Задачи управления на бесконечном промежутке и устойчивость сопряженной переменной

Хлопин Д.В. (ИММ УрО РАН, Екатеринбург)

e-mail: khlopin@imm.uran.ru

Определения и обозначения. Пусть задано метрическое пространство $\mathbf{X} \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{R}^m$. Определим $\mathbf{T} \stackrel{\triangle}{=} \{t \in \mathbf{R} \,|\, t \geq 0\}$. Всюду на пространствах функций на $\mathbf{T}$ рассматривается компактно-открытая топология. В частности, введем $\mathfrak{X} \stackrel{\triangle}{=} C(\mathbf{T}, \mathbf{X})$. Обозначим также через Ω семейство тех функций $\omega \in C(\mathbf{T}, \mathbf{R})$, для которых $\lim_{t\to\infty} \omega(t) = 0$.

Управляемая система. Пусть дана управляемая система

$$\dot{x} = f(t, x, u),\ x(0) = 0,\ t \in \mathbf{T} \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{R}_{\geq 0},\ u \in P \in (comp)(\mathbf{R}^p). \qquad (1)$$

Условие **I** : Для всякого $t \in \mathbf{T}$ для всякой измеримой функции $u \in B([0,t], P)$ найдется единственное решение $\varphi_t(u) \in C([0,t], \mathbf{X})$. Более того, эта зависимость $u \mapsto \varphi_t(u)$ непрерывна для всех $n \in \mathbf{N}$.

Заметим, что это условие фактически гарантирует как единственность траектории, так и ее неуход на бесконечность за конечное время. С другой стороны для обеспечения этого условия достаточно принять:

Условие **Ia** : Условия Каратеодори, то есть: 1) для произвольных $(x, u) \in \mathbf{X} \times P$ функция $(f(t, x, u)|t \in \mathbf{T})$ измерима; 2) для каждого $t \in \mathbf{T}$ функция $(f(t, x, u)|(x, u) \in \mathbf{X} \times P)$ непрерывна;

Условие **Ib** : Для всякого $n \in \mathbf{N}$ найдется такая суммируемая функция $L : [0, n] \mapsto \mathbf{T}$, что функция $(f(t, x, u)|x \in \mathbf{X})$ липшицева по x с константой $L(t)$ для почти всех $t \in [0, n]$ и всех $u \in P$;

Условие **Ic** : условие продолжимости всех решений на $\mathbf{T}$, например условие подлинейного (по x) роста.

Введем множество $\mathfrak{U} \stackrel{\triangle}{=} B(\mathbf{T}, P)$. В силу условия **I** отображение, сопоставляющее всякому $u \in \mathfrak{U}$ его решение $\varphi(u) \in \mathfrak{X}$, непрерывно.

Задача управления. Пусть поставлена задача максимизации на траекториях (1) функционала

$$J(u) \stackrel{\triangle}{=} \int_{\mathbf{T}} g(t, \varphi(u)(t), u(t))dt \to \max, \qquad (2)$$

Для существования и непрерывности функционала J на допустимых парах $(u, \varphi(u))$ предположим:

Условие **II** : для g выполнены **Ia**) – **c**), а кроме того для некоторой функции $\omega \in \Omega$ при любых $u \in \mathfrak{U}$ выполнено

$$\int_T^\infty |g(t, \varphi(x)(t), u(t))|dt \leq \omega(T), \quad \forall T \in \mathbf{T}.$$

В частности теперь J ограничено сверху.

Определим функцию Гамильтона-Понтрягина $\mathcal{H} : \mathfrak{X}\times\mathbf{T}\times\mathfrak{U}\times\mathbf{R}\times\mathfrak{X}\mapsto\mathbf{R}$ правилом: $\mathcal{H}(x,t,u,\lambda,\psi) \stackrel{\triangle}{=} \psi' f(t,x,u(t))+\lambda g(t,x,u(t))$. Введем соотношения

$$\dot{x}(t) = f(t,x(t),u(t)); \tag{3}$$

$$\dot{\psi}(t) \in -\partial_x \mathcal{H}(x(t),t,u(t),\lambda,\psi(t)), \quad ||\psi(0)||^2 + \lambda^2 = 1; \tag{4}$$

$$\mathcal{H}(x(t),t,u(t),\lambda,\psi(t)) = \sup_{p\in P} \mathcal{H}(x(t),t,p,\lambda,\psi(t)). \tag{5}$$

Заметим, что в силу свойств **I,II** включение (4) полунепрерывно сверху, имеет измеримую мажоранту, а следовательно в силу [5, Теорема 4.1] всякое решение этих соотношений продолжимо на все $\mathbf{T}$.

