

# БИФУРКАЦИОННЫЕ ДИАГРАММЫ НА ИЗОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ УРОВНЯХ ГИРОСТАТА КОВАЛЕВСКОЙ–ЯХЬЯ<sup>1</sup>

М.П. Харламов, И.И. Харламова, Е.Г. Шведов

Волгоградская академия государственной службы  
Россия, 400131, Волгоград, ул. Гагарина, 8  
E-mail: mharlamov@vags.ru

Получено 01 июля 2010 г.

Предложен новый взгляд на классификацию бифуркационных диаграмм и условия существования критических движений интегрируемой задачи о движении тяжелого гиростата при условиях типа Ковалевской (случай интегрируемости Х.М. Яхья). Построено разделяющее множество на плоскости «энергия-гиростатический момент», классифицирующее диаграммы на изоэнергетических уровнях. Выписаны конструктивно проверяемые условия существования критических движений в терминах параметров на поверхностях, несущих листы бифуркационных диаграмм.

## 1 Постановка задачи

Случаем Ковалевской–Яхья называют задачу о движении тяжелого гиростата, главные моменты инерции которого удовлетворяют отношению 2:2:1, центр масс лежит в экваториальной плоскости, а гиростатический момент направлен по оси динамической симметрии. Подходящим выбором осей и единиц измерения уравнения движения приводятся к виду

$$\begin{aligned} 2\dot{\omega}_1 &= \omega_2(\omega_3 - \lambda), & 2\dot{\omega}_2 &= -\omega_1(\omega_3 - \lambda) - \alpha_3, & \dot{\omega}_3 &= \alpha_2, \\ \dot{\alpha}_1 &= \alpha_2\omega_3 - \alpha_3\omega_2, & \dot{\alpha}_2 &= \alpha_3\omega_1 - \alpha_1\omega_3, & \dot{\alpha}_3 &= \alpha_1\omega_2 - \alpha_2\omega_1, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\lambda \geq 0$ . Фазовое пространство  $\mathcal{P}^5 = \mathbb{R}_\omega^3 \times S_\alpha^2$  определено в  $\mathbb{R}^6$  геометрическим интегралом  $|\alpha^2| = 1$ . Система (1) была проинтегрирована П.В. Харламовым на трехмерных подмногообразиях, состоящих из периодических решений и их бифуркаций [1, 2]. Х.М. Яхья указал, в дополнение к классическим интегралам энергии и площадей, новый интеграл типа Ковалевской, получив полную инволютивную систему [3]

$$\begin{aligned} H &= \omega_1^2 + \omega_2^2 + \frac{1}{2}\omega_3^2 - \alpha_1, & L &= 2(\omega_1\alpha_1 + \omega_2\alpha_2) + (\omega_3 + \lambda)\alpha_3, \\ K &= (\omega_1^2 - \omega_2^2 + \alpha_1)^2 + (2\omega_1\omega_2 + \alpha_2)^2 + 2\lambda[(\omega_3 - \lambda)(\omega_1^2 + \omega_2^2) + 2\omega_1\alpha_3]. \end{aligned} \quad (2)$$

Исследование множества критических точек отображения, порожденного функциями (2), начато в [4, 5, 6] и завершено в работах [7, 8]. Как оказалось, это множество исчерпывается решениями П.В. Харламова. В [7, 8] получены и уравнения бифуркационных поверхностей, т.е. связных поверхностей  $\Pi_j$  в  $\mathbb{R}^3(h, \ell, k)$ , объединение которых содержит в себе бифуркационную диаграмму  $\Sigma$  интегралов (2) как собственное подмножество<sup>2</sup>. Пересечение  $\Sigma_j = \Sigma \cap \Pi_j$  будем называть *допустимой областью* на бифуркационной поверхности  $\Pi_j$ .

В работах [9, 10, 11] исследовалась эволюция сечений  $\mathcal{S}_\ell$  множества  $\Sigma$  плоскостями  $\ell = \text{const}$ , которые с точки зрения гамильтоновой механики служат бифуркационными диаграммами приведенных систем с двумя степенями свободы, параметризованных постоянной площадью. В работе [12] указана топология регулярных интегральных многообразий для точек  $(h, \ell, k)$  из связных компонент  $\mathbb{R}^3 \setminus \Sigma$ . Все перечисленные объекты и свойства зависят от одного свободного параметра – величины гиростатического момента  $\lambda$ . В связи с этим в работе [13] исследована зависимость диаграммы  $\mathcal{S}_\ell(\lambda)$  от *двух* параметров  $(\ell, \lambda)$  и на плоскости этих параметров построено множество, при пересечении точек которого меняется тип  $\mathcal{S}_\ell(\lambda)$ . Кроме

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 10-01-00043.

