbe admissible. On démontre alors l'implication (17) en vérifiant que $\mathcal{Y}(X; \mathbf{a}) \cap \mathcal{Y}(X; \mathbf{b})$ est non vide.

Notons $b'_1 = \pi_{\mathbf{a}}(b_1)$ et $a'_1 = \pi_{\mathbf{b}}(a_1)$. Le lemme précédent, appliqué à \mathbf{a} et à $\mathcal{H}(b'_1)$, permet d'introduire un ouvert non vide \mathcal{U} de $\mathcal{H}(b'_1)$ tel que tout $H \in \mathcal{U}$ contient l'image $\pi_{\mathbf{a}}(C)$ d'une courbe $C \in \Sigma_q(X; \mathbf{a} \cup \{b_1\})$ et tel que $\pi_{\mathbf{a}}^{-1}(H) = \pi_{\mathbf{a}}^*(H)$.

Comme X est intégrable, $\pi_{\mathbf{b}}(\pi_{\mathbf{a}}^{-1}(H)) \in \mathcal{H}(a'_1)$ pour tout $H \in \mathcal{U}$. On vérifie facilement (voir le commentaire qui suit la Définition 3.1) que l'application qui à $H \in \mathcal{H}(b'_1)$ associe $\pi_{\mathbf{b}}(\pi_{\mathbf{a}}^{-1}(H)) \in \mathcal{H}(a'_1)$ est un homéomorphisme local.

On applique encore le Lemme 3.10, cette fois à $\pi_{\mathbf{b}}$ et à $\mathcal{H}(a'_1)$. Il existe un élément H_0 de $(\pi_{\mathbf{b}} \circ \pi_{\mathbf{a}}^{-1})(\mathcal{U})$ tel que $\pi_{\mathbf{b}}^{-1}(H_0) = \pi_{\mathbf{b}}^*(H_0)$. Alors $\pi_{\mathbf{b}}^{-1}(H_0)$ est un élément de $\mathcal{Y}(X; \mathbf{b})$ qui est aussi de la forme $\pi_{\mathbf{a}}^{-1}(H)$ avec $H \in \mathcal{U}$ donc appartient au système $\mathcal{Y}(X; \mathbf{a})$.

On a montré que les systèmes linéaires $\mathcal{Y}(X; \mathbf{a})$ sont contenus dans un même système linéaire $\mathcal{Y}(X)$ et qu'un diviseur admissible *générique* appartient au système $\mathcal{Y}(X)$, voir le Lemme 3.10. Par invariance linéaire, on a bien $Y \cdot C = n-1$ pour tout $Y \in \mathcal{Y}(X)$ et toute courbe admissible $C \not\subset Y$. Il reste à montrer que le système $\mathcal{Y}(X)$ est nécessairement de dimension $r+n-1$, c'est-à-dire que, si $\mathbf{m} \in X^{r+n-1}$ est un $(r+n-1)$ -uplet générique, il existe un et un seul diviseur $Y \in \mathcal{Y}(X)$ qui contient \mathbf{m} . En effet, si l'on démontre cela, comme $\mathcal{Y}(X)$ est contenu dans le système linéaire complet $\mathcal{Y}_1(X)$ défini par un élément quelconque de l'un des systèmes $\mathcal{Y}(X; \mathbf{a})$, on aura nécessairement $\mathcal{Y}_0(X) = \mathcal{Y}_1(X)$.

On écrit $\mathbf{m} = (\mathbf{a}, \mathbf{d}) = (\mathbf{a}, \mathbf{d}', \mathbf{d}'')$, la juxtaposition d'un $(n-2)$ -uplet \mathbf{a} , d'un 2-uplet \mathbf{d}' et d'un $(r-1)$ -uplet \mathbf{d}'' . On peut supposer $(\mathbf{a}, \mathbf{d}')$ admissible, que les éléments de \mathbf{d} appartiennent à $X_{\text{adm}}(\mathbf{a})$ et que les $r+1$ éléments de $\pi_{\mathbf{a}}(\mathbf{d})$ sont en position générale dans \mathbb{P}^{r+1} , *i.e.* engendrent un hyperplan H .

Notons $Y = \pi_{\mathbf{a}}^*(H)$. C'est un élément de $\mathcal{Y}(X; \mathbf{a})$ qui contient \mathbf{m} .

Réciproquement, soit $Y_1 \in \mathcal{Y}(X)$ un diviseur qui contient \mathbf{m} . Il contient $(\mathbf{a}, \mathbf{d}')$ donc la courbe admissible $C_0 = \gamma(\mathbf{a}, \mathbf{d}')$ puisque $Y_1 \cdot C = n-1$ si $C \not\subset Y_1$ est une courbe admissible. Soit Y_0 une composante irréductible de Y telle que $C_0 \subset Y_0$. Si $C \not\subset Y_0$ est une courbe admissible, on a évidemment $Y_0 \cdot C \leq n-1$, donc $Y_0 \cdot C = n-1$ compte tenu de la Proposition 3.3, qui donne aussi que $\pi_{\mathbf{a}}(Y_0)$ est un hyperplan $H_0 \in \mathcal{H}$.

Si $Y_1 = Y_0 + W$, on a $W \cdot C = 0$ si $C \not\subset Y_1$ est une courbe admissible, donc W ne rencontre pas X_{adm} . On en déduit que Y_0 contient \mathbf{m} . En particulier $H_0 = H$.

Finalement, les deux diviseurs $Y = \pi_{\mathbf{a}}^*(H)$ et Y_1 sont linéairement équivalents et induisent le même diviseur au voisinage de C_0 . D'après le Lemme 3.9, ils sont égaux. \square

3.6. Fin de la démonstration du théorème principal. — Rappelons que, compte tenu en particulier du Corollaire 3.8, une variété $X \in \mathcal{X}_{r+1,n}(q)$ est intégrable si $n = 2$, ou si $r = 1$, ou si $n \geq 3$ et $q \neq 2n - 3$. Le Théorème 1.7 est donc une conséquence du résultat plus précis suivant.

Théorème 3.12. — *Soit $r \geq 1$, $n \geq 2$ et $q \geq n - 1$. Toute variété intégrable de la classe $\mathcal{X}_{r+1,n}(q)$ est standard. Plus précisément, si $\phi : X \dashrightarrow \mathbb{P}^{r+n-1}$ est une application rationnelle définie par le système linéaire $\mathcal{Y}(X)$ de la Proposition 3.11, alors :*

1. $X_0 = \phi(X) \subset \mathbb{P}^{r+n-1}$ est une variété minimale de dimension $r+1$ et de degré $n-1$ et ϕ induit une application birationnelle $\phi : X \dashrightarrow X_0$;
2. celle-ci induit un difféomorphisme de X_{adm} sur son image, contenue dans $(X_0)_{\text{adm}}$;
3. l'image d'une courbe admissible de X est une courbe admissible de X_0 et ϕ induit un difféomorphisme de $\Sigma_q(X)$ sur son image dans $\Sigma_{n-1}(X_0)$.

Démonstration. — On associe des applications rationnelles au système linéaire $\mathcal{Y}(X)$ de la même façon que si X était lisse, voir le début de la Section 3.5. On choisit $Y_0 \in \mathcal{Y}(X)$ et une base (f_0, \dots, f_{r+n-1}) de l'espace $Q(Y_0)$. On pose

$$(18) \quad \phi(x) = [f_0(x) : \dots : f_{r+1}(x) : \dots : f_{r+n-1}(x)].$$

L'application $\phi : X \dashrightarrow \mathbb{P}^{r+n-1}$ définie par (18) ne dépend des choix qu'à composition à gauche près par un automorphisme de \mathbb{P}^{r+n-1} . De plus $X_0 = \phi(X)$ engendre \mathbb{P}^{r+n-1} .

Soit C une courbe admissible de X et $\mathbf{a} \subset C$ un $(n-2)$ -uplet. Pour analyser ϕ au voisinage de $C \setminus \mathbf{a}$, on choisit $Y_0 \in \mathcal{Y}(X; \mathbf{a})$ et la base de $Q(Y_0)$ tels que dans (18), (f_0, \dots, f_{r+1}) soit une base du sous-système linéaire $\mathcal{Y}(X; \mathbf{a})$. L'application rationnelle

$$\pi_{\mathbf{a}}(x) = [f_0(x) : \dots : f_{r+1}(x)]$$

n'est rien d'autre qu'une application birationnelle $X \dashrightarrow \mathbb{P}^{r+1}$ associée à \mathbf{a} . On sait qu'elle induit un morphisme injectif sur $X_{\text{adm}}(\mathbf{a})$, de rang constant $r+1$.

L'application $\phi : X \dashrightarrow X_0$ est donc birationnelle et, en faisant varier \mathbf{a} , on obtient qu'elle est définie comme morphisme sur X_{adm} , de rang constant $r+1$. Elle est injective sur X_{adm} car, pour tout $x_1, x_2 \in X_{\text{adm}}$, il existe un $(n-2)$ -uplet admissible \mathbf{a} tel que $x_1, x_2 \in X_{\text{adm}}(\mathbf{a})$. Donc ϕ induit un difféomorphisme de X_{adm} sur son image, une sous-variété lisse $\phi(X_{\text{adm}})$ de \mathbb{P}^{r+n-1} , peut-être non fermée, contenue dans X_0 .

La variété X_0 engendre \mathbb{P}^{r+n-1} . Compte tenu des propriétés du système $\mathcal{Y}(X)$, si $C \in \Sigma_q(X)$, son image $\phi(C)$ coupe un hyperplan générique en $n-1$ point. D'autre part, pour $(x_1, \dots, x_n) \in X_0^n$ générique, il existe une courbe $\phi(C)$ qui passe par ces points. Comme un n -uplet générique de points de X_0 engendre un \mathbb{P}^{n-1} , on conclut que X_0 est une variété minimale de degré $n-1$.

La classification des variétés minimales, voir le début du Chapitre 5, montre que $(X_0)_{\text{sing}}$ n'a pas de composante irréductible de dimension r . Il en résulte que $\phi(X_{\text{adm}})$ est un ouvert Ω de X_0 , contenu dans la partie lisse de X_0 . Pour démontrer la dernière partie de l'énoncé, puisque $\phi : X_{\text{adm}} \rightarrow \Omega$ est un difféomorphisme et que Ω est la réunion des images des courbes admissibles de X , il suffit de montrer que l'image d'une courbe admissible de X est une courbe admissible de X_0 .

Il suffit pour ça de répéter le raisonnement de la démonstration du Théorème 1.2 en l'appliquant à X_0 et, au lieu de $\text{CRN}_{n-1}(X_0)$, à la famille des courbes $\phi(C)$ avec

$C \in \Sigma_q(X)$. Si Γ est une telle courbe, on sait que Γ est lisse de degré $n - 1$ et contenue dans $(X_0)_{\text{reg}}$. Si (a'_1, \dots, a'_{n-1}) est un $(n - 1)$ -uplet de la courbe Γ on obtient que les osculateurs $(X_0)_{a'_1}, \dots, (X_0)_{a'_{n-1}}$ sont en somme directe projective. Ainsi, tout n -uplet de Γ est admissible pour X_0 . Le théorème est démontré. \square

3.7. Variétés intégrables et variétés standards. — Nous avons démontré qu'une variété intégrable $X \in \mathcal{X}_{r+1,n}(q)$ est standard, mais pas la réciproque. Du coup, la Proposition 3.7, qui est importante, est énoncée en termes d'intégrabilité, une notion transitoire. D'autre part, le commentaire qui précède cette proposition laissait une question ouverte. Les résultats suivants répondent à ces questions. D'abord, on a :

Lemme 3.13. — *Une variété $X \in \mathcal{X}_{r+1,n}(q)$ est intégrable si et seulement si elle est standard.*

On se donne maintenant une pondération $(\rho_1, \dots, \rho_{n-1})$ avec $\rho_{n-1} \geq 1$. On a :

Théorème 3.14. — *Soit $X \in \mathcal{X}_{r+1,n}(q)$ avec $n \geq 3$ et $q \geq n$. Si $a \in X_{\text{adm}}$, on affecte a du poids ρ_1 , on note θ_a une projection osculatrice associée et $q' = q - (\rho_1 + 1)$.*

1. *Si X est un élément standard de $\mathcal{X}_{r+1,n}(q)$, alors $\theta_a(X)$ est un élément standard de $\mathcal{X}_{r,n-1}(q')$, pour tout $a \in X_{\text{adm}}$.*
2. *Si $n \geq 4$ et si $\theta_a(X)$ est un élément standard de la classe $\mathcal{X}_{r,n-1}(q')$ pour tout $a \in X_{\text{adm}}$, alors X est un élément standard de $\mathcal{X}_{r+1,n}(q)$.*

Nous démontrerons ces deux énoncés dans la Section 4.4.

Une autre démonstration que celle qu'on proposera est possible, d'ailleurs plus élémentaire, sur la base de la classification des variétés standards établie dans le Chapitre 5. Indiquons seulement à quoi se réduit la démonstration. Compte tenu de la Proposition 3.7, la seconde partie du théorème ci-dessus est une conséquence du Lemme 3.13. Compte tenu du fait qu'une variété $X \in \mathcal{X}_{r+1,n}(q)$ est toujours standard si $q \neq 2n - 3$, il suffit de démontrer ce lemme et la première partie du théorème dans le cas $q = 2n - 3$. Enfin, si la première partie du théorème est démontrée, on obtient le lemme par récurrence sur n , à partir du cas $n = 3$, à nouveau grâce à la Proposition 3.7.