Существование. Покажем в условиях $\mathbf{I}-\mathbf{II}$ существование оптимального решения, расширив множество управлений.

Пусть $\Pi([0,n],P)$ — оснащенное топологией *-слабой сходимости множество всех слабо измеримых отображений из $[0,n]$ в множество вероятностных мер Радона над P. Определим топологическое пространство $\Pi(\mathbf{T},P)$ как обратный предел ([6, III.1.30], [7, 2.5.6])

$$\Pi(\mathbf{T},P) = \varprojlim \mathbf{S} = \varprojlim \{\Pi([0,n],P), \pi^{[0,n]}_{[0,m]}, \mathbf{N}\}.$$

(здесь отрезки направлены отношением $\subset$ и $\pi^{K'}_{K''}(\eta) = \eta|_{K''}$ для всех $\eta \in \Pi(K',P)$). В частности элементы $\Pi(\mathbf{T},P)$ — такие функции η, что $\eta|_{[0,n]} \in \Pi([0,n],P)$ для всякого $n\in\mathbf{N}$, а множество $\mathcal{A}\subset\Pi(\mathbf{T},P)$ замкнуто, только если для всех $t\in\mathbf{T}$ образ $\pi_{[0.t]}(\mathcal{A})$ замкнут в $\Pi([0,t],P)$.

Каждой $\eta\in\Pi(\mathbf{T},P)$ можно сопоставить $\tilde{\varphi}(\eta)\in C(\mathbf{T},\mathbf{X})$ как решение уравнения

$$\dot{x} = \int_P f(\tau,x(\tau),u)\,\eta(t)(du), \;\; x(0) = x_0$$

и функционал $\tilde{J}(\eta) = \int_{\mathbf{T}}\int_P g(\tau,\tilde{\varphi}(\eta)(\tau),u)\,\eta(t)(du)\,dt$.

Как обратный предел компактов $\Pi([0,n],P)$ само $\Pi(\mathbf{T},P)$ также компакт (Теорема Куроша [6, III.1.13]). Также как $B([0,n],P)$ всюду плотно вкладывалось в $\Pi([0,n],P)$, теперь и $\mathfrak{U}$ всюду плотно вкладывается в $\Pi(\mathbf{T},P)$ ([6, III.1.27]), а отображения $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{J}$ являются фактически продолжениями по непрерывности функционалов φ и J с всюду плотного множества $\mathfrak{U}$ на компакт $\Pi(\mathbf{T},P)$. Отсюда обобщенная задача максимизировать функционал $\tilde{J}(\eta)$ является релаксацией исходной, то есть $\sup_{u\in\mathfrak{U}} J(u) = \max_{\eta\in\Pi(\mathbf{T},P)} \tilde{J}(\eta)$, у обобщенного аналога (2) в условиях $\mathbf{I}-\mathbf{II}$ найдётся оптимальное решение $\mu_0\in\Pi(\mathbf{T},P)$, всякому такому управлению можно сопоставить последовательность управлений $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}\in\mathfrak{U}^{\mathbf{N}}$, сходящуюся к μ_0 в $\Pi(\mathbf{T},P)$, а у всякой реализующей супремум J последовательности $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}\in\mathfrak{U}^{\mathbf{N}}$ найдется предельная точка, на которой реализуется максимум $\tilde{J}$.

Перейдя теперь к управлениям Гамкрелидзе (см. [1, 3]) можно обеспечить

Условие **III** ([1, (A2)]). Для всякого $(t,x) \in \mathbf{T} \times \mathbf{X}$ выпукло множество $\{(z', f(t,x,u)) \in \mathbf{R}^{m+1} \,|\, z \in \langle -\infty, g(t,x,u)], u \in P\}$.

Тогда будут замкнутыми образы $J_\tau(\mathfrak{U}))$ для всякого $\tau \in \mathbf{T}$ (здесь $J_\tau(u) \overset{\triangle}{=} \int_{[0,\tau]} g(t, \varphi(u)(t), u)dt)$, откуда следует компактность $J(\mathfrak{U}))$, тем самым показано

Следствие 1 ([8]) *В условиях* $\mathbf{I} - \mathbf{III}$ *для задачи (2) всегда существует оптимальное управление* $u \in \mathfrak{U} \overset{\triangle}{=} B(\mathbf{T}, P)$.