<sup>2</sup>Здесь и далее постоянные первых интегралов обозначаются строчными буквами, соответствующими обозначениям самих интегралов как функций на фазовом пространстве.

того, в [13] для нулевой постоянной площадей построено множество в плоскости  $(\lambda, h)$ , классифицирующее типы графов Фоменко на трехмерных изоэнергетических уровнях, вычислены эти графы и соответствующие неоснащенные молекулы. Описание всех графов и молекул, включая случай  $\ell \neq 0$ , приведено в работе [14]. Совокупность результатов по топологическим инвариантам случая Ковалевской–Яхья подробно изложена в [15, гл. 9]. Наиболее полное исследование бифуркационных диаграмм содержится в [16], где, в частности, в терминах некоторых вспомогательных параметров решена представляющаяся аналитически наиболее сложной задача определения допустимых областей на бифуркационных поверхностях (см. [16, §5.3]).

Цель настоящей работы – основываясь на перечисленных результатах, построить атлас бифуркационных диаграмм двух интегралов  $G = L^2, K$  на четырехмерных изоэнергетических уровнях  $E_h(\lambda) = \{H = h\} \subset \mathcal{P}^5$ . Вводя вместо функции  $L$  ее квадрат, мы искусственно добавляем в каждую плоскую диаграмму замыкающий ее отрезок прямой  $g = 0$ . Такая постановка связана с тем, что только интеграл  $G$  имеет аналог в общем случае А.Г. Реймана–М.А. Семенова-Тян-Шанского [17]. В частности, полученные ниже результаты являются необходимым дополнением к классификации бифуркационных диаграмм на изоэнергетических уровнях (пятимерных, ввиду отсутствия симметрии) волчка и гиростата типа Ковалевской в двойном силовом поле [18, 19, 20]. Таким образом, будет решена задача классификации по параметрам  $h, \lambda$  бифуркационных диаграмм  $\Sigma_h(\lambda)$  ограничения отображения  $G \times K$  на подмногообразии  $E_h(\lambda)$ .

Понимая под *атласом* объектов полное описание классифицирующего (разделяющего) множества в пространстве параметров и возможность указания для каждой неразделяющей точки этого пространства структурно устойчивого типа самого объекта, потребуем еще наличия диалоговой компьютерной системы, которая позволяет осуществить *визуализацию и детализацию* разделяющего множества и объекта при интерактивном изменении параметров. Пример такой системы реализован для диаграмм волчка в двойном поле по параметрам  $(h, \gamma)$ , где  $\gamma$  – отношение напряженностей силовых полей [21]. Здесь возникает следующая проблема. Пусть  $\Pi_j$  – одна из поверхностей, несущих диаграмму  $\Sigma(\beta)$ , где  $\beta$  – физический параметр задачи ( $\beta = \lambda$  для гиростата Ковалевской–Яхья и  $\beta = \gamma$  для волчка в двойном поле). Предположим, что уравнения для  $\Pi_j$  записаны в параметрическом виде, необходимом для построения изоэнергетических сечений, т.е.  $g, k$  выражены в зависимости от  $h$  и некоторой второй координаты  $s$ . Для построения диаграмм с помощью компьютера необходимо иметь алгоритм, позволяющий по любому  $h$  вычислить промежутки *фактического* изменения параметра  $s$  в допустимой области. Для волчка в двойном поле такой алгоритм реализован в [21] путем указания допустимых областей на бифуркационных поверхностях неравенствами, в которых  $h$  выступает в роли параметра. Для гиростата Ковалевской–Яхья эта проблема до сих пор не решена даже для диаграмм  $\mathcal{S}_\ell(\lambda)$ , что с вычислительной точки зрения равносильно нашей постановке, поскольку в параметрических уравнениях  $h$  и  $g = \ell^2$  оказываются связанными линейно. В настоящей работе получена вся необходимая информация для компьютерной визуализации диаграмм гиростата Ковалевской–Яхья.