En résumé, il suffit de montrer qu'une variété standard de la classe $\mathcal{X}_{r+1,3}(3)$ est intégrable et que, si X est une variété standard d'une classe $\mathcal{X}_{r+1,n}(2n - 3)$ avec $n \geq 4$, pour tout $a \in X_{\text{adm}}$, son image $\theta_a(X) \in \mathcal{X}_{r+1,n-1}(2n - 5)$ par une projection de centre $X_a(1)$ est une variété standard. La vérification, à partir de la description de ces variétés dans le Chapitre 5, ne présente pas de difficulté.

4. La structure infinitésimale de la variété des courbes admissibles

4.1. Structures quasi-grassmanniennes. — Dans cette section, nous rappelons les définitions et les résultats de la théorie des structures quasi-grassmanniennes dont nous aurons besoin, voir par exemple Hangan [8], Goldberg [6].

Notons $G_s(W)$ la grassmannienne des sous-espaces vectoriels de dimension s d'un espace vectoriel W . Soit V un espace vectoriel de dimension rn et soit $u : \mathbb{C}^r \otimes \mathbb{C}^n \rightarrow V$ un isomorphisme. Si $\rho \in \{1, \dots, r\}$ et $\nu \in \{1, \dots, n\}$, l'application

$$(19) \quad G_\rho(\mathbb{C}^r) \times G_\nu(\mathbb{C}^n) \rightarrow G_{\rho\nu}(V), \quad (E, F) \mapsto u(E \otimes F),$$

définit une famille de sous-espaces de dimension $\rho\nu$ de V . Ce sont les *sous-espaces de type* (ρ, ν) de V , pour l'isomorphisme u . Un isomorphisme $u' : \mathbb{C}^r \otimes \mathbb{C}^n \rightarrow V$ définit les mêmes familles de sous-espaces si et seulement l'automorphisme $u' \circ u^{-1}$ de $\mathbb{C}^r \otimes \mathbb{C}^n$ est de la forme $\gamma \otimes \delta$ avec $\gamma \in \text{GL}(\mathbb{C}^r)$ et $\delta \in \text{GL}(\mathbb{C}^n)$.

Une *structure tensorielle vectorielle de type* (r, n) sur V est donnée par une famille maximale d'isomorphismes linéaires $\mathbb{C}^r \otimes \mathbb{C}^n \rightarrow V$ tels que si u, u' sont de la famille, $u' \circ u^{-1}$ est de la forme qu'on vient de décrire. Elle induit naturellement des structures de type (ρ, ν) sur les sous-espaces définis par (19).

Revenons à l'application (19). Un sous-espace de type $(r, n - p)$ est l'intersection de p sous-espaces $u(\mathbb{C}^r \otimes F_\alpha)$ de type $(r, n - 1)$ en position générale. Il revient au même de dire que les hyperplans F_1, \dots, F_p de \mathbb{C}^n sont en position générale. Une remarque analogue vaut pour les sous-espaces de type $(r - p, n)$.

D'autre part, un sous-espace de type $(r - 1, n - 1)$ s'écrit $u(\mathbb{C}^r \otimes F) \cap u(E \otimes \mathbb{C}^n)$, l'intersection de deux sous-espaces de type respectif $(r, n - 1)$ et $(r - 1, n)$. Notons que *ces espaces ne sont pas en position générale dans V* :

$$\dim \mathbb{C}^r \otimes F + \dim E \otimes \mathbb{C}^n - \dim E \otimes F = r(n - 1) + (r - 1)n - (r - 1)(n - 1) = rn - 1.$$

On aura l'occasion d'utiliser le lemme suivant, emprunté à Goldberg [6].

Lemme 4.1. — *Soit F_0, F_1, \dots, F_n des sous-espaces de codimension r de V en position générale, i.e. tels que n quelconques des espaces $F_\alpha^\perp = \{l \in V', l|_{F_\alpha} = 0\}$ engendrent le dual V' de V . Il existe une et une seule structure tensorielle vectorielle de type (r, n) sur V pour laquelle ces espaces sont des sous-espaces de type $(r, n - 1)$ de V .*

Démonstration. — Pour l'existence, on se donne une base ϕ_1, \dots, ϕ_r de F_0^\perp et l'on décompose les ϕ_j suivant la décomposition $V' = \bigoplus_{\alpha=1}^n F_\alpha^\perp$, soit $\phi_j = \sum_{\alpha=1}^n m_{j\alpha}$, avec $m_{j\alpha} \in F_\alpha^\perp$. On vérifie que $(m_{j\alpha})$ est une base de V' et que F_0, \dots, F_n sont des espaces de type $(r, n - 1)$ pour la structure tensorielle vectorielle définie par la base duale de $(m_{j\alpha})$.

Réciproquement, soit $u : \mathbb{C}^r \otimes \mathbb{C}^n \rightarrow V$ un isomorphisme et H_0, \dots, H_n des hyperplans de \mathbb{C}^n en position générale, tels que $u(\mathbb{C}^r \otimes H_\alpha) = F_\alpha$, $\alpha = 0, \dots, n$. On peut, sans changer la structure, supposer qu'on a $H_\alpha = \{x \in \mathbb{C}^n, x_\alpha = 0\}$ si $\alpha = 1, \dots, n$ et qu'on a $H_0 = \{x \in \mathbb{C}^n, x_1 + \dots + x_n = 0\}$. Si $u' : \mathbb{C}^r \otimes \mathbb{C}^n \rightarrow V$ a la même propriété, on peut faire la même réduction sans changer la structure définie par u' . On obtient alors $(u' \circ u^{-1})(\mathbb{C}^r \otimes H_\alpha) = \mathbb{C}^r \otimes H_\alpha$ pour tout α . On en déduit que $u' \circ u^{-1}$ est de la forme $\gamma \otimes I_{\mathbb{C}^n}$ donc que u et u' définissent la même structure. \square

Dans la suite, on utilisera la terminologie des « G -structures ». Identifions \mathbb{C}^{rn} à un produit tensoriel $\mathbb{C}^r \otimes \mathbb{C}^n$ et notons $(g_{j\alpha, k\beta})$ les éléments du groupe de matrices $\text{GL}(rn)$, par légèreté sans écrire les domaines de variation des indices. On note $G_{r,n}$ le groupe des matrices $(g_{j\alpha, k\beta})$ de la forme

$$g_{j\alpha, k\beta} = C_{jk} A_{\alpha\beta}, \quad (C_{jk})_{j,k=1}^r \in \text{GL}(r), \quad (A_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta=1}^n \in \text{GL}(n).$$

Une $G_{r,n}$ -*structure vectorielle* sur V , ou *structure grassmannienne vectorielle de type* (r, n) , est définie par la donnée d'une famille maximale \mathcal{E} de bases de V , dites *bases distinguées*, telles que la matrice de passage entre deux éléments $(v_{j\alpha})$ et $(w_{j\alpha})$ de \mathcal{E}

appartienne au groupe $G_{r,n}$. Autrement dit la formule de passage est de la forme

$$(20) \quad w_{j\alpha} = \sum_{k=1}^r \sum_{\beta=1}^n C_{jk} A_{\alpha\beta} v_{k\beta}.$$

Comme le groupe de matrices $G_{r,n}$ est invariant par transposition, il revient au même de se donner une famille maximale \mathcal{E}' de bases de l'espace dual V' de V , telles que les matrices de passage appartiennent au groupe $G_{r,n}$.

Toute base distinguée $(v_{j\alpha})$ de V détermine un isomorphisme $u : \mathbb{C}^r \otimes \mathbb{C}^n \rightarrow V$ défini par $u(\varepsilon_j \otimes \varphi_\alpha) = v_{j\alpha}$, où $(\varepsilon_j)_{j=1}^r$ est la base canonique de \mathbb{C}^r et $(\varphi_\alpha)_{\alpha=1}^n$ la base canonique de \mathbb{C}^n , et la famille des isomorphismes ainsi obtenus définit une structure tensorielle de type (r, n) . Une $G_{r,n}$ -structure vectorielle est donc la même chose qu'une structure tensorielle vectorielle de type (r, n) .

Soit maintenant M une variété analytique lisse de dimension rn . Une $G_{r,n}$ -structure sur M , ou *structure quasi-grassmannienne de type (r, n)* sur M , est définie par la donnée d'une $G_{r,n}$ -structure vectorielle sur chaque espace tangent $T_x M$, dépendant analytiquement du point x de M . En pratique, elle sera définie par une famille de bases locales de 1-formes telle que les matrices de passage sont des fonctions analytiques à valeurs dans le groupe $G_{r,n}$. Une telle base est dite *distinguée*.

Une sous-variété lisse N de M est une *variété intégrale de type (ρ, ν)* si, pour tout $x \in N$, $T_x N$ est un sous-espace de type (ρ, ν) de $T_x M$.

Par exemple, si V est un espace vectoriel, pour $x \in V$ on identifie $T_x V$ à V . Une $G_{r,n}$ -structure sur V est *constante* si elle est définie par une base de 1-formes constantes. Deux $G_{r,n}$ -structures constantes sont équivalentes par transformation linéaire.

Une $G_{r,n}$ -structure est *intégrable* ou *plate* si elle est localement difféomorphe à une $G_{r,n}$ -structure constante. L'exemple le plus important est la $G_{r,n}$ -structure naturelle sur la grassmannienne $\mathbb{G}_{r,n}$ (de dimension rn) des $\mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^{r+n-1}$. Ses variétés intégrales de type $(r, n-1)$ sont les sous-variétés de codimension r dont les éléments passent par un point donné de \mathbb{P}^{r+n-1} et ses variétés intégrales de type $(r-1, n)$ sont les sous-variétés de codimension n dont les éléments sont contenus dans un hyperplan donné.

On se donne une $G_{r,n}$ -structure sur une variété analytique lisse M .

Définition 4.2. — La $G_{r,n}$ -structure est *γ -intégrable*, respectivement *δ -intégrable*, si, pour tout $x \in M$ et tout sous-espace N_x de $T_x M$ de type $(r, 1)$, respectivement de type $(1, n)$, il existe un germe en x de variété intégrale N de même type que N_x , tel que $T_x N = N_x$.

Les lettres γ et δ sont censées évoquer la gauche et la droite.

La γ - et la δ -intégrabilité de la structure sont caractérisées par l'annulation de certains tenseurs. Il en résulte, on utilisera cette remarque, qu'il suffit, dans la définition précédente, que les conditions soient vérifiées pour $x \in M$ et $N_x \subset T_x M$ génériques.

On rappelle le résultat suivant, voir Goldberg [6] :

Théorème 4.3. — Une $G_{r,n}$ -structure est *intégrable* si et seulement si elle est γ - et δ -intégrable.

4.2. La structure quasi-grassmannienne de $\Sigma_q(X)$. — L'objet de ce chapitre est de démontrer le résultat suivant.

Théorème 4.4. — *Si $X \in \mathcal{X}_{r+1,n}(q)$, la variété lisse $\Sigma_q(X)$ des courbes admissibles de X admet une $G_{r,n}$ -structure naturelle, déterminée par la propriété suivante :*

- *pour tout point admissible a de X , la sous-variété $\Sigma_q(X; a)$ des courbes admissibles de X qui passent par a est une sous-variété intégrale de type $(r, n - 1)$ de $\Sigma_q(X)$.*

Cette structure est γ -intégrable. Elle est intégrable si et seulement si X est un élément standard de $\mathcal{X}_{r+1,n}(q)$.

La première partie de l'énoncé est une conséquence du Théorème 2.11 et du fait que l'espace $H^0(\mathbb{P}^1, \mathbf{L})$ a une structure tensorielle vectorielle de type (r, n) naturelle si \mathbf{L} est la somme directe de r fibrés en droites de degré $n - 1$. Cet espace admet d'ailleurs une structure plus fine qui distingue, parmi tous les sous-espaces de type $(r, n - 1)$, la famille des sous-espaces de la forme $\{\xi \in H^0(\mathbb{P}^1, \mathbf{L}), \xi(t) = 0\}$ quand t décrit \mathbb{P}^1 . Cette structure, qu'on peut aussi décrire en termes de G -structure, est intéressante mais n'intervient pas dans la démonstration. Elle ne sera pas discutée ici, voir aussi Gindikin [5] à ce sujet, dans un cadre plus général.

Soit C une courbe admissible et V l'espace tangent $T_C \Sigma_q(X)$, qu'on identifie à l'espace $H^0(C, N_C X)$ des sections globales de $N_C X$. Écrivons $N_C X = \bigoplus_{j=1}^r \mathbf{L}_j$, où $\mathbf{L}_1, \dots, \mathbf{L}_r$ sont des sous-fibrés en droites de degré $n - 1$ de $N_C X$. Choisissons un point x_0 de C , un isomorphisme $\phi : C \rightarrow \mathbb{P}^1$ tel que $\phi(x_0) = \infty$ et pour $j = 1, \dots, r$, une section non nulle e_j de \mathbf{L}_j ayant un zéro d'ordre $n - 1$ en x_0 . Les rn sections analytiques

$$(21) \quad x \in C, \quad e_{j\alpha}(x) = \phi(x)^{\alpha-1} e_j(x), \quad \alpha = 1, \dots, n,$$

de $N_C X$ forment une base $(e_{j\alpha})$ de V . On munit V de l'unique $G_{r,n}$ -structure vectorielle pour laquelle $(e_{j\alpha})$ est une base distinguée. Rappelons que cette structure est aussi la structure tensorielle vectorielle définie par l'isomorphisme linéaire $u : \mathbb{C}^r \otimes \mathbb{C}^n \rightarrow V$ donné par $u(\varepsilon_j \otimes \varphi_\alpha) = e_{j\alpha}$, où $(\varepsilon_j)_{j=1}^r$ est la base canonique de \mathbb{C}^r et $(\varphi_\alpha)_{\alpha=1}^n$ celle de \mathbb{C}^n . Notons $(m_{j\alpha})$ la base duale de la base $(e_{j\alpha})$.