Аналогично можно ввести систему для обобщенных решений.

$$\dot{x}_*(t) = \int_P f(x_*(t), u)\eta(t)(du); \tag{6}$$

$$\dot{\psi}(t) \in -\int_P \partial_x \mathcal{H}(x_*(t), t, u_*(t), \lambda, \psi(t)) d\eta(t)(du), \quad ||\psi(0)||^2 + \lambda^2 = 1; \tag{7}$$

$$\int_P \mathcal{H}(x_*(t), t, u, \lambda, \psi(t))\eta(t)(du) = \sup_{p \in P} \mathcal{H}(x_*(t), t, p, \lambda, \psi(t)). \tag{8}$$

Рассмотрим множество ее всевозможных решений $(x, u, \lambda, \psi) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{U} \times \mathbf{R} \times \mathfrak{X}$ этой системы на $[0, n]$. Это множество компактно, поскольку выполнены условия продолжимости. Тогда компактно и множество всевозможных решений $(x, u, \psi, \psi_0) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{U} \times \mathfrak{X} \times \mathbf{R}$ обобщенной системы на $\mathbf{T}$. Обозначим его через $\tilde{\mathfrak{S}}$.

Предложение 1 *В условиях* $\mathbf{Iabc}, \mathbf{II}$ *если имеется оптимальное управление* $u_* \in \mathfrak{U}$ *и соответствующая ему* $x_* = \varphi(u_*)$, *то для некоторых* $\Psi_0 \in \mathbf{R}, \psi \in \mathfrak{X}$ *выполнено почти всюду на* $\mathbf{T}$ *(3),(4),(5).*

Доказательство.

Рассмотрим для всякого $n \in \mathbf{N}$ последовательность вспомогательных задач вида

$$\dot{x} = f(t, x, u), u \in P, t \in [0, n]$$

$$x(0) = 0, \; x(n) = x^*(n),$$

$$J_k = \int_{[0,n]} g(t, x(t), u(t))dt \to \max,$$

Тогда (x_n^*, u_n^*) — оптимальна для вспомогательной задачи, отсюда [4, теорема 5.2.1] для функции H при некоторых $\lambda_n \in \mathbf{R}, \psi_n \in C([0, n], \mathbf{R}^m)$ со свойством $\lambda_n + ||\psi_n(0)|| = 1$ при почти всех $t \in [0, n]$ выполнены соотношения (4), (5). Продолжим (x_n^*, u_n^*, ψ_n) с $[0, n]$ на $\mathbf{T}$ как решение (3),(4),(5) произвольным образом.

Заметим, дифференциальное включение (4) полунепрерывно сверху по фазовой переменной, интегрально ограничено на ограниченных множествах, тогда графики решения этого включения не покидают за конечное время компактного множества, а в виду ограниченности - равностепенно непрерывны на всяком временном отрезке. Аналогично, $u_n^*|_{[0,n]}$ можно погрузить в $\Pi([0,n],P)$, а u_n^* в $\Pi(\mathbf{T},P)$. Поскольку теперь кортежи $(x_n^*,u_n^*,\lambda_n,\psi_n)$ погружены в компакт $\tilde{\mathfrak{S}}$, то можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторому (x^*,η,Ψ_0,ψ). Однако заметим, что в силу (5) на промежутке $[0,n]$ точка $(g(t,x_n^*,u_n^*),f(x,u))$ лежит на границе множества из условия (**III**). Тогда в пределе точка $\int_P(g(t,x^*,u),f(x,u))\eta(t)(du)$ тоже лежит на границе множества из условия (**III**), следовательно может быт реализована дираковской мерой, то есть фактически управлением $u^*\in B(\mathbf{T},P)$. Но тогда $(x_n^*,u_n^*,\Psi_n^0,\psi_n)$ сходятся к (x^*,u^*,Ψ^0,ψ), и в силу замкнутости множества решений соотношений (3),(4),(5) эта четверка также им удовлетворяет. $\square$