## 2 Критическое множество и бифуркационные поверхности

Опираясь на результаты П.Е. Рябова и И.Н. Гашененко, представим множество критических точек отображения  $J = H \times G \times K : \mathcal{P}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3(h, g, k)$  в виде трех критических подсистем – трехмерных инвариантных подмногообразий  $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$  в фазовом пространстве. Их образы под действием  $J$  лежат на трех бифуркационных поверхностях, уравнения которых запишем в форме, вытекающей из представления Лакса [17] при анализе особенностей возникающей алгебраической кривой. Вводя параметр  $s$  как удвоенный квадрат спектрального параметра на кривой, получим (подробности см. в работе [20] для более общего случая):

$$\Pi_1 : \begin{cases} g = (h - \frac{\lambda^2}{2} - s)s^2, \\ k = 1 + (h - \frac{\lambda^2}{2})^2 - 4(h - \frac{\lambda^2}{2})s + 3s^2, \end{cases} \quad (3)$$

$$\Pi_2, \Pi_3 : \begin{cases} g = \frac{1}{2}(h + \frac{\lambda^2}{2}) - \lambda^2 s^2 - \frac{1}{4s}, \\ k = -2\lambda^2(h - \frac{\lambda^2}{2} - 2s) - \lambda^4 + \frac{1}{4s^2}. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь  $s \in \mathbb{R}$  для  $\Pi_1$ ,  $s < 0$  для  $\Pi_2$  и  $s > 0$  для  $\Pi_3$ . В отличие от двойного поля, поверхность  $\Pi_1$  имеет одну компоненту.

Движения на  $\mathcal{M}_1$  соответствуют решению, построенному в [1] для произвольного осесимметричного тензора инерции. Предполагая в этом решении выполненными такие же условия на физические параметры, как в системе (1), и выбирая на  $\Pi_1$  точку, заданную уравнениями (3) с параметрами  $h, s$ , будем иметь

$$\begin{aligned} \omega_1 &= p_0, & \omega_2 &= 0, & \omega_3 &= r, \\ \alpha_1 &= p_0^2 + \frac{1}{2}r^2 - h, & \alpha_2 &= R, & \alpha_3 &= -p_0(r - \lambda), \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} p_0^2 &= h - \frac{\lambda^2}{2} - s, \\ R^2 &= -\frac{1}{4}r^4 - (2p_0^2 - h)r^2 + 2\lambda p_0^2 r + 1 - (p_0^2 - h)^2 - p_0^2 \lambda^2. \end{aligned}$$

Движения на  $\mathcal{M}_2$  и  $\mathcal{M}_3$  описываются решением П.В. Харламова, найденным в работе [2]. При заданных  $h, s$  и  $g$ , удовлетворяющих (4), введем следующие обозначения

$$\begin{aligned} \varkappa^2 &= g + \lambda^2 s^2, & \rho^2 &= 1 - \frac{2\varkappa^2}{s}, & Z^2 &= \frac{1}{2} \left[ \left( X + \frac{\lambda}{\varkappa} \right)^2 + \left( \rho Y + \frac{\sqrt{g}}{s\varkappa} \right)^2 - 1 \right], \\ (X, Y) &= \begin{cases} (\cos \sigma, \sin \sigma), & \rho^2 \geq 0 \\ (\operatorname{ch} \sigma, i \operatorname{sh} \sigma), & \rho^2 < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Здесь  $i$  – мнимая единица,  $\sigma$  – вспомогательная переменная. Многообразия  $\mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$  описываются уравнениями

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -\frac{\sqrt{g}}{s} - \varkappa \rho Y, & \omega_2 &= -\rho \sqrt{s} Z, & \omega_3 &= \lambda + 2\varkappa X, \\ \alpha_1 &= \frac{\lambda s X + \sqrt{g} \rho Y}{\varkappa} - 2\varkappa^2 Y^2, & \alpha_2 &= -2\varkappa Y \sqrt{s} Z, & \alpha_3 &= \frac{\sqrt{g} X - \lambda s \rho Y}{\varkappa}, \end{aligned} \quad (6)$$

а динамика задана уравнением  $\dot{\sigma}^2 = \operatorname{sgn}(\rho^2) s Z^2$ . При этом  $s < 0$  для  $\mathcal{M}_2$  и  $s > 0$  для  $\mathcal{M}_3$ .