Un sous-espace de type $(r, n - 1)$ de V est défini par un système de la forme :

$$\sum_{\alpha=1}^n t_\alpha m_{j\alpha}(\xi) = 0, \quad j = 1, \dots, r,$$

où $[t_1 : \dots : t_n] \in \mathbb{P}^{n-1}$. D'autre part, une section $\xi = \sum_{j,\alpha} m_{j\alpha}(\xi) e_{j\alpha}$ s'annule en un point donné $a \in C$ si et seulement si

$$\sum_{\alpha=1}^n \phi(a)^{\alpha-1} m_{j\alpha}(\xi) = 0, \quad j = 1, \dots, r.$$

Ce système définit un sous-espace de type $(r, n - 1)$ de V , d'ailleurs d'une forme particulière. Compte tenu du Lemme 4.1, la $G_{r,n}$ -structure vectorielle définie par la base $(e_{j\alpha})$ est la seule pour laquelle ces espaces sont de type $(r, n - 1)$. En particulier, elle ne dépend pas des choix qu'on a faits.

Admettons provisoirement que la structure qu'on vient de définir sur $T_C \Sigma_q(X)$ dépend analytiquement de C . On a donc construit une $G_{r,n}$ -structure sur $\Sigma_q(X)$. Comme l'espace

tangent $T_C \Sigma_q(X; a)$ s'identifie au sous-espace des sections $\xi \in V$ qui s'annulent en a , on obtient la première partie de l'énoncé.

Soit $C \in \Sigma_q(X)$ et $(e_{j\alpha})$ une base de V , de la forme (21).

Soit N_C un sous-espace de type $(r, 1)$ de V . Par définition, N_C admet une présentation paramétrique de la forme

$$\xi = \left(\sum_{\alpha=1}^n s_\alpha \phi^{\alpha-1} \right) \left(\sum_{j=1}^r t_j e_j \right), \quad (t_1, \dots, t_r) \in \mathbb{C}^r,$$

où $(s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. Étant donné $a \in C \setminus \{x_0\}$, toutes les sections $\xi \in N_C$ s'annulent en ce point si et seulement si $u = \phi(a)$ vérifie $\sum_{\alpha=0}^{n-1} s_\alpha u^{\alpha-1} = 0$. Pour $s \in \mathbb{C}^n$ général, les solutions définissent un $(n-1)$ -uplet $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_{n-1})$ de C et l'on obtient

$$N_C = \bigcap_{i=1}^{n-1} T_C \Sigma_q(X; a_i) = T_C \Sigma_q(X; \mathbf{a}).$$

Comme $\Sigma_q(X; \mathbf{a}) = \bigcap_{i=1}^{n-1} \Sigma_q(X; a_i)$ est une variété intégrale de type $(r, 1)$ de $\Sigma_q(X)$, compte tenu de la Définition 4.2 et du commentaire qui la suit, on obtient que la $G_{r,n}$ -structure de $\Sigma_q(X)$ est γ -intégrable.

Pour montrer que la $G_{r,n}$ -structure vectorielle qu'on a construite sur chaque espace $T_C \Sigma_q(X)$ dépend analytiquement de $C \in \Sigma_q(X)$, fait qu'on a provisoirement admis, on peut procéder de la façon suivante.

Soit $C \in \Sigma_q(X)$, (a_0, \dots, a_n) un $(n+1)$ -uplet de C et, pour $\alpha = 0, \dots, n$, Y_α un germe d'hypersurface lisse transverse à C en a_α . Comme on l'a vu à la fin de la Section 2.6, l'application γ , voir le Lemme 2.8, induit un difféomorphisme local

$$Y_1 \times \dots \times Y_n \rightarrow \Sigma_q(X).$$

Il en résulte que, pour $\alpha \in \{1, \dots, n\}$ fixé, les variétés $\Sigma_q(X; y)$ avec $y \in Y_\alpha$ forment un germe de feuilletage (régulier) \mathcal{F}_α de codimension r au voisinage de C dans $\Sigma_q(X)$. De plus les feuilletages $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$ sont en position générale. On définit le feuilletage \mathcal{F}_0 de façon analogue. Par symétrie, on obtient $n+1$ feuilletages de codimension r , en position générale.

On choisit un système de 1-formes analytiques $(\phi_j)_{j=1}^r$ tel que le feuilletage \mathcal{F}_0 soit défini par le système d'équations $\{\phi_j = 0, j = 1, \dots, r\}$, et on décompose chaque 1-forme ϕ_j en $\phi_j = \sum_{\alpha=1}^n \omega_{j\alpha}$, où, pour $\alpha = 1, \dots, n$, le système $\{\omega_{j\alpha} = 0, j = 1, \dots, r\}$ définit le feuilletage \mathcal{F}_α . Par construction et compte tenu du Lemme 4.1, on obtient ainsi un germe $(\omega_{j\alpha})$ de base de 1-formes analytiques au voisinage de C et pour tout $C' \in \Sigma_q(X)$ voisin de C , la base de $T_{C'} \Sigma_q(X)$ induite par cette base est distinguée pour la $G_{r,n}$ -structure vectorielle de $T_{C'} \Sigma_q(X)$. Ceci donne le résultat voulu.

4.3. Fin de la démonstration du Théorème 4.4. — Si $X_0 \subset \mathbb{P}^{r+n-1}$ est une variété minimale de degré $n-1$, la structure quasi-grassmannienne de $\Sigma_{n-1}(X_0)$ est induite par l'application qui associe à un $\mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^{r+n-1}$ générique la section $X_0 \cap \mathbb{P}^{n-1}$. Elle est intégrable. Par définition d'une variété standard de la classe $\mathcal{X}_{r+1,n}(q)$, éventuellement en invoquant le Théorème 3.12 pour plus de précision, la $G_{r,n}$ -structure naturelle de $\Sigma_q(X)$ est intégrable si la variété X est standard.

On traite la réciproque. On suppose que la $G_{r,n}$ -structure de $\Sigma_q(X)$ est intégrable. Compte tenu du Théorème 3.12, il s'agit de montrer que X est intégrable au sens de la Définition 3.2.

Soit C une courbe admissible de X , $\mathbf{a} \subset C$ un $(n-2)$ -uplet et $\pi : X \dashrightarrow \mathbb{P}^{r+1}$ une application birationnelle associée. Soit x un point de $C \setminus \mathbf{a}$, $h \subset T_x X$ un hyperplan qui contient $T_x C$ et H l'hyperplan de \mathbb{P}^{r+1} passant par $\pi(x)$ et de direction l'image de h dans $T_{\pi(x)} \mathbb{P}^{r+1}$. La variété $Y_0 = \pi^{-1}(H)$ est un diviseur admissible qui contient C et est tel que $T_x Y_0 = h$. Comme on l'a remarqué après la Définition 3.1, on obtient tous les diviseurs admissibles de X par cette construction. Il s'agit donc de montrer que Y_0 appartient à la classe $\mathcal{X}_{r,n}(q)$.

Soit $V = T_C \Sigma_q(X)$, qu'on identifie à $H^0(C, N_C X)$, et $(e_{j\alpha})$ une base distinguée de V de la forme (21). Par définition, un sous-espace L_C de type $(r-1, n)$ de V admet une présentation paramétrique de la forme

$$\xi = \left(\sum_{\alpha=1}^n s_\alpha \phi^{\alpha-1} \right) \left(\sum_{j=1}^r t_j e_j \right), \quad (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{C}^n, \quad (t_1, \dots, t_r) \in K,$$

où K est un hyperplan de \mathbb{C}^r . La fibre $L_C(p) = \{\xi(p) \in (N_C X)_p, \xi \in L_C\}$ de L_C en tout point $p \in C$ est donc de rang $r-1$. On choisit le sous-espace L_C , de type $(r-1, n)$, dont la fibre $L_C(x)$ au point donné $x \in C \setminus \mathbf{a}$ est $h/T_x C$.

Comme la $G_{r,n}$ -structure de $\Sigma_q(X)$ est supposée intégrable, il existe en C un germe $L \subset \Sigma_q(X)$ de variété intégrale de type $(r-1, n)$, tel que $T_C L = L_C$. Considérons la projection canonique

$$\kappa : \left\{ (C', x') \in L \times X, x' \in C' \right\} \rightarrow X.$$

Son image est aussi l'image d'un relèvement $V : L \times \mathbb{P}^1 \rightarrow X$ de l'inclusion $v : L \rightarrow \Sigma_q(X)$. Les dérivées de v et de V en $C' \in L$ et $(C', t) \in L \times \mathbb{P}^1$ sont reliées par la formule (9) du Chapitre 2. Si $x' = V(C', t)$, l'image de la dérivée de V est le sous-espace de $T_{x'} X$ qui contient $T_{x'} C'$ et dont le quotient par $T_{x'} C'$ est la fibre en x' du sous-espace $T_{C'} L$ de $H^0(C', N_{C'} X)$. En particulier, comme cette fibre est de dimension constante $r-1$, l'application V est de rang constant r et donc, si le germe L est choisi assez petit, son image $Y = \kappa(L)$ est une hypersurface analytique (non fermée) lisse qui contient C . Par construction $T_x Y = h$.

Considérons à présent la projection canonique

$$\kappa^{(n)} : \left\{ (C', \mathbf{x}') \in L \times X_{\text{adm}}^{(n)}, \mathbf{x}' \subset C' \right\} \rightarrow X_{\text{adm}}^{(n)}.$$

La variété de départ est de dimension $(r-1)n + n = rn$ et si \mathbf{x}' est dans l'image de $\kappa^{(n)}$, $(\gamma(\mathbf{x}'), \mathbf{x}')$ est son seul antécédent. L'application $\kappa^{(n)}$, à valeurs dans Y^n , est donc de rang $rn = \dim Y^n$ au point générique de la variété source. Rappelons que Y est lisse le long de C donc engendre un espace de dimension $\geq \pi_{r-1,n}(q)$. On a obtenu :

la variété irréductible lisse (non fermée) $Y = \kappa(L)$ engendre un espace de dimension $\geq \pi_{r-1,n}(q)$ et il existe un n -uplet $\mathbf{y}_0 \in Y^n$ tel que, pour tout $\mathbf{y} \in Y^n$ voisin de \mathbf{y}_0 , il existe une courbe $C \in \text{CRN}_q(Y)$ qui contient \mathbf{y} .

Bien que la variété Y ne soit pas fermée, le même argument qu'au début de la démonstration de la Proposition 3.3 montre que $\pi(Y)$ est contenu dans un hyperplan de

\mathbb{P}^{r+1} , nécessairement l'hyperplan H . Il en résulte que Y est un ouvert de $Y_0 = \pi^{-1}(H)$ puis que Y_0 appartient à la classe $\mathcal{X}_{r,n}(q)$. Le Théorème 4.4 est démontré.

4.4. Application : retour sur la Section 3.7. — On vient de montrer que si la variété $X \in \mathcal{X}_{r+1,n}(q)$ est standard, la $G_{r,n}$ -structure naturelle de $\Sigma_q(X)$ est intégrable, puis que, si cette structure est intégrable, alors X est intégrable. Pour X , les deux propriétés, d'être intégrable et d'être standard, sont donc équivalentes. Ceci démontre le Lemme 3.13 et la seconde partie du Théorème 3.14.

Reste à démontrer la première partie de ce théorème. Soit X une variété standard de la classe $\mathcal{X}_{r+1,n}(q)$ avec $n \geq 3$ et $q \geq n$. On se donne un point $a \in X_{\text{adm}}$ qu'on affecte du poids ρ_1 . Il s'agit de montrer que la variété $X' = \theta_a(X) \in \mathcal{X}_{r+1,n-1}$ est standard, où θ_a est une projection osculatrice associée à a et $q' = q - (\rho_1 + 1)$.

On sait que θ_a induit un difféomorphisme de $X_{\text{adm}}(a)$ sur son image, un ouvert dense de X'_{adm} , ainsi qu'une application $\widehat{\theta}_a : \Sigma_q(X; a) \rightarrow \Sigma_{q'}(X')$. En utilisant les rappels faits au début de la Section 2.6, on calcule facilement la dérivée de cette application en $C \in \Sigma_q(X)$ et l'on vérifie que c'est un isomorphisme. On en déduit que $\widehat{\theta}_a$ est un difféomorphisme de $\Sigma_q(X; a)$ sur son image, un ouvert dense de $\Sigma_{q'}(X')$.

Finalement, comme la $G_{r,n}$ -structure de $\Sigma_q(X)$ est intégrable, la $G_{r,n-1}$ -structure induite sur $\Sigma_q(X; a)$, une variété intégrale de type $(r, n-1)$, est intégrable. Compte tenu du Théorème 4.4, le difféomorphisme $\widehat{\theta}_a$ est compatible avec les $G_{r,n-1}$ structures de la source et du but. Il en résulte que la $G_{r,n-1}$ -structure de $\Sigma_{q'}(X')$ est intégrable sur un ouvert dense de $\Sigma_{q'}(X')$. Elle est donc intégrable et, d'après le même théorème, la variété X' est standard.

4.5. Une autre démonstration du Théorème 1.7 ? — Dans la Section 4.3, pour montrer que X est une variété standard si la $G_{r,n}$ -structure de $\Sigma_q(X)$ est intégrable, nous avons utilisé la notion intermédiaire de « variété intégrable » et le Théorème 3.12. D'un autre côté, les méthodes décrites dans ce chapitre suggèrent une autre démonstration du Théorème 1.7. L'esquisse ci-dessous est seulement plausible. Faute de temps et aussi faute de motivation, nous n'avons pas vérifié les détails.