Условия трансверсальности Соотношения (3),(4),(5) не содержат условия на правом конце. Есть несколько вариантов таких условий (подробнее см. [1, §1.6]), в данной работе исследуется

$$\lim_{t\to\infty}\psi(t)=0. \tag{9}$$

Условие **IV**: Для всякой оптимальной для задачи **IV** траектории x^0 для всякого решения $(x^0,u^0,\lambda^0,\psi^0)$ системы принципа максимума (3),(4),(5) найдется такая его окрестность Υ, в которой множитель Лагранжа ψ^0 устойчив, то есть для всякого $\varepsilon\in\mathbf{R}_{>0}$ найдётся такое $\delta\in\mathbf{R}_{>0}$ и $t\in\mathbf{T}$, что если для решения $(x,u,\lambda,\Psi)\in\Upsilon$ принципа максимума (3),(4),(5) выполнено $||\psi(t)-\psi^0(t)||<\delta$, $||x(t)-x^0(t)||<\delta$, $|\lambda-\lambda^0|<\delta$, то $||\psi(T)-\psi^0(T)||<\varepsilon$ имеет место для всех $T\in[t,\infty\rangle$.

Предложение 2 *В условиях* $\mathbf{Iabc},\mathbf{II}-\mathbf{IV}$ *для всякой неограниченно возрастающей последовательности моментов времени* $(\tau_n)_{n\in\mathbf{N}}\in\mathbf{T}^{\mathbf{N}}$. *найдется такая оптимальная для задачи (2) траектория* x^∞ *и такое решение* $(x^\infty,u^\infty,\lambda^\infty,\Psi^\infty)$ *соотношений принципа максимума (3),(4),(5), что выполнено*

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}||\Psi^\infty(\tau_n)||_m=0. \tag{10}$$

Доказательство. Зафиксируем некоторую неограниченно возрастающую последовательность моментов времени $(\tau_n)_{n\in\mathbf{N}}\in\mathbf{T}^{\mathbf{N}}$.

Рассмотрим задачу

$$J_{\tau_n}(u)\overset{\triangle}{=}\int_{[0,\tau_n]}g(t,\varphi(u)(t),u(t))dt\to\max.$$

Она имеет решение $u^n\in\mathcal{U}$, обозначим порожденную этим управлением траекторию через $x^n\in\Phi$.

Рассмотрим последовательность $(x^n)_{n\in\mathbf{N}}$. Она содержится в компакте Φ, следовательно имеет хотя бы один частичный предел $x^\infty\in\Phi$ в компактно-открытой топологии. Аналогично, прореживая последовательность управлений u^n, у нее можно также найти частичный предел u^∞, но уже в компакте $\Pi(\mathbf{T},P)$. Более того, поскольку выполнено (1) при всяком $n\in\mathbf{N}$

для пары (x^n, u^n) на промежутке $[0, \tau_n]$, то для пределов можно обеспечить $x^\infty = \tilde{\varphi}(u^\infty)$.

Далее, поскольку все x^n оптимальны в своих задачах, то для каждого на $[0, \tau_n]$ выполнен принцип максимума (3),(4),(5), причем с тем же самым гамильтонианом, что и для исходной задачи. В частности для некоторых множителей Лагранжа $\lambda^n \in \mathbf{R}, \Psi^n \in C([0, n], \mathbf{R}^m)$ на $[0, \tau_n]$ имеют место соотношения принципа максимума при подстановке $x^* = x^n$, $u^* = u^n$. Кроме того, имеет место условие трансверсальности на правом конце: $\Psi^n(\tau_n) = 0$.

Множество пар (λ^n, Ψ^n) содержится в компакте, следовательно имеет предельную точку. Очередной раз прореживая последовательность, можно считать, что она сходится. Поскольку соотношения принципа максимума полунепрерывно сверху зависят от x, ψ, u, то этот предел $(\lambda^\infty, \psi^\infty)$ вместе с оптимальными x^∞, u^∞ также удовлетворяет принципу максимума. В частности, в силу условия **III** тогда можно считать, что $u^\infty \in \mathfrak{U}$.

Заметим, что (u^∞, x^∞) оптимальна, действительно, исходная задача имеет некоторое оптимальное управление u^0, а в силу оптимальности u^n выполнено $J_{\tau_n}(u^n) \geq J_{\tau_n}(u^0)$, но левая часть неравенства сходится к $\tilde{J}(u^\infty)$, тогда как правая часть сходится к оптимальному решению исходной задачи $J(u^0)$.