### 3 Бифуркационные диаграммы критических подсистем и существование движений

Особым случаям *внутри* критических подсистем отвечают особенности поверхностей (3), (4). Геометрия этих поверхностей достаточно хорошо изучена в работах [5, 7, 8, 16]. Нам понадобятся уточнения, связанные с условиями существования критических движений. Имеется три кривые, по которым  $\Pi_1$  пересекается с объединением  $\Pi_2 \cup \Pi_3$  трансверсально. В части, принадлежащей  $\Sigma$ , обозначим их через  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$  (необходимые формулы будут даны ниже). Кроме этого, поверхность  $\Pi_1$  касается  $\Pi_3$  по кривой, пересечение которой с  $\Sigma$  обозначим через  $\delta_0$ .

**Замечание 1** (1). *Указанные кривые и возникающие на них узловые точки, будучи одними и теми же объектами в  $\mathbb{R}^3(h, g, k)$ , получают различное представление в координатах на поверхностях  $\Pi_j$ . Несмотря на это, их образы в  $(s, h)$ -плоскостях будем для наглядности обозначать одинаково.*

По определению  $g \geq 0$ , поэтому в границы допустимых областей всегда входят линии пересечения  $\Pi_j$  с плоскостью  $g = 0$ . Обозначим соответствующие кривые через  $\gamma_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ).

Введем следующую систему обозначений. Представляя кривую  $\gamma_j \subset \Pi_j$  в соответствующей  $(s, h)$ -плоскости, рассмотрим ее уравнение  $h = h(s)$ . Если в заданных пределах изменения  $h$  решение относительно  $s$  единственно, то обозначим его через  $\xi_j(h, \lambda)$ . Если же этих решений два, то обозначим их через  $\xi_j^-(h, \lambda) < \xi_j^+(h, \lambda)$ . Каждая из кривых  $\delta_i$  может отображаться в различных  $(s, h)$ -плоскостях. Проведем сечение образа  $\delta_i$  в  $(s, h)$ -плоскости, отвечающей поверхности  $\Pi_j$ , на заданном уровне  $h$ . Если на рассматриваемой ветви кривой точка пересечения единственна, то ее  $s$ -координату обозначим через  $\eta_{ij}(h, \lambda)$ . Если же таких точек две, то их  $s$ -координаты обозначим через  $\eta_{ij}^-(h, \lambda) < \eta_{ij}^+(h, \lambda)$ .

Рассмотрим систему  $\mathcal{M}_1$  с точки зрения условий существования вещественных движений.

**Предложение 1** (1). *При заданных  $s, h$  вещественные решения (5) существуют тогда и только тогда, когда  $p_0^2 \geq 0$  и  $R^2(r) \geq 0$  для некоторого  $r \in \mathbb{R}$ .*

Бифуркациям решений (5) отвечают точки  $(s, h)$ , в которых либо  $p_0 = 0$ , либо многочлен  $R^2(r)$  имеет кратный корень. Выбирая, следуя работе [7], этот корень в качестве параметра, на дискриминантном множестве будем иметь

$$h = \varphi_{\pm}(r) = \frac{1}{2} \left[ r(\lambda - r) \pm \frac{2r - \lambda}{r - \lambda} D \right], \quad s = \psi_{\pm}(r) = \frac{1}{2} [\lambda(r - \lambda) \pm D], \quad (7)$$

$$D = \sqrt{r^2(r - \lambda)^2 + 4} \geq 0.$$

Из предложения 1 получим следующее утверждение.

**Предложение 2 (2).** *Бифуркационная  $(s, h)$ -диаграмма критической системы  $\mathcal{M}_1$  состоит из следующих множеств:*

$$\begin{aligned} \gamma_1 : \quad & h = s + \frac{\lambda^2}{2}, \quad s \geq -1 - \frac{\lambda^2}{2}; \\ \delta_1 : \quad & h = \varphi_-(r), \quad s = \psi_-(r), \quad r \in [0, \lambda]; \\ \delta_2 : \quad & h = \varphi_+(r), \quad s = \psi_+(r), \quad r \in (-\infty, 0]; \\ \delta_3 : \quad & h = \varphi_+(r), \quad s = \psi_+(r), \quad r \in (\lambda, +\infty). \end{aligned}$$

При этом внешними границами области существования движений служат кривые  $\gamma_1, \delta_1$  и  $\delta_3$ .

Диаграмма системы  $\mathcal{M}_1$  показана на рис. 1, а. Здесь и далее на аналогичных рисунках звездочкой отмечены связные компоненты дополнения диаграммы, не входящие в допустимую область.