Un problème général intéressant est de caractériser les paires $(X, \Sigma(X))$, où X est une variété algébrique irréductible de dimension $r+1$ et $\Sigma(X)$ une variété algébrique irréductible de dimension rn de courbes de X , qui sont équivalentes par une transformation birationnelle à une paire $(X_0, \Sigma(X_0))$ où la variété X_0 engendre un espace \mathbb{P}^{r+n-1} et $\Sigma(X_0)$ est la variété définie à partir des sections $X_0 \cap \mathbb{P}^{n-1}$. Disons que la paire $(X, \Sigma(X))$ est *standard* si c'est le cas. C'est l'analogue pour les courbes du problème de la caractérisation des systèmes de diviseurs qui sont linéaires. Dans ce cas-ci, un théorème d'Enriques [3] donne une réponse importante.

On considère la situation qu'on vient de décrire, sous l'hypothèse que la relation d'incidence « $x \in C$ » entre points $x \in X$ et courbes $C \in \Sigma(X)$ détermine, au sens de la première partie du Théorème 4.4, une structure quasi-grassmannienne sur un ouvert dense de $\Sigma(X)$ et que celle-ci est intégrable. On suppose de plus que, pour $\mathbf{x} \in X^n$ générique, il existe une *et une seule* courbe $C \in \Sigma(X)$ qui contient \mathbf{x} . Il est tentant de penser (est-ce connu ?) que, sous ces hypothèses, la paire $(X, \Sigma(X))$ est standard.

La Section 4.3 nous dit au moins comment essayer de construire le système de diviseurs qui, si l'on montre qu'il est linéaire, résout le problème posé. Un élément générique Y du système devra contenir la réunion des courbes qui sont éléments d'une variété (ou d'un germe de variété) intégrale de type $(r-1, n)$ de $\Sigma(X)$, dépendant de Y .

Si les conjectures précédentes sont correctes et démontrées, une démonstration alternative du Théorème 1.7 consiste à ne retenir du Chapitre 3 que la Proposition 3.5, dont la démonstration est très facile, à en déduire le résultat voulu si $n = 3$ et à conclure par l'énoncé suivant de la théorie des structures quasi-grassmanniennes.

Théorème 4.5. — *Soit $r \geq 2$, $n \geq 3$ et M une variété munie d'une $G_{r,n}$ -structure γ -intégrable. Soit $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$ des feuilletages de codimension r au voisinage de $x_0 \in M$, en position générale, dont les feuilles sont des variétés intégrales de type $(r, n-1)$. Si la $G_{r,n-1}$ -structure induite sur chaque feuille de chaque feuilletage est intégrable et si $n \geq 4$, alors la $G_{r,n}$ -structure de M est intégrable au voisinage de x_0 .*

On remarquera l'analogie entre l'énoncé précédent et le Théorème 3.14 sur l'hérédité de l'intégrabilité. En fait nous avons d'abord démontré un analogue de ce dernier en utilisant le Théorème 4.5. La démonstration directe qu'on a donnée dans le Chapitre 3 n'a été découverte que plus tard.

Le Théorème 4.5 apparaît dans Goldberg [6], où le cas $n = 3$ est permis, mais tout exemple d'une variété spéciale d'une classe $\mathcal{X}_{r+1,3}(3)$, on en construira dans le Chapitre 6, montre que le résultat est faux si $n = 3$.

En effet, soit $X \in \mathcal{X}_{r+1,3}(3)$ une variété spéciale. La variété $\Sigma_3(X)$ est munie d'une $G_{r,3}$ -structure γ -intégrable naturelle, qui n'est pas intégrable puisqu'on suppose que X est spéciale. D'autre part, si a est un point admissible de X , on a vu que la $G_{r,2}$ -structure induite sur la variété $\Sigma_3(X; a)$, une variété intégrale de type $(r, 2)$, est localement équivalente à la $G_{r,2}$ -structure naturelle sur la variété $\Sigma_2(X')$, où X' est une variété de Veronese d'ordre 2, l'image de X par une projection osculatrice de centre $X_a(1)$. Cette structure est donc toujours intégrable.

D'autre part, on a vu à la fin de la Section 4.2 comment construire des feuilletages $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_n$ de codimension r au voisinage de $C \in \Sigma_3(X)$, en position générale, dont les feuilles sont des variétés de la forme $\Sigma_3(X; a)$ avec $a \in X_{\text{adm}}$. Ceci montre que la condition $n \geq 4$ est nécessaire dans l'énoncé ci-dessus.

En revanche, la δ -intégrabilité des $G_{r,n}$ - et $G_{r,n-1}$ -structures de l'énoncé se lit sur des tenseurs dont des formules explicites sont données dans Goldberg [6] et *qui sont faciles à calculer sous l'hypothèse $n \geq 4$* . Bien que ce ne soit pas la démonstration choisie dans [6] (elle est incorrecte), peut-être dans l'espoir de couvrir aussi le cas $n = 3$, la démonstration du Théorème 4.5 est très simple à partir de ces formules.

5. La classification des variétés standards

5.1. Préliminaires. — Deux variétés projectives X et X' sont *équivalentes* s'il existe un isomorphisme $\phi : \langle X \rangle \rightarrow \langle X' \rangle$ tel que $\phi(X) = X'$. Dans ce chapitre, nous donnons la classification des variétés standards à équivalence près.

Le résultat précis est énoncé dans la prochaine section. La démonstration occupe le reste du chapitre et suit la classification des variétés minimales, qu'on rappellera.

Soit $X_0 \in \mathcal{X}_{r+1,n}(n-1)$ une variété minimale et $X \in \mathcal{X}_{r+1,n}(q)$ une variété standard, voir la Définition 1.8. On dit qu'une application birationnelle $\phi : X_0 \dashrightarrow X$, telle que l'image d'une section de X_0 par un $\mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^{r+n-1}$ générique appartient à $\text{CRN}_q(X)$, associe X à X_0 et, si une telle application existe, que X et X_0 sont associées.

Pour chaque variété minimale X_0 , on construira explicitement des variétés standards qui lui sont associées. On montrera que la liste donnée est exhaustive en déterminant tous les systèmes linéaires sur X_0 tels que les applications rationnelles qu'ils définissent associent X_0 à des variétés standards. On utilisera sans démonstration les propriétés connues du groupe de Picard de X_0 ⁽⁶⁾ ainsi que le lemme suivant.

Lemme 5.1. — *Soit $X_0 \in \mathcal{X}_{r+1,n}(n-1)$ une variété minimale et $\phi : X_0 \dashrightarrow X$ une application birationnelle qui associe une variété standard $X \in \mathcal{X}_{r+1,n}(q)$ à X_0 . L'application ϕ est définie par un système linéaire complet $|W|$ de dimension $\pi_{r,n}(q)$, tel que $C \cdot W = q$ pour toute section de X_0 par un $\mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^{r+n-1}$ générique.*

Démonstration. — On se place sous les hypothèses de l'énoncé. D'abord, la partie singulière d'une variété minimale est vide ou de codimension ≥ 2 , ce qui permet d'utiliser la théorie des systèmes linéaires. On note $\text{Pic}(X_0)$ le groupe des classes de diviseurs de X_0 modulo équivalence linéaire : deux diviseurs $W, W' \in \text{Div}(X_0)$ sont linéairement équivalents si $W - W'$ est le diviseur d'une fonction rationnelle $f \in R(X_0) \setminus \{0\}$.

L'application ϕ est définie par un système linéaire \mathcal{L} sans composante fixe et de dimension $\pi_{r,n}(q)$, uniquement déterminé. C'est un sous-système linéaire d'un système linéaire complet $|W|$ sans composante fixe, défini par une classe $W \in \text{Pic}(X_0)$,

Comme $\phi : X_0 \dashrightarrow X$ est birationnelle et qu'une section générique $C = X_0 \cap \mathbb{P}^{n-1}$ est contenue dans $(X_0)_{\text{reg}}$ et ne rencontre pas le lieu d'indétermination de ϕ , son image $\phi(C)$ est de degré $C \cdot W$, ce qui donne $C \cdot W = q$.

L'image X' de X_0 par une application rationnelle définie par le système linéaire complet $|W|$ a aussi la propriété que, pour $\mathbf{x} \in X'^n$ générique, il existe un élément de $\text{CRN}_q(X')$ qui contient \mathbf{x} . Compte tenu du Théorème 1.2, la variété X' engendre un espace de dimension $\leq \pi_{r,n}(q)$. Comme le sous-système \mathcal{L} du système $|W|$ est déjà de dimension $\pi_{r,n}(q)$, on obtient $\mathcal{L} = |W|$. \square

5.2. La classification. — Rappelons d'abord la classification des variétés minimales $X_0 \subset \mathbb{P}^{r+n-1}$, de dimension $r+1$ et de degré $n-1$.

Si $n = 2$, X_0 est un espace projectif \mathbb{P}^{r+1} .

Si $n = 3$ et $r \geq 2$, X_0 peut être une hyperquadrique de \mathbb{P}^{r+2} , de rang ≥ 5 .

Si $n = 5$, X_0 peut être un cône au-dessus d'une surface de Veronese d'ordre 2.

Si $n \geq 3$ et si X_0 n'est pas de l'une des deux formes précédentes, X_0 est un scroll rationnel normal. Les scrolls rationnels normaux de dimension $r+1$ et de degré $n-1$ sont caractérisés à équivalence près par une famille d'entiers a_0, \dots, a_r tels que :

$$(22) \quad a_0 \geq \dots \geq a_r \geq 0, \quad a_0 + \dots + a_r = n - 1.$$

Le modèle S_{a_0, \dots, a_r} d'un tel scroll est donné dans le paragraphe ci-dessous.

6. Rappelons en particulier que si X_0 est un cône au-dessus de X'_0 , le groupe de Picard de X_0 est naturellement isomorphe à celui de X'_0 ; voir R. Hartshorne : Algebraic Geometry, *Graduate Texts in Mathematics* 52, Springer-Verlag, Chapitre II, Exercice 6.3. On utilisera cette propriété.

Comme on va le voir, une variété standard est le plus souvent équivalente à la complétée projective d'une sous-variété d'un espace \mathbb{C}^N paramétrée par une famille de monômes. On introduit une définition purement utilitaire.

Définition 5.2. — Soit $A \subset \mathbb{N}^{r+1} \setminus \{0\}$ un ensemble fini de cardinal $N_A \geq 1$. On note $x = (x_\alpha)_{\alpha \in A}$ le point courant de \mathbb{C}^{N_A} et, pour tout $s = (s_1, \dots, s_{r+1}) \in \mathbb{C}^{r+1}$ et tout $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{r+1}) \in A$, on note $s^\alpha = s_1^{\alpha_1} \cdots s_{r+1}^{\alpha_{r+1}}$. La variété monômiale définie par l'ensemble A est la variété projective $X \subset \mathbb{P}^{N_A}$ telle que

$$(23) \quad X \cap \mathbb{C}^{N_A} = \{(s^\alpha)_{\alpha \in A}, s \in \mathbb{C}^{r+1}\}.$$

On distinguera souvent certaines des composantes de $s \in \mathbb{C}^{r+1}$ en changeant de notation. Par exemple, étant donnée une famille d'entiers (a_0, \dots, a_r) qui vérifie (22), la variété monômiale définie par l'ensemble

$$A = \left\{ (k, \alpha) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N}^r) \setminus \{0\}, \quad |\alpha| \leq 1, \quad k \leq (\rho - 1)a_0 + \sum_{j=1}^r \alpha_j a_j \right\}.$$

est un scroll rationnel normal de dimension $r + 1$ et de degré $n - 1$, qu'on note S_{a_0, \dots, a_r} .

Le théorème suivant donne la liste, sans omission ni répétition, des variétés standards.

Théorème 5.3. — Soit $X \in \mathcal{X}_{r+1, n}(q)$ une variété standard avec $r \geq 1$, $n \geq 2$ et $q \geq n - 1$. Elle est associée à une seule variété minimale X_0 , à équivalence près.

1. Si $n = 2$ donc $X_0 = \mathbb{P}^{r+1}$, X est une variété de Veronese d'ordre q .
2. Si $n = 3$ et si X_0 est une hyperquadrique de rang ≥ 5 , q est pair et X est l'image de X_0 par un plongement de Veronese d'ordre $q/2$.
3. Si $n = 5$ et si X_0 est un cône au-dessus d'une surface de Veronese d'ordre 2, q est pair et X est équivalente à la variété monômiale définie par l'ensemble

$$A(q) = \left\{ (i, j, \alpha) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^{r-1}, \quad 1 \leq 2(i + j) + 4|\alpha| \leq q \right\}.$$

4. Si $n \geq 3$ et si X_0 est le scroll rationnel normal S_{a_0, \dots, a_r} , de degré $n - 1$, X est équivalente à une variété monômiale définie par un ensemble

$$A(\rho, \chi) = \left\{ (k, \alpha) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N}^r) \setminus \{0\}, \quad |\alpha| \leq \rho, \quad k \leq (\rho - |\alpha|)a_0 + \sum_{j=1}^r \alpha_j a_j + \chi \right\},$$

où $q = \rho(n - 1) + \chi$, $\rho \geq 1$ est un entier et $\chi \in \{-1, \dots, n - 2\}$.

Si $q \not\equiv -1$ modulo $n - 1$, $q = \rho(n - 1) + \chi$ est la division euclidienne de q par $n - 1$.

Si $q \equiv -1$ modulo $n - 1$, les ensembles $A(\rho, n - 2)$ et $A(\rho + 1, -1)$ définissent des variétés standards; elles sont équivalentes si et seulement si $n = 3$ ou $a_0 = n - 1$.

Le première partie de l'énoncé est une conséquence de la seconde. En effet, si une variété $X \in \mathcal{X}_{r+1, n}(q)$ est associée à deux variétés $X_0, X_1 \in \mathcal{X}_{r+1, n}(n - 1)$, X_1 est associée à X_0 et donc équivalente à X_0 d'après la classification.