Теперь в некоторой окрестности $(x^\infty, u^\infty, \lambda^\infty, \psi^\infty)$ выполнено условие **IV**, в частности на нашей последовательности. Рассмотрим произвольное $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$, согласно **IV** возьмем δ и t. Поскольку найдется такой номер $N \in \mathbf{N}$, что при $n > N$ выполнено $||\psi^n(t) - \psi^\infty(t)|| < \delta$, то из **IV** следует $||\psi^n(T) - \psi^\infty(T)|| < \varepsilon$ для всех $T \in [t, \infty\rangle$. В частности $||\psi^n(\tau_n) - \psi^\infty(\tau_n)|| < \varepsilon$ для всех $\tau_n \in [t, \infty\rangle, n > N$, то есть для всех n начиная с некоторого номера N'. Но $\psi^n(\tau_n) = 0$ для всех $n \in \mathbf{N}$, отсюда $||\psi^\infty(\tau_n)|| < \varepsilon$ для всех $n > N'$. В силу произвольности $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ (10) показано. □

Заметим, что условие **IV** следует из такого условия:

Условие **IV**$'$: Для всякой оптимальной для задачи (2) траектории x^0 для всякого решения $(x^0, u^0, \lambda^0, \psi^0)$ системы принципа максимума (3),(4),(5) существует предел $\lim_{t\to\infty} \psi^0(t)$, кроме того этот предел равномерен в целой окрестности для решений (3),(4),(5), то есть найдутся такие функция $\omega_1 \in \Omega$ и окрестность Υ точки $(x^0, u^0, \lambda^0, \psi^0)$, что для всякого решения $(x, u, \lambda, \Psi) \in \Upsilon$ принципа максимума (3),(4),(5) для всех $s \in \mathbf{T}$ $\lim_{t\to\infty} ||\psi(t) - \psi(s)|| \leq \omega_1(s)$.

(Действительно, в этих условиях у близкого к оптимальному решения автоматически на бесконечности имеется предел, в силу равномерности стремления к этому пределу $||\psi(T) - \psi^0(T)||$, $||\psi(\infty) - \psi^0(\infty)||$ отличаются не более чем на $2\omega_1(T)$ на целой окрестности, осталось для $\delta = \omega_1(t)$ присвоить $\varepsilon = \max_{T>t} \omega_1(T)$).

Следствие 2 *В условиях* $\mathbf{Iabc}, \mathbf{II}, \mathbf{III}, \mathbf{IV}'$ *найдется такая оптимальная для задачи (2) траектория* x^∞ *и такое решение соотношений принципа максимума* $(x^\infty, u^\infty, \lambda^\infty, \Psi^\infty)$*, что выполнено (9).*

Доказательство. Пусть не так, тогда поскольку предел $\lim_{t\to\infty} \psi^\infty(t)$ существует для всех интересующих нас ψ^∞, то он отличен от нуля. Тогда, применяя предложение, получаем противоречие. □

Условие **V**: Для всякой оптимальной для задачи (2) траектории x^0 для всякого решения $(x^0, u^0, \lambda^0, \psi^0)$ системы (3),(4),(5) найдется такая его окрестность Υ, в которой для всякого решения $(x^0, u^0, \lambda, \Psi) \in \Upsilon$ соотношений (3),(4) множитель Лагранжа ψ устойчив для системы (3),(4).

Предложение 3 *В условиях* $\mathbf{Iabc}, \mathbf{II} - \mathbf{III}, \mathbf{V}$ *для всякой неограниченно возрастающей последовательности моментов времени* $(\tau_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{T}^{\mathbf{N}}$ *для всякой оптимальной для задачи (2) пары* (x^∞, u^∞) *найдется такое решение соотношений принципа максимума* $(x^\infty, u^\infty, \lambda^\infty, \Psi^\infty)$, *что выполнено (10)*

Доказательство.

Пространство $\Pi(\mathbf{T}, P)$ является метризуемым, зафиксируем на нем некоторую метрику. Аналогично сделаем для $\mathbf{X}$.

Каждому решению $(x^\infty, u^\infty, \lambda^\infty, \psi^\infty)$ системы (3),(4),(5) согласно **V** можно сопоставить свою окрестность Υ. Всевозможные такие окрестности образуют покрытие $\mathfrak{S}$. Поскольку последнее множество компактно, то из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие $\mathfrak{S}'$, а расстояние от $\mathfrak{S}$ до до границы $\mathfrak{S}'$ будет не меньше некоторого $\varkappa \in \mathbf{R}_{>0}$.