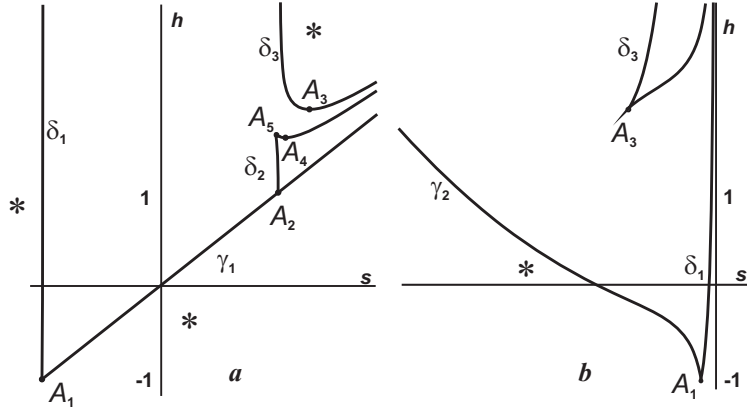


Рис. 1: Допустимые области: а) для  $\mathcal{M}_1$ , б) для  $\mathcal{M}_2$ .

Точки  $A_1, A_2$  отвечают глобальным критическим значениям энергии

$$A_{1,2} : \quad h = \mp 1, \quad \lambda \geq 0. \quad (8)$$

На кривой  $\delta_1$  зависимость  $h(r)$  монотонна, поэтому для любого  $h \geq -1$  существует единственное решение

$$r_- = r_-(h, \lambda) \in [0, \lambda] \quad (9)$$

уравнения  $\varphi_-(r) = h$ . Очевидно, по принятым обозначениям,  $\eta_{11} = \psi_-(r_-)$ .

Перестройки  $h$ -сечений допустимой области происходят при прохождении величиной  $h$ , в дополнение к значениям (8), экстремумов на кривых  $\delta_2, \delta_3$ , т.е. точек, обозначенных через  $A_3 - A_5$ . Уравнение  $\varphi'_+(r) = 0$  распадается на два

$$(2r - \lambda)(r - \lambda) - D = 0, \quad (10)$$

$$r(2r - \lambda)(r - \lambda) + \lambda D = 0. \quad (11)$$

Вычисляя  $\psi'_+(r)$ , убеждаемся, что условие (10) задает экстремумы на гладких участках – точки  $A_3, A_4$ , а условие (11) определяет точку возврата  $A_5$ . Из (10) получаем уравнение

$$(r - \lambda)^3(3r - \lambda) - 4 = 0, \quad (12)$$

которое имеет ровно два корня, причем верхний всегда больше  $\lambda$ , поэтому это единственный экстремум  $h$  на  $\delta_3$  (точка  $A_3$ ), а нижний оказывается неположительным лишь при  $\lambda \leq \sqrt{2}$ . В последнем случае имеем экстремум  $h$  на  $\delta_2$  (точка  $A_4$ ). Явной функции  $h(\lambda)$  в этих точках построить не удается. Поступим следующим образом. Положим в уравнении (12)

$$x = \lambda - r. \quad (13)$$

Из (12) выразим  $\lambda(x)$ , а из (13) найдем  $r(x)$  и подставим в выражение для  $h$  на кривых  $\delta_2, \delta_3$ . Получим

$$\lambda = \frac{3x^4 - 4}{2x^3}, \quad r = \frac{x^4 - 4}{2x^3}, \quad h = \frac{3}{8}x^2 + \frac{2}{x^6},$$

где  $x \in [-\sqrt[4]{4/3}, 0)$  для  $A_3$  и  $x \in [\sqrt[4]{4/3}, \sqrt{2}]$  для  $A_4$ . Поскольку  $\lambda \geq 0$ , можно записать единую параметризацию зависимости  $h$  и  $\lambda$ , положив  $u = x^2$ :

$$A_{3,4}: \quad h_{3,4} = \frac{3}{8}u + \frac{2}{u^3}, \quad \lambda_{3,4}^2 = \frac{(3u^2 - 4)^2}{4u^3}, \quad u \in (0, 2]. \quad (14)$$

При  $h > h_3$  уравнение  $\varphi_+(r) = h$  имеет ровно два вещественных корня в области  $r \in (\lambda, +\