Remarquons qu'une même variété peut appartenir à plusieurs classes $\mathcal{X}_{r+1, n}(q)$, comme le montre la dernière partie de la classification. Si $1 \leq \chi \leq n - 2$, l'ensemble $A(1, \chi)$ définit une variété standard de la classe $\mathcal{X}_{r+1, n-1}(n - 1 + \chi)$, qui est aussi le scroll rationnel normal $S_{a_0 + \chi, \dots, a_r + \chi} \in \mathcal{X}_{r+1, n'}(n' - 1)$ avec $n' = n + (r + 1)\chi$.

Avant de passer à la démonstration du théorème, faisons quelques remarques sur la Définition 5.2. Les ensembles de multi-indices $A \subset \mathbb{N}^{r+1} \setminus \{0\}$ qui interviendront auront tous les propriétés suivantes :

- si $\alpha \in \mathbb{N}^{r+1}$ est de longueur $|\alpha| = 1$, alors $\alpha \in A$;
- si $\alpha \in A$ et si $\alpha' \in \mathbb{N}^{r+1} \setminus \{0\}$ est tel que $\alpha'_i \leq \alpha_i$ pour $i = 1, \dots, r+1$, alors $\alpha' \in A$.

Soit X une variété monômiale définie par un ensemble A qui a ces propriétés. Il résulte de la première propriété que $X \cap \mathbb{C}^{N_A}$ est une variété isomorphe à \mathbb{C}^{r+1} .

Il résulte de la seconde propriété que $X \cap \mathbb{C}^{N_A}$ est homogène. Plus précisément, pour $s_\star \in \mathbb{C}^{r+1}$ donné, $X \cap \mathbb{C}^{N_A}$ est aussi paramétré par $x_\alpha = (s_\star + s)^\alpha$, $\alpha \in A$. Compte tenu de la seconde condition, les polynômes $(s_\star + s)^\alpha - s_\star^\alpha$, $\alpha \in A$, engendrent le même espace vectoriel que les monômes s^α , $\alpha \in A$. Il existe donc une transformation affine de \mathbb{C}^{N_A} qui conserve X et envoie $0 \in X$ sur un point donné de $X \cap \mathbb{C}^{N_A}$.

Si X, X' sont des variétés monômiales définies par des ensembles $A, A' \subset \mathbb{N}^{r+1} \setminus \{0\}$ qui vérifient les conditions précédentes et si $A' \subset A$, la projection $(x_\alpha)_{\alpha \in A} \mapsto (x_\alpha)_{\alpha \in A'}$ induit un isomorphisme de $X \cap \mathbb{C}^{N_A}$ sur $X' \cap \mathbb{C}^{N_{A'}}$.

5.3. Les trois premiers points de la classification. — On les démontre au cas par cas.

Si $n = 2$, le groupe de Picard de $X_0 = \mathbb{P}^{r+1}$ est engendré par la classe H d'un hyperplan. Si $q \geq 1$, les applications rationnelles induites par le système $|qH|$ sont les plongements de Veronese d'ordre q . Ceci donne le premier point du théorème. Bien sûr, le Théorème 1.5 est bien plus fort, puisqu'on n'y suppose pas que X soit standard.

Soit $n = 3$ et $X_0 \subset \mathbb{P}^{r+2}$ une hyperquadrique de rang $\mu + 1 \geq 5$, ce qui impose en particulier $r \geq 3$. Comme X_0 est un cône au-dessus d'une hyperquadrique lisse de rang ≥ 5 , son groupe de Picard est le groupe libre engendré par la classe H d'une section hyperplane de X_0 . Si $\rho \geq 1$, l'application rationnelle définie par le système linéaire $|\rho H|$ est la restriction à X_0 d'un plongement de Veronese d'ordre ρ de \mathbb{P}^{r+2} et l'image d'une section de X_0 par un $\mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^{r+2}$ générique est une courbe rationnelle normale de degré 2ρ .

D'autre part, dans un système convenable de coordonnées homogènes $[U_0 : \dots : U_{r+2}]$, la quadrique X_0 est donnée par l'équation $\sum_{j=0}^{\mu} U_j^2 = 0$. En notant $U = (U_0, U')$, comme un polynôme homogène de degré ρ s'écrit

$$F(U) = G_0(U') + U_0 G_1(U') + \left(\sum_{j=0}^{\mu} U_j^2 \right) G_2(U),$$

où $G_0(U')$ est homogène de degré ρ et $G_1(U')$ homogène de degré $\rho - 1$, on voit que

$$\dim |\rho H| = \binom{r+1+\rho}{r+1} + \binom{r+\rho}{r+1} - 1 = \pi_{r,3}(2\rho).$$

On a obtenu le deuxième point du théorème.

Soit $n = 5$ et $X_0 \subset \mathbb{P}^{r+4}$ un cône au-dessus d'une surface de Veronese $S \subset \mathbb{P}^5$. Le groupe de Picard de S est le groupe libre engendré par une conique de S , donc celui de X_0 est le groupe libre engendré par la classe R d'un cône au-dessus d'une conique de S et $2R$ est la classe d'une section hyperplane de X_0 .

Si $C \in \text{CRN}_4(X_0)$ est la section de X_0 par un $\mathbb{P}^4 \subset \mathbb{P}^{r+4}$ générique, alors $C \cdot \sigma R = 2\sigma$. Il en résulte que, si $X \in \mathcal{X}_{r+1,5}(q)$ est associée à X_0 , q est pair et X déterminée par q ,

à équivalence près. En particulier, si q est un multiple de 4, X est l'image de X_0 par un plongement de Veronese d'ordre $q/4$ de X_0 .

Réciproquement, $r \geq 1$ étant fixé, soit $q \geq 4$ un entier pair et

$$A(q) = \left\{ (i, j, \alpha) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^{r-1}, \quad 1 \leq 2(i+j) + 4|\alpha| \leq q \right\}.$$

Notons $X(q)$ la variété monômiale définie par l'ensemble $A(q)$. On vérifie que $X(4)$ est un cône au-dessus d'une surface de Veronese. On peut supposer que c'est X_0 .

L'inclusion $A(4) \subset A(q)$ induit une application birationnelle $\phi : X_0 \dashrightarrow X(q)$. Une section générique $X_0 \cap \mathbb{P}^4$ de X_0 est paramétrée par des équations de la forme :

$$t_j = \frac{T_j(\theta)}{T_0(\theta)}, \quad j = 1, 2; \quad s_j = \frac{S_j(\theta)}{T_0(\theta)^2}, \quad j = 1, \dots, r-1,$$

où $\theta \in \mathbb{P}^1$, les $T_j(\theta)$ sont des polynômes de degré ≤ 2 et les $S_j(\theta)$ des polynômes de degré ≤ 4 . Son image par ϕ est paramétrée par

$$x_{(i,j,\alpha)}(\theta) = \frac{T_1(\theta)^i T_2(\theta)^j S_1(\theta)^{\alpha_1} \dots S_{r-1}(\theta)^{\alpha_{r-1}}}{T_0(\theta)^{i+j+2|\alpha|}}, \quad (i, j, \alpha) \in A(q).$$

C'est en général une courbe rationnelle normale de degré q . La variété $X(q)$ vérifie donc la première propriété dans la Définition 1.1. Pour montrer qu'elle appartient à $\mathcal{X}_{r+1,5}(q)$, il suffit de vérifier qu'elle engendre un espace de dimension $\pi_{r,5}(q)$.

On écrit $q = 2\sigma$ et on décompose $A(q) = \{(i, j, \alpha) \in \mathbb{N}^{r+1}, 1 \leq i+j+2|\alpha| \leq \sigma\}$ selon les parités de i et de j : le cardinal de $A(q)$ est la somme des cardinaux des quatre ensembles de $(i, j, \alpha) \in \mathbb{N}^{r+1}$ respectivement définis par :

$$0 < 2i+2j+2|\alpha| \leq \sigma, \quad 2i+2j+1+2|\alpha| \leq \sigma, \quad 2i+2j+1+2|\alpha| \leq \sigma, \quad 2i+2j+2+2|\alpha| \leq \sigma.$$

Si $\sigma = 2\rho$ est pair, on obtient : $\text{card}(A(q)) + 1 = \binom{r+\rho+1}{r+1} + 3 \binom{r+\rho}{r+1} = \pi_{r,5}(q) + 1$.

Si $\sigma = 2\rho + 1$ est impair, on a : $\text{card}(A(q)) + 1 = 3 \binom{r+\rho+1}{r+1} + \binom{r+\rho}{r+1} = \pi_{r,5}(q) + 1$.

Ceci démontre le troisième point du théorème.

5.4. Si X_0 est un scroll rationnel normal. — On suppose enfin $n \geq 3$ et que X_0 est un scroll rationnel normal de dimension $r+1$ et de degré $n-1$, défini par des entiers a_0, \dots, a_r qui vérifient (22). Le scroll X_0 étant fixé à équivalence près, on associe à toute paire d'entiers (ρ, χ) tels que

$$\rho(n-1) + \chi \geq n-1, \quad \rho \geq 1, \quad -1 \leq \chi \leq n-2,$$

l'ensemble

$$(24) \quad A(\rho, \chi) = \left\{ (k, \alpha) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N}^r) \setminus \{0\}, \quad |\alpha| \leq \rho, \quad k \leq (\rho - |\alpha|)a_0 + \sum_{j=1}^r \alpha_j a_j + \chi \right\}$$

et la variété monômiale $X(\rho, \chi)$ définie par cet ensemble.

Remarquons que la première condition sur la paire (ρ, χ) exclut la paire $(1, -1)$. D'autre part, l'écriture $q = \rho(n-1) + \chi$ est la division euclidienne de q par $n-1$ sauf si $\chi = -1$, auquel cas q est congru à -1 modulo $n-1$.

La variété $X(1, 0)$ est le scroll rationnel normal qu'on a noté S_{a_0, \dots, a_r} dans la Section 5.2. On peut supposer $X_0 = X(1, 0)$. La variété $X_0 \cap \mathbb{C}^{r+n-1}$ est paramétrée par

$$(25) \quad (t, \dots, t^{a_0}, s_1, s_1 t, \dots, s_1 t^{a_1}, \dots, s_r, s_r t, \dots, s_r t^{a_r}), \quad (t, s) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^r,$$

et une section de X_0 par un $\mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^{r+n-1}$ générique est donnée par les relations

$$(26) \quad s_k = \frac{P_k(t)}{P_0(t)}, \quad k = 1, \dots, r,$$

entre les paramètres t et s , où les $P_k(t)$ sont des polynômes de degré respectif $\leq n-1-a_k$.

Considérons une variété $X(\rho, \chi)$. Comme $A(1, 0) \subset A(\rho, \chi)$, on a un isomorphisme naturel de $X_0 \cap \mathbb{C}^{r+n-1}$ sur $X(\rho, \chi) \cap \mathbb{C}^{\text{card } A(\rho, \chi)}$, l'inverse d'une projection. L'image d'une section de X_0 par un $\mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^{r+n-1}$ générique donnée par (26) est une courbe rationnelle normale de degré $q = \rho(n-1) + \chi$. En effet, elle est donnée par

$$x_{(k, \alpha)}(t) = \frac{t^k P_1(t)^{\alpha_1} \cdots P_r(t)^{\alpha_r} P_0(t)^{\rho - |\alpha|}}{P_0(t)^\rho}, \quad (k, \alpha) \in A(\rho, \chi).$$

Le degré du dénominateur est majoré par $\rho(n-1-a_0) \leq q$ et celui du numérateur est majoré par $k + \sum_{j=1}^r \alpha_j(n-1-a_j) + (n-1-a_0)(\rho - |\alpha|) \leq q$, par construction.

La variété $X(\rho, \chi)$ a donc la première propriété dans la Définition 1.1. Pour montrer qu'elle a aussi la deuxième, on calcule la dimension $N(\rho, \chi) = \text{card } A(\rho, \chi)$ de l'espace qu'elle engendre. On pose $\alpha_0 = \rho - |\alpha|$, $\hat{\alpha} = (\alpha_0, \alpha) \in \mathbb{N}^{r+1}$ et $\hat{\alpha} \cdot a = \sum_{\mu=0}^r \alpha_\mu a_\mu$. Soit τ une permutation circulaire de $\{0, \dots, r\}$. Le nombre $N(\rho, \chi) + 1$ est égal à

$$\begin{aligned} \sum_{|\hat{\alpha}|=\rho} (\hat{\alpha} \cdot a + \chi + 1) &= \frac{1}{r+1} \sum_{|\hat{\alpha}|=\rho} \sum_{j=0}^r (\alpha_{\tau^j(0)} a_0 + \cdots + \alpha_{\tau^j(r)} a_r + \chi + 1) \\ &= \frac{1}{r+1} \sum_{|\hat{\alpha}|=\rho} \rho(n-1) + (\chi + 1) \sum_{|\hat{\alpha}|=\rho} 1 \\ &= (n-1) \binom{r+\rho}{r+1} + (\chi + 1) \binom{r+\rho}{r}, \end{aligned}$$

ou encore

$$N(\rho, \chi) + 1 = (\chi + 1) \binom{r+\rho+1}{r+1} + (n-2-\chi) \binom{r+\rho}{r+1} = \pi_{r,n}(q) + 1.$$

La variété $X(\rho, \chi)$ appartient donc à la classe $\mathcal{X}_{r+1,n}(q)$ avec $q = \rho(n-1) + \chi$. On a obtenu la première partie du lemme suivant.

Lemme 5.4. — *On suppose que X_0 est le scroll rationnel normal S_{a_0, \dots, a_r} , de degré $n-1$. Soit $q \geq n-1$ un entier et $q = \rho(n-1) + \chi$ la division euclidienne de q par $n-1$.*

La variété monômiale $X(\rho, \chi)$ définie par l'ensemble (24) est un élément standard de la classe $\mathcal{X}_{r+1,n}(q)$, associé à X_0 .