Зафиксируем произвольную оптимальную для задачи (2) пару (x^∞, u^∞). Рассмотрим для каждого $n \in \mathbf{N}$ задачу

$$J_n(u) \triangleq \int_{[0,\infty\rangle} g(t, \varphi(u)(t), u(t)) - \frac{1}{n} e^{-t} ||u(t) - u^\infty(t)|| dt \to \max. \qquad (11)$$

Ясно, что только пара (x^∞, u^∞) является оптимальной для этой задачи. Обозначим через $\mathfrak{S}_n$ множество четверок $(x^\infty, u^\infty, \lambda^n, \psi^n))$, удовлетворяющих (3),(4) и

$$u^\infty(t) \in arg \max_{p\in P} \big(\mathcal{H}(x^n(t), t, p, \lambda, \psi(t)) - \frac{1}{n} e^{-t} ||p - u^\infty(t)||\big). \qquad (12)$$

Заметим, что все $\mathfrak{S}_n$ замкнуты, а поскольку содержатся в компакте, то и компактны.

Поскольку соотношение (12) также полунепрерывно сверху зависит от коэффициента перед последним слагаемым, все соотношения ограничены на ограниченных множествах, а множество из (12) имеет сильный селектор, то в силу [5, теорема 4.3.3] имеет место для пучков решений (3),(4),(12) полунепрерывность сверху уже по коэффициенту перед последним слагаемым. В частности верхний предел компактов $\mathfrak{S}_n$ вложен в $\mathfrak{S}$. Следовательно, начиная с некоторого номера $N \in \mathbf{N}$, для всех $\mathfrak{S}_n$ будет являться покрытием конечное покрытие $\mathfrak{S}'$. Тогда для каждого $n > N$ для новой задачи (**??**) выполнено условие **IV**.

Рассмотрим некоторую неограниченно возрастающую последовательность моментов времени $(\tau_k)_{k\in\mathbf{N}} \in \mathbf{T}^{\mathbf{N}}$.

Теперь по предыдущему предложению для каждого $n \in \mathbf{N}$ при некотором $(x^\infty, u^\infty, \lambda^n, \psi^n) \in \mathfrak{S}_n$ выполнено $\underline{\lim}_{k\to\infty} \psi^n(\tau_k) = 0$. Кроме того, по уже показанному последовательность $(x^\infty, u^\infty, \lambda^n, \psi^n)_{n\in\mathbf{N}}$ имеет предельную точку $(x^\infty, u^\infty, \lambda^n, \psi^n) \in \mathfrak{S}$.

Рассмотрим произвольное $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$, по условию $\mathbf{V}$ найдутся такие $\delta \in \mathbf{R}_{>0}$ и $t \in \mathbf{T}$, что из $||\psi^n(t) - \psi^\infty(t)|| < \delta$ следует $||\psi^n(T) - \psi^\infty(T)|| < \varepsilon$ для всех $T \in [t, \infty\rangle$. Поскольку для $(\psi^n)_{n\in\mathbf{N}}$ точка ψ^∞ — предельная, то для некоторого $N \in \mathbf{N}$ $||\psi^N(t) - \psi^\infty(t)|| < \delta$, то есть $||\psi^N(T) - \psi^\infty(T)|| < \varepsilon$. Тогда $\underline{\lim}_{k\to\infty}\psi^\infty(\tau_k) < \varepsilon$. В силу произвольности $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ показано (10). $\Box$

Аналогично, условие $\mathbf{V}$ следует из такого условия:

Условие $\mathbf{V}'$: Для всякой оптимальной для задачи (2) траектории x^0 для всякого решения $(x^0, u^0, \lambda^0, \psi^0)$ системы принципа максимума (3),(4),(5) существует предел $\lim_{t\to\infty}\psi^0(t)$, кроме того этот предел равномерен в целой окрестности для решений (3),(4), то есть найдутся такие функция $\omega_1 \in \Omega$ и окрестность Υ точки $(x^0, u^0, \lambda^0, \psi^0)$, что для всякого решения $(x, u, \lambda, \Psi) \in \Upsilon$ принципа максимума (3),(4) для всех $s \in \mathbf{T}$ $\lim_{t\to\infty}||\psi(t) - \psi(s)|| \leq \omega_1(s)$.

Следствие 3 *В условиях* $\mathbf{Iabc}, \mathbf{II}, \mathbf{III}, \mathbf{V}'$ *найдется такая оптимальная для задачи (2) траектория* x^∞ *и такое решение соотношений принципа максимума* $(x^\infty, u^\infty, \lambda^\infty, \Psi^\infty)$*, что выполнено (9).*

Одно из самых общих условий на (9) показано в [9, Theorem 6.1]. Если ограничиться лишь задачей управления без фазовых ограничений, то, поскольку условие **IV'** следует из условий [9, Theorem 3.1] в силу [9, Lemm 3.1], то и основной результат статьи [9] вкладывается в следствие 3.

Заметим, что при быстро убывающей функции ω из свойства **II** многие множители Лагранжа будут удовлетворять (9) и само по себе это условие не позволит выделить существенно меньшее семейство экстремалей. Однако, как замечено в [9, Theorem 8.1], это можно исправить ([9, Example 10.2]) усилив свойство (9).

Заметим, что в условиях предложений 2,3 показано большее, что удовлетворяющий (10) множитель Лагранжа Ψ является пределом отображений Ψ_n, зануляющихся на все больших моментах времени. В частности

Следствие 4 *В условиях* $\mathbf{I} - \mathbf{III}, \mathbf{IV}'$ *найдется такая оптимальная для задачи (2) пара* (u^∞, x^∞) *и такое решение соотношений принципа максимума* $(x^\infty, u^\infty, \lambda^\infty, \Psi^\infty)$*, что выполнено (9) и для некоторой возрастающей последовательности* $(T_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{T}^{\mathbf{N}}$ *имеется сходящаяся к* $(x^\infty, u^\infty, \lambda^\infty, \Psi^\infty)$ *последовательность* $(x^n, u^n, \lambda^n, \Psi^n)_{n\in\mathbf{N}}$ *решений (3),(4),(5) со свойством* $\Psi^n(T_n) = 0$.

Следствие 5 *В условиях* $\mathbf{I} - \mathbf{III}, \mathbf{V}'$ *для всякой оптимальной для задачи (2) пары* (u^∞, x^∞) *найдется такое решение соотношений принципа максимума* $(x^\infty, u^\infty, \lambda^\infty, \Psi^\infty)$*, что выполнено (9) и для некоторой возрастающей последовательности* $(T_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{T}^{\mathbf{N}}$ *имеется сходящаяся к* $(x^\infty, u^\infty, \lambda^\infty, \Psi^\infty)$ *последовательность* $(x^n, u^n, \lambda^n, \Psi^n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathfrak{S}^{\mathbf{N}}$ *решений (3),(4) со свойством* $\Psi^n(T_n) = 0$.

З а м е ч а н и е 1 *Заметим, что если в условиях двух последних следствий потребовать также равномерную ограниченность x на оптимальных траекториях, то кроме (9) автоматически будет выполнено также более тонкое условие транверсальности*

$$\lim_{t\to\infty} \Psi^{\infty}(t)' x^{\infty}(t) = 0.$$

Заметим также, что если для элементов так построенной последовательности $(x^n, u^n, \lambda^n, \Psi^n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathfrak{S}^{\mathbf{N}}$ выполнены достаточные условия оптимальности, то всякая ее предельная точка является оптимальным решением (2).

Для распространения результатов типа предложения 2 на случай задач с фазовыми ограничениями основной сложностью по-видимому будет доказательство того, что пучок условий принципа максимума замкнут.

Список литературы

[1] *Асеев С.М., Кряжимский А.В.* Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста // Труды Математического Института им. В.А.Стеклова. 2007. Т. 257., С. 1-271.

[2] *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. — М.: Наука, 1977. —623 с.

[3] *Гамкрелидзе Р.В.* Основы оптимального управления.— Тбилиси: Изд-во Тбилисского университета, 1977. —254 с.

[4] *Кларк Ф.* Оптимизация и негладкий анализ. – М.: Наука, 1988.

[5] *Толстоногов А.А.* Дифференциальные включения в банаховом пространстве. — Наука 1986.

[6] *Филиппов В. В., Федорчук В. В.* Общая топология. Основные конструкции. — М.: Физматлит, 2006. — 336 с.

[7] *Энгелькинг Р.* Общая топология. — М.: Мир, 1986.

[8] *Balder E.J.* An existence result for optimal economic growth problems // J. of Math.Anal. 1983. V. 95. № 1. P. 195-213;

[9] *Seierstad A.* Necessary conditions for nonsmooth, infinite-horizon optimal control problems // JOTA. 1999. Vol. 103. No. 1. P. 201–230.