Si $\chi = n-2$, la variété $X(\rho+1, -1)$ a aussi cette propriété; elle n'est pas équivalente à la variété $X(\rho, n-2)$ sauf si $n=3$ ou si $a_0 = n-1$.

Démonstration. — Il reste à montrer la dernière partie de l'énoncé. Commençons par les cas particuliers.

Si $a_0 = n-1$, la description de $A(\rho, -1)$ dans (24) s'écrit :

$$|\alpha| \leq \rho, \quad k \leq (\rho - |\alpha|)(n-1) - 1.$$

Comme ce système n'a pas de solution $(k, \alpha) \in \mathbb{N}^{r+1}$ avec $|\alpha| = \rho$, on a en fait $|\alpha| = \rho - 1$ et $k \leq (\rho - 1 - |\alpha|)(n - 1) + n - 2$. Autrement dit, $A(\rho, -1) = A(\rho - 1, n - 2)$ et donc $X(\rho, -1) = X(\rho - 1, n - 2)$.

Si $n = 3$ et $a_0 = a_1 = 1$, la description de $A(\rho, -1)$ dans (24) s'écrit :

$$|\alpha| \leq \rho, \quad k \leq \rho - (|\alpha| - \alpha_1) - 1.$$

Échangeons les paramètres s_1 et t et les indices k et α_1 . On obtient que la variété $X(\rho, -1)$ est équivalente à la variété monômiale définie par l'ensemble des $(k, \alpha) \in \mathbb{N}^{r+1} \setminus \{0\}$ qui vérifient $k \leq (\rho - 1 - |\alpha|) + \alpha_1 + 1$ et $|\alpha| \leq \rho - 1$, c'est-à-dire à la variété $X(\rho - 1, 1)$.

Avant de traiter le cas général, considérons une variété monômiale $X(\rho, \chi)$. Rappelons que son intersection avec $\mathbb{C}^{N(\rho, \chi)}$ est homogène. Il est clair qu'elle n'est pas $(\rho + 1)$ -régulière. Elle est ρ -régulière si $k + |\alpha| \leq \rho$ implique la deuxième inégalité dans (24), c'est-à-dire si

$$|\alpha| \leq \rho \Rightarrow (\rho - |\alpha|)(a_0 - 1) + \sum_{j=1}^r \alpha_j a_j + \chi \geq 0.$$

C'est évidemment le cas si $\chi \geq 0$. Alors, en faisant $t = 0$ dans les monômes $t^k s^\alpha$, $(k, \alpha) \in A(\rho, \chi)$, on voit que l'intersection de $X(\rho, \chi)$ avec son espace osculateur à l'ordre ρ en 0 contient une variété de Veronese de dimension r et d'ordre ρ .

On exclut maintenant les cas particuliers déjà traités. On suppose donc $a_2 \geq 1$ ou $a_2 = 0$, $a_1 \geq 1$ et $a_0 \geq 2$.

Soit $\rho \geq 2$. Compte tenu de ce qu'on vient de voir, pour montrer que les variétés standards $X(\rho, -1)$ et $X(\rho - 1, n - 2)$ ne sont pas équivalentes, il suffit de montrer que l'intersection Z de $X(\rho, -1)$ avec son osculateur à l'ordre $\rho - 1$ en 0 n'a pas de composante de dimension r . On note $x(t, s) \in X(\rho, -1)$ le point de paramètre $(t, s) \in \mathbb{C}^{r+1}$.

Si $x(t, s) \in Z$, tous les monômes $t^k s^\alpha$ de degré $\geq \rho$ avec $(k, \alpha) \in A(\rho, -1)$ sont nuls. En particulier $s^\alpha = 0$ si $|\alpha| = \rho$ et $\sum_{j=1}^r \alpha_j a_j - 1 \geq 0$. Si $a_2 \geq 1$, on obtient $s_1 = s_2 = 0$, ce qui implique que Z est de codimension ≥ 2 .

Si $a_2 = 0$, on a $a_1 \geq 1$ et $a_0 \geq 2$ par hypothèse et on obtient encore $s_1 = 0$. On doit aussi annuler le monôme $t^{\rho a_0 - 1}$ qui est de degré $\geq \rho$, ce qui donne $t = 0$. On obtient encore que Z est de codimension ≥ 2 . Le lemme est démontré. \square

5.5. Si X_0 est un scroll rationnel normal, suite et fin. — Il reste à montrer que les variétés standards de la classe $\mathcal{X}_{r+1, n}(q)$ qui apparaissent dans le Lemme 5.4 sont les seules associées au scroll rationnel normal $X_0 = S_{a_0, \dots, a_r}$.

Si $a_0 = n - 1$, c'est facile. Dans ce cas, X_0 est un cône au-dessus d'une courbe rationnelle normale de degré $n - 1$, donc le groupe $\text{Pic}(X_0)$ est le groupe libre engendré par la classe R du cône au-dessus d'un point de cette courbe et $(n - 1)R$ est la classe d'une section hyperplane de X_0 . Pour $q \geq 1$, on a $C \cdot qR = q$ si C est une section de X_0 par un $\mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^{r+n-1}$ générique. Il en résulte que pour tout $q \geq n - 1$, il existe *au plus* une variété $X \in \mathcal{X}_{r+1, n}(q)$ associée à X_0 , à équivalence près. C'est la variété donnée par le Lemme 5.4.

On suppose maintenant $a_0 \neq n - 1$. On dit alors que X_0 est *un scroll général*. Le calcul sera plus laborieux. Le groupe $\text{Pic}(X_0)$ est le \mathbb{Z} -module libre $\mathbb{Z}H \oplus \mathbb{Z}R$ engendré par la

classe H d'une section hyperplane de X_0 et la classe R d'un élément du réglage de X_0 par des \mathbb{P}^r , dont on obtient un élément en fixant le paramètre t dans (25).

Si $a \in \mathbb{Z}$, on note $a^+ = \max(a, 0)$. Pour tout $(\rho, \chi) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}$, on définit l'entier $I(\rho, \chi)$ par la formule

$$(27) \quad I(\rho, \chi) = \sum_{|\alpha|=\rho} (\alpha_0 a_0 + \cdots + \alpha_r a_r + \chi + 1)^+.$$

La dimension du système linéaire $|\rho H + \chi R|$ est donnée par la formule suivante si $\rho \geq 1$, voir par exemple Harris [9] :

$$\dim |\rho H + \chi R| + 1 = I(\rho, \chi), \quad \rho \geq 1.$$

Soit $\phi : X_0 \dashrightarrow X$ une application birationnelle qui associe une variété standard $X \in \mathcal{X}_{r+1,n}(q)$ à X_0 . Soit $|\rho H + \chi R|$ le système linéaire complet qui définit ϕ .

Si C est une section de X_0 par un $\mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^{r+n-1}$ générique, on a $C \cdot H = n - 1$ et $C \cdot R = 1$, ce qui donne $\rho(n - 1) + \chi = q$.

Si l est une droite contenue dans un représentant de R , on a $l \cdot H = 1$ et $l \cdot R = 0$ donc $l \cdot (\rho H + \chi R) = \rho(n - 1)$, ce qui donne $\rho \geq 1$. On a donc :

Lemme 5.5. — *Si le système linéaire $|\rho H + \chi R|$ définit une application rationnelle qui associe au scroll général X_0 une variété $X \in \mathcal{X}_{r+1,n}(q)$, la paire $(\rho, \chi) \in \mathbb{Z}^2$ vérifie :*

$$(28) \quad \rho \geq 1, \quad q = \rho(n - 1) + \chi, \quad I(\rho, \chi) = \pi_{r,n}(q) + 1.$$

On a calculé $I(\rho, \chi)$ pour $\rho \geq 1$ et $\chi \geq -1$ au début de la Section 5.4 et obtenu que

$$I(\rho, \chi) = (\chi + 1) \binom{r + \rho + 1}{r + 1} + (n - 2 - \chi) \binom{r + \rho}{r + 1}, \quad \chi \geq -1,$$

ne dépend pas des entiers a_0, \dots, a_r mais seulement de leur somme $n - 1$. En particulier, si $q = \rho(n - 1) + \chi$ est la division euclidienne de q par $(n - 1)$, alors (ρ, χ) est une solution de (28) et, si $q = \rho(n - 1) + n - 2$, $(\rho + 1, -1)$ est une autre solution de (28).

Pour montrer que la liste du Lemme 5.4 est exhaustive, ce qui achèvera la démonstration du Théorème 5.3, il reste deux choses à vérifier. D'une part, on doit vérifier que les solutions précédentes du système (28) sont les seules, autrement dit que (28) implique $\chi \in \{-1, \dots, n - 2\}$. C'est l'objet du lemme suivant.

D'autre part on doit vérifier, si $n = 3$ et $a_0 = a_1 = 1$, que les deux systèmes linéaires $|\rho H + R|$ et $|(\rho + 1)H - R|$ définissent des applications rationnelles qui envoient X_0 sur des variétés équivalentes, ce qu'on fait maintenant.

Dans ce cas, X_0 est un cône au-dessus d'une quadrique lisse $Q \subset \mathbb{P}^3$ et le groupe $\text{Pic}(X_0)$ est aussi le groupe libre engendré par les classes R et R' des deux réglages de X_0 par des \mathbb{P}^r . De plus $R + R' = H$. On a donc $\rho H + R = (\rho + 1)R + \rho R'$ et $(\rho + 1)H - R = \rho R + (\rho + 1)R'$. Comme les deux réglages R et R' sont échangés par un automorphisme de X_0 , on obtient le résultat cherché.

Le lemme suivant termine la discussion.

Lemme 5.6. — *Si (ρ, χ) est une solution du système (28), alors $\chi \in \{-1, \dots, n - 2\}$.*

Démonstration. — Posons :

$$I_0(\rho, \chi) = \sum_{|\alpha|=\rho} (\alpha_0(n - 1) + \chi + 1)^+.$$

Si $\rho \geq 2$, on écrit $\alpha = (\alpha_0, \alpha')$, on distingue selon que α_0 est nul ou pas et on calcule

$$\begin{aligned} I_0(\rho, \chi) &= \sum_{|\alpha'|=\rho} (\chi + 1)^+ + \sum_{|\alpha|=\rho, \alpha_0 \geq 1} (\alpha_0(n-1) + \chi + 1)^+ \\ &= \sum_{|\alpha'|=\rho} (\chi + 1)^+ + \sum_{|\alpha|=\rho-1} ((\alpha_0 + 1)(n-1) + \chi + 1)^+ \\ &= \sum_{|\alpha'|=\rho} (\chi + 1)^+ + I_0(\rho-1, \chi + n - 1). \end{aligned}$$

Ceci montre que, pour $\rho(n-1) + \chi = q$ fixé, $I_0(\rho, \chi)$ atteint son maximum $\pi_{r,n}(q) + 1$ en (ρ, χ) si et seulement si $\chi \leq n-2$.

Comme $I(\rho, \chi) = I_0(\rho, \chi)$ si $\chi \geq -1$, on obtient déjà $\chi \leq n-2$ si (ρ, χ) est solution de (28). Finalement pour montrer qu'on a $\chi \geq -1$, il suffit de montrer que :

$$(29) \quad \chi < -1 \Rightarrow I(\rho, \chi) < I_0(\rho, \chi).$$

On montre que $I(\rho, \chi)$ diminue si, étant donné deux indices distincts $j, k \in \{0, \dots, r\}$ tels que $a_j \geq a_k \geq 1$, on substitue la paire $(a_j + 1, a_k - 1)$ à la paire (a_j, a_k) dans (a_0, \dots, a_r) . Par symétrie, il suffit de traiter le cas $j = 0, k = 1$.

On écrit que $I(\rho, \chi)$ est une somme de termes de la forme :

$$\sum_{\alpha_0 + \alpha_1 = \mu} (\alpha_0 a_0 + \alpha_1 a_1 + h)^+, \quad \mu \in \mathbb{N}, \quad h \in \mathbb{Z}.$$

Si $\alpha_0 = \alpha_1$ le terme correspondant de la somme ci-dessus ne dépend que de $a_0 + a_1$. On regroupe les autres termes par paires, soit avec $i > j$ et $i + j = \mu$:

$$(i a_0 + j a_1 + h)^+ + (j a_0 + i a_1 + h)^+ = A^+ + B^+, \quad A \geq B.$$

D'autre part :

$$(i(a_0 + 1) + j(a_1 - 1) + h)^+ + (j(a_0 + 1) + i(a_1 - 1) + h)^+ = (A + (i - j))^+ + (B - (i - j))^+.$$

Il suffit de remarquer que, si $A, B, C \in \mathbb{Z}$,

$$A \geq B, \quad C \geq 0 \Rightarrow (A + C)^+ + (B - C)^+ \geq A^+ + B^+,$$

pour obtenir le résultat en vue.

De proche en proche, on est ramené à démontrer (29) pour $a_0 = n-2, a_1 = 1$. Alors :

$$I(\rho, \chi) = \sum_{|\alpha|=\rho} (\alpha_0(n-2) + \alpha_1 + \chi + 1)^+.$$

Compte tenu de ce qui précède, il suffit de montrer, en considérant seulement les paires $(\alpha_0, \alpha_1) \in \{(\rho, 0), (0, \rho)\}$, qu'on a :

$$(\rho(n-2) + \chi + 1)^+ + (\rho + \chi + 1)^+ < (\rho(n-1) + \chi + 1)^+ + (\chi + 1)^+$$

si $\chi < -1$, ce qui est évident, compte tenu du fait que $\rho(n-1) + \chi = q > 0$. \square

6. Exemples de variétés spéciales

6.1. Introduction. — D'après le Théorème 1.7, seules les classes $\mathcal{X}_{r+1,n}(2n-3)$ sont susceptibles de contenir des variétés spéciales, et cela seulement si $r \geq 2$ et $n \geq 3$, ce qu'on suppose maintenant.

Commençons par rappeler la classification des variétés standards $X \in \mathcal{X}_{r+1,n}(2n-3)$. Compte tenu du Théorème 5.3, une telle variété est associée à un scroll rationnel normal S_{a_0, \dots, a_r} de degré $n-1 = a_0 + \dots + a_r$.

Pour un scroll donné, il y a en général deux variétés standards qui lui sont associées, à équivalence près. L'une est le scroll $S_{a_0+n-2, \dots, a_r+n-2}$, dont l'intersection avec $\mathbb{C}^{(r+2)(n-1)-1}$ est paramétrée par

$$(30) \quad (t, \dots, t^{a_0+n-2}, s_1, ts_1, \dots, t^{a_1+n-2} s_1, \dots, s_r, ts_r, \dots, t^{a_r+n-2} s_r),$$

où $(t, s) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^r$. C'est la seule solution si $a_0 = n-1$ ou si $n = 3$. Sinon, l'autre solution est équivalente à la variété dont l'intersection avec $\mathbb{C}^{(r+2)(n-1)-1}$ est paramétrée par

$$(t, \dots, t^{2a_0-1}, \dots, s_i, ts_i, \dots, t^{a_0+a_i-1} s_i, \dots, s_j s_k, ts_j s_k, \dots, t^{a_j+a_k-1} s_j s_k, \dots),$$

où $(t, s) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^r$ et $i, j, k \in \{1, \dots, r\}$, avec $j \leq k$ et $a_j + a_k \geq 1$.

Dans l'attente de résultats plus généraux, on présente dans ce court chapitre quelques exemples de variétés spéciales.

6.2. Quelques variétés spéciales dans les classes $\mathcal{X}_{r+1,3}(3)$ et $\mathcal{X}_{r+1,4}(5)$. — On a le résultat suivant :

Proposition 6.1. — *Soit \mathcal{Q} une quadrique de \mathbb{P}^{r+1} , de rang $\mu \geq 3$. L'image de $\mathbb{P}^1 \times \mathcal{Q}$ par le plongement de Segre de type $(1, 1)$ est une variété de la classe $\mathcal{X}_{r+1,3}(3)$. Elle est spéciale si $r \geq 2$. Ces variétés sont classées à équivalence près par leur dimension et le rang $\mu \in \{3, \dots, r+2\}$ de la quadrique \mathcal{Q} .*

Dans le cas $r = 2$ et $\mu = 4$, la variété obtenue est équivalente à l'image de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ par le plongement de Segre de type $(1, 1, 1)$. Nous devons cet exemple, le premier d'une variété spéciale dont nous ayons eu connaissance, à F. Russo [13].

Démonstration. — Le plongement de Segre $\sigma : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{r+1} \rightarrow \mathbb{P}^{2r+3}$ de type $(1, 1)$ est défini par

$$\sigma : ([S_0 : S_1], [T_0 : \dots : T_{r+1}]) \mapsto [S_0 T_0 : \dots : S_0 T_{r+1} : S_1 T_0 : \dots : S_1 T_{r+1}].$$

Soit $\mathcal{Q} \subset \mathbb{P}^{r+1}$ une quadrique de rang $\mu \geq 3$, autrement dit irréductible, et $X \subset \mathbb{P}^{2r+3}$ l'image de $\mathbb{P}^1 \times \mathcal{Q}$ par le plongement σ .

Soient $(\tau_1, q_1), (\tau_2, q_2), (\tau_3, q_3)$ trois points de $\mathbb{P}^1 \times \mathcal{Q}$ tels que $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \in \mathbb{P}^1$ soient deux-à-deux distincts et que $q_1, q_2, q_3 \in \mathcal{Q}$ engendrent un \mathbb{P}^2 qui coupe \mathcal{Q} suivant une conique propre Γ . Si $\phi : \mathbb{P}^1 \rightarrow \Gamma$ est l'isomorphisme déterminé par $\phi(\tau_i) = q_i$, $i = 1, 2, 3$, l'application $\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^{2r+3}$ définie par $\tau \mapsto \sigma(\tau, \phi(\tau))$ paramètre une courbe rationnelle normale de degré 3 contenue dans X . Comme X engendre l'espace \mathbb{P}^{2r+3} , on obtient que X est une variété de la classe $\mathcal{X}_{r+1,3}(3)$.

Pour montrer que X est une variété spéciale, il est commode de travailler dans \mathbb{C}^{2r+3} . On peut supposer que $X \cap \mathbb{C}^{2r+3}$ est paramétré par :

$$x(s, t) = (t, s, ts, q(s), tq(s)), \quad t \in \mathbb{C}, \quad s \in \mathbb{C}^r,$$

où q est une forme quadratique de rang $\mu - 2 \geq 1$. Si la variété X n'est pas une variété monômiale au sens de la Définition 5.2, elle a toutefois la propriété que $X \cap \mathbb{C}^{2r+3}$ est homogène. En effet, si $(t^*, s^*) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^r$, les composantes de $x(t + t^*, s + s^*) - x(t^*, s^*)$ engendrent le même espace vectoriel de polynômes que celles de $x(t, s)$.

Considérons alors l'intersection de X avec son espace osculateur $X_0(1)$, dont la trace dans \mathbb{C}^{2r+3} est donnée par les relations suivantes entre les paramètres $t \in \mathbb{C}$ et $s \in \mathbb{C}^r$:

$$ts = 0, \quad q(s) = 0.$$

C'est la réunion d'un \mathbb{P}^1 et d'une quadrique de dimension $r - 1$ et de rang $\mu - 2$. D'autre part, (30) rappelle que si $\tilde{X} \in \mathcal{X}_{r+1,3}(3)$ est une variété standard, $\tilde{X}_a(1) \cap \tilde{X}$ est de dimension r pour $a \in \tilde{X}$ générique. Ceci suffit pour conclure que la variété X est spéciale si $r > 1$ et que deux quadriques de rangs différents définissent des variétés qui ne sont pas équivalentes. \square

Les variétés précédentes admettent des paramétrages homogènes de la forme :

$$X(T_0, T_1, S) = [T_0^3, T_0^2 T_1, T_0^2 S, T_0 T_1 S, T_0 q(S), T_1 q(S)],$$

où $S = [S_1 : \dots : S_r]$ et $q(S)$ est une forme quadratique de rang $\mu' = \mu - 2 \geq 1$. Les composantes de $X(T_0, T_1, S)$ s'annulent à l'ordre 2 pour

$$T_0 = 0, \quad T_1 S = 0, \quad q(S) = 0,$$

c'est-à-dire au point $p = [0 : 1 : 0 : \dots : 0]$ et le long de la quadrique \mathcal{Q}' du \mathbb{P}^{r-1} d'équations $T_0 = 0, T_1 = 0$, définie par $T_0 = T_1 = 0$ et $q(S) = 0$.

Cette remarque suggère de considérer l'espace des polynômes homogènes de degré 3 qui s'annulent à l'ordre 2 le long de \mathcal{Q}' . Pour $\mu' \geq 2$, on obtient le résultat suivant.

Proposition 6.2. — *On suppose $r \geq 2$ et l'on se donne un $\mathbb{P}^{r-1} \subset \mathbb{P}^{r+1}$ et une quadrique \mathcal{Q}' de \mathbb{P}^{r-1} , de rang $\mu' \geq 2$. Soit $\phi : \mathbb{P}^{r+1} \dashrightarrow \mathbb{P}^{3r+5}$ une application rationnelle définie par le système linéaire des hypersurfaces de degré 3 de \mathbb{P}^{r+1} qui ont des points doubles le long de \mathcal{Q}' . Son image $X = \phi(\mathbb{P}^{r+1})$ est une variété spéciale de la classe $\mathcal{X}_{r+1,4}(5)$. Les variétés ainsi obtenues sont classées à équivalence près par leur dimension et le rang $\mu' \in \{2, \dots, r\}$ de la quadrique \mathcal{Q}' .*

Démonstration. — On reprend les notations des considérations qui précèdent l'énoncé. Si $\mu' \geq 2$, un polynôme homogène de degré 3, qu'on écrit

$$F(T_0, T_1, S) = P(T_0, T_1) + \sum_{j=1}^r P_j(T_0, T_1) S_j + T_0 R_0(S) + T_1 R_1(S) + R(S),$$

s'annule à l'ordre 2 (au moins) le long de \mathcal{Q}' si et seulement s'il est de la forme

$$(31) \quad F(T_0, T_1, S) = P(T_0, T_1) + \sum_{j=1}^r P_j(T_0, T_1) S_j + (c_0 T_0 + c_1 T_1) q(S).$$

Le système linéaire introduit dans l'énoncé est donc de dimension $3r + 5 = \pi_{r,4}(5)$.

D'autre part, étant donné un 4-uplet générique (p_1, p_2, p_3, p_4) de points de \mathbb{P}^{r+1} , ces points engendrent un \mathbb{P}^3 qui coupe la quadrique \mathcal{Q}' en deux points q_1, q_2 , tels que $p_1, p_2, p_3, p_4, q_1, q_2$ soient six points en position générale dans ce \mathbb{P}^3 . Il existe une et une seule cubique gauche qui passe par ces six points. On vérifie aisément que son image par

une application rationnelle $\phi : \mathbb{P}^{r+1} \dashrightarrow \mathbb{P}^{3r+5}$, définie par le système linéaire considéré, est une courbe rationnelle normale de degré 5.

Il en résulte que par les points $\phi(p_1), \dots, \phi(p_4)$ de la variété $X = \phi(\mathbb{P}^{r+1})$ passe une courbe rationnelle normale de degré 5, puis que X est une variété de la classe $\mathcal{X}_{r+1,4}(5)$.

On peut supposer que $X \cap \mathbb{C}^{3r+5}$ est paramétré par :

$$(32) \quad (t, t^2, t^3, s, ts, t^2s, q(s), tq(s)), \quad t \in \mathbb{C}, \quad s \in \mathbb{C}^r.$$

C'est une sous-variété homogène de \mathbb{C}^{3r+5} et la trace sur \mathbb{C}^{3r+5} de l'intersection $X \cap X_0(1)$ est obtenue quand les paramètres $t \in \mathbb{C}$ et $s \in \mathbb{C}^r$ vérifient $t = 0$ et $q(s) = 0$. C'est une quadrique de dimension $r - 1$ et de rang μ' . Ceci montre que deux quadriques \mathcal{Q}' de rangs différents définissent des variétés qui ne sont pas équivalentes.

Enfin, pour montrer que les variétés obtenues sont spéciales, on peut remarquer que, *par construction*, si $a \in X$ est générique, l'image de X par la projection de centre $X_a(1)$ est une des variétés considérées dans l'énoncé précédent, associée à une quadrique \mathcal{Q} de rang $\mu' + 2 \geq 4$. On obtient ainsi toutes ces variétés sauf celles qui sont associées à une quadrique de rang 3. \square

Remarque 6.3. — Si $\mu' = 1$, le paramétrage (32) définit encore une variété spéciale de la classe $\mathcal{X}_{r+1,4}(5)$. Dans ce cas, on modifie la définition du système linéaire introduit dans l'énoncé. On considère à la place le système des hypersurfaces de degré 3 définies par une équation $F(T_0, T_1, S) = 0$, où $F(T_0, T_1, S)$ est de la forme (31). On reprend la démonstration précédente en associant à un 4-uplet *générique* de \mathbb{P}^{r+1} le point d'intersection q du \mathbb{P}^3 qu'il engendre avec le \mathbb{P}^{r-2} « sous-jacent » à la quadrique \mathcal{Q}' (qui est de rang 1) et la droite intersection de ce \mathbb{P}^3 avec le \mathbb{P}^{r-1} d'équations $T_0 = T_1 = 0$. Une application rationnelle définie par le système linéaire considéré envoie la cubique gauche qui passe par les points p_1, p_2, p_3 et p_4 et qui est tangente à cette droite au point q sur une courbe rationnelle normale de degré 5 et \mathbb{P}^{r+1} . On montre ainsi que (32) définit une variété spéciale.

6.3. Une variété spéciale de la classe $\mathcal{X}_{3,6}(9)$ et une de la classe $\mathcal{X}_{3,5}(7)$. — L'exemple suivant est curieux :

Proposition 6.4. — *La variété de Veronese de dimension 3 et d'ordre 3 est une variété standard de la classe $\mathcal{X}_{3,2}(3)$ et une variété spéciale de la classe $\mathcal{X}_{3,6}(9)$.*

En projetant cette variété V depuis un espace osculateur $V_a(1)$, on obtient une variété spéciale X de la classe $\mathcal{X}_{3,5}(7)$, indépendante, à équivalence près, du choix de $a \in V$.

Démonstration. — On sait déjà que V est un élément standard de $\mathcal{X}_{3,2}(3)$. Cette variété V engendre un espace de dimension $\pi_{2,2}(3) = 19$ et on a aussi $\pi_{2,6}(9) = 19$.

Soit $v : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^{19}$ un plongement de Veronese d'ordre 3, d'image V . Par six points en position générale dans \mathbb{P}^3 passe une unique cubique gauche et son image par v est une courbe rationnelle de degré 9. La variété V appartient donc à la classe $\mathcal{X}_{3,6}(9)$. Elle est spéciale dans cette classe, puisqu'elle est 3-régulière et que les variétés standards de cette classe ne le sont pas.

La deuxième partie de l'énoncé résulte de la première et du Théorème 3.14 \square

7. Appendice : propriétés des espaces osculateurs

On rappelle dans cet appendice quelques propriétés des espaces osculateurs qu'on utilise dans le corps de l'article, en général sans référence. Elles sont toutes élémentaires mais elles ne sont pas nécessairement familières au lecteur. On esquisse quelques démonstrations.

Soit X un germe en $x_0 \in \mathbb{C}^N$ de variété analytique lisse de dimension $d \geq 1$ et $k \geq 0$ un entier. Soit $v : (\mathbb{C}^d, p) \rightarrow (\mathbb{C}^N, x_0)$ un germe de paramétrage (régulier, c'est-à-dire de rang d) de X , avec $v(p) = x_0$. On vérifie facilement que l'espace vectoriel engendré par les vecteurs

$$(33) \quad \frac{\partial^\alpha v}{\partial t^\alpha}(p), \quad 1 \leq |\alpha| \leq k,$$

ne dépend pas du choix de v . L'espace osculateur (pour l'instant affine), ou plus simplement l'osculateur $X_{x_0}(k)$ de X à l'ordre k en x_0 est l'espace affine qui passe par le point x_0 et de direction cet espace vectoriel.

La dimension de $X_{x_0}(k)$ est évidemment au plus égale au cardinal de l'ensemble des multi-indices $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ dont la longueur est comprise entre 1 et k , ce qui donne :

$$(34) \quad \dim X_{x_0}(k) + 1 \leq \binom{d+k}{d}.$$

Le second membre est aussi la dimension de l'espace des polynômes de degré $\leq k$ en d variables ou celle de l'espace des polynômes homogènes de degré k en $d+1$ variables.

On dit que le germe X est k -régulier en x_0 si les deux membres de (34) sont égaux, autrement dit si la famille (33) est une famille libre.

L'osculateur $X_{x_0}(k)$ est engendré par les osculateurs $C_{x_0}(k)$ des germes de courbes lisses $C \subset X$ en x_0 . Pour le montrer, on peut supposer $x_0 = 0$ et que le paramétrage v est défini un voisinage de $p = 0$, soit $v(t) = \sum_{|\alpha|=1}^{+\infty} t^\alpha v_\alpha$. L'osculateur $X_0(k)$ est le sous-espace engendré par les vecteurs v_α avec $1 \leq |\alpha| \leq k$.

Si $c \in \mathbb{C}^d \setminus \{0\}$, l'image par v du germe de droite paramétrée par $\theta \mapsto \theta c$ est paramétrée par $\theta \mapsto \sum_{|\alpha|=1}^{+\infty} \theta^{|\alpha|} c^\alpha v_\alpha$. L'espace engendré par les osculateurs de ces courbes à l'ordre k en 0 contient donc les vecteurs $\sum_{|\alpha|=j} c^\alpha v_\alpha$ avec $j \in \{1, \dots, k\}$ et $c \in \mathbb{C}^r$. Il contient aussi leurs dérivées partielles par rapport à c , donc la famille des vecteurs v_α avec $1 \leq |\alpha| \leq k$, ce qui donne le résultat.

La notion d'osculateur est une notion projective : si une homographie $\phi : \mathbb{C}^N \dashrightarrow \mathbb{C}^N$ est définie au voisinage de x_0 , l'osculateur à l'ordre k du germe $\phi(X)$ en $\phi(x_0)$ est l'image par ϕ de celui de X en x_0 . La vérification directe pour une homographie générale peut-être un peu compliquée. Elle est très simple dans le cas où ϕ est un isomorphisme affine. On se ramène ainsi au cas où ϕ est tangente à l'identité en $0 \in \mathbb{C}^N$, i.e. est de la forme $\phi(x) = (1 + u(x))^{-1} x$, où u est une forme linéaire. La vérification est à nouveau facile.

Si $X \subset \mathbb{P}^N$ est un germe de variété lisse en $x_0 \in \mathbb{P}^N$, on note maintenant $X_{x_0}(k)$ son espace projectif osculateur à l'ordre $k \geq 0$ en x_0 .

Soit X une sous-variété algébrique irréductible de \mathbb{P}^N . Si $x \in X_{\text{reg}}$, il est clair, à partir de la définition, qu'on a $\dim X_{x'}(k) \geq \dim X_x(k)$ pour x' assez voisin de x . Soit m le maximum de la dimension de $X_x(k)$ quand x varie dans X_{reg} . L'ensemble $\{x \in X_{\text{reg}}, \dim X_x(k) = m\}$ est un ouvert dense de X et l'application $x \mapsto X_x(k)$ est analytique sur cet ouvert, à valeurs dans la grassmannienne des m -plans de \mathbb{P}^N . La démonstration est analogue à toute démonstration d'un résultat de ce type, quand il est facile à démontrer, ce qui est le cas ici.

On rappelle maintenant quelques propriétés qui jouent un rôle important dans cet article et qui, pour cette raison, méritent qu'on les énoncent. On a d'abord la propriété suivante.

Lemme 7.1. — Soit X un germe de variété lisse et k -régulier en $x_0 \in \mathbb{P}^N$. Tout germe $Y \subset X$ de variété lisse de dimension ≥ 1 en x_0 est k -régulier.

Démonstration. — Soit $d \geq 1$ la dimension de X et $1 \leq d' \leq d$ celle de Y . On peut choisir la paramétrisation $v : (\mathbb{C}^d, 0) \rightarrow (X, x_0)$ de X de telle façon que Y soit l'image du germe en 0 du sous-espace d'équations $t_j = 0$, $j = d' + 1, \dots, d$. La sous-famille des vecteurs (33) obtenue en se restreignant aux multi-indices α tels que $\alpha_j = 0$ pour $j > s$ est libre, ce qui donne le résultat. \square

Les espaces osculateurs se comportent comme on s'y attend par projection régulière :

Lemme 7.2. — Soit X un germe de variété lisse en $x_0 \in \mathbb{P}^N$ et $\pi : \mathbb{P}^N \dashrightarrow \mathbb{P}^M$ une projection dont le centre \mathbb{Q} est en somme directe projective avec $X_{x_0}(k)$. Alors $\pi(X)_{\pi(x_0)}(k) = \pi(X_{x_0}(k))$. En particulier, si le germe X est k -régulier en x_0 , son image est k -régulière en $\pi(x_0)$.

Démonstration. — Une récurrence sur la dimension de \mathbb{Q} permet de se ramener au cas où \mathbb{Q} est un point. On peut aussi supposer que $X_{x_0}(k)$ est contenu dans l'espace cible de la projection.

On se ramène ainsi à la situation suivante. La projection $\pi : \mathbb{C}^{N-1} \times \mathbb{C} \dashrightarrow \mathbb{C}^{N-1} \times \{0\}$ est définie par $(x', x_N) \mapsto (x'/(1 - x_N), 0)$ et au voisinage de $0 \in \mathbb{C}^{N-1} \times \mathbb{C}$, le germe X est donné par un paramétrage $v(t) = (v'(t), v_N(t))$ avec $v_N(t) = O(|t|^{k+1})$. Son image est alors donnée par un paramétrage $w(t) = (w'(t), 0)$ avec $w'(t) = v'(t) + O(|t|^{k+1})$, ce qui donne le résultat. \square

Dans le cas où X est une courbe, on étend le résultat précédent aux projections dont le centre rencontre cette courbe :

Lemme 7.3. — Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et C un germe de courbe lisse $(k+1)$ -régulier en $a \in \mathbb{P}^N$. Soit $\pi : \mathbb{P}^N \dashrightarrow H$ une projection de centre a et de cible un hyperplan H de \mathbb{P}^N tel que $a \notin H$. L'image par π de $C \setminus \{a\}$ se prolonge en un germe de courbe lisse k -régulier en $a' = C_a(1) \cap H$ et l'osculateur à l'ordre k de C' en a' est l'image par π de l'osculateur à l'ordre $k+1$ de C en a .

Démonstration. — On peut supposer $a = 0 \in \mathbb{C}^N$, que H est donné par $x_1 = 1$ et C par

$$x_j = x_1^j + O(x_1^{k+2}) \text{ si } j = 2, \dots, k+1, \quad x_j = O(x_1^{k+2}) \text{ si } j = k+2, \dots, N.$$

L'image C' de C est alors donnée par $x_1 = 1$ et pour $t \in \mathbb{C}$ voisin de 0 :

$$x_j = t^{j-1} + O(t^{k+1}) \text{ si } j = 2, \dots, k+1, \quad x_j = O(t^{k+1}) \text{ si } j = k+2, \dots, N.$$

\square

Encore quelques remarques à propos des courbes. Soit $C \subset \mathbb{P}^N$ une courbe algébrique irréductible et $k \in \mathbb{N}^*$ sa *régularité osculatrice*. On entend par là que C est k -régulière en au moins un point x_0 , donc au point générique, et n'est $(k+1)$ -régulière en aucun point. Soit $t \mapsto x(t)$ une paramétrisation régulière locale de C avec $x(0) = x_0$. Par hypothèse, pour $t \in \mathbb{C}$ voisin de 0, l'espace vectoriel $E(t)$ engendré par $x'(t), \dots, x^{(k)}(t)$ est de dimension k et on peut écrire

$$x^{(k+1)}(t) = \sum_{j=1}^k \lambda_j(t) x^{(j)}(t).$$

En dérivant et par récurrence, on obtient que, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $x^{(j)}(t) \in E(t)$ si t est assez petit. En particulier $x^{(j)}(0) \in E(0)$ pour tout $j \geq 1$ et, par analyticité, $C \subset E(0)$. On a donc :

La dimension de l'espace engendré par une courbe irréductible $C \subset \mathbb{P}^N$ est égale à sa régularité osculatrice.

Plus généralement on a :

Lemme 7.4. — Soit $k \geq 1$ la régularité osculatrice d'une courbe algébrique irréductible $C \subset \mathbb{P}^N$ et $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{N}$ des entiers tels que $k+1 = \sum_{i=1}^m (k_i+1)$. Pour tout m -uplet $(x_1, \dots, x_m) \in C^m$ générique, on a $\langle C \rangle = \bigoplus_{i=1}^m C_{x_i}(k_i)$.

Si C est une courbe rationnelle normale de degré k , on a la même conclusion dès que les points x_1, \dots, x_m sont deux-à-deux distincts.

Démonstration. — On a déjà établi le résultat pour $m = 1$. On obtient le cas général par récurrence, en projetant C sur un hyperplan depuis un point $a \in C$, tel que C est k -régulière en a , et en appliquant les lemmes précédents et l'hypothèse de récurrence. La démonstration de la seconde partie est analogue, compte tenu du fait qu'une courbe rationnelle normale C de degré k est k -régulière en chacun de ses points et que sa projection depuis l'un de ses points est une courbe rationnelle normale de degré $k - 1$. \square

Lemme 7.5. — Soit X un germe de variété lisse et k -régulier en $x \in \mathbb{P}^N$ et $Y \subset X$ un germe en x de variété de dimension s . L'espace $\langle Y \rangle \cap X_x(k)$ est de dimension $\geq \binom{s+k}{s} - 1$.

Démonstration. — Soit $(x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ une suite de points de Y_{reg} qui tend vers x . Pour ν assez grand, X est k -régulier en x_ν , donc Y l'est aussi. L'espace $\langle Y \rangle$ contient, pour tout ν , l'espace $Y_{x_\nu}(k)$, qui est de dimension $\binom{s+k}{s} - 1$. Comme toutes les valeurs d'adhérence de la suite $(Y_{x_\nu}(k))_{\nu \in \mathbb{N}}$ dans la grassmannienne adéquate sont contenues dans $\langle Y \rangle \cap X_x(k)$, on obtient le résultat. \square

Références

- [1] E. Bompiani, *Proprietà differenziali caratteristiche di enti algebrici*, Rom. Acc. L. Mem. **26** (1921), 452–474.
- [2] S.-S. Chern, P. A. Griffiths, *An inequality for the rank of a web and webs of maximum rank*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **5** (1978), 539–557.
- [3] F. Enriques, *Una questione sulla linearità dei sistemi di curve appartenenti ad una superficie algebrica*, Rom. Acc. L. Rend. **5** (1893), 3–8.
- [4] W. Fulton, *Intersection Theory (Second Edition)*, Springer, 1998.
- [5] S.G. Gindikin, *Integral geometry, twistors and generalized conformal structures*, J. Geom. Phys. **5** (1988), 19–35.
- [6] V.V. Goldberg, *Theory of multiodimensional $(n + 1)$ -web*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1988.
- [7] P. A. Griffiths, *Variations on a theorem of Abel*, Invent. Math. **35** (1976), 321–390.
- [8] T. Hangan, *Sur l'intégrabilité des structures tangentées produits tensoriels réels*, Ann. Mat. Pura Appl. **126** (1980), 149–185.
- [9] J. Harris, *A bound on the geometric genus of projective varieties*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **8** (1981), 35–68.
- [10] K. Kodaira, *A theorem of completeness of characteristic systems for analytic families of compact submanifolds of complex manifolds*, Annals of Math. **75** (1962), 146–162.
- [11] D. Mumford, *Algebraic Geometry I, Complex Analytic Varieties, die Grundlehren der mat. Wiss., Springer-Verlag*, 1976.
- [12] L. Pirio, J.-M. Trépreau, *Sur l'algébrisation des tissus de rang maximal*, en préparation.
- [13] F. Russo, communication à L. Pirio, 2008.
- [14] J.-M. Trépreau, manuscrit 2006 et *Une nouvelle caractérisation des variétés de Veronese*, 13 pages (2010), arXiv 1012.1008.

L. PIRIO ET J.-M. TRÉPREAU, L. PIRIO, IRMAR, UMR 6625 du CNRS, Université Rennes1, Campus de beaulieu, 35042 Rennes Cedex. • *E-mail* : luc.pirio@univ-rennes1.fr • J.-M. Trépreau, U.P.M.C., UMR 7586 du CNRS, bureau 26-16-5-21, 4 place Jussieu, 75005 Paris.
E-mail : trepreau@math.jussieu.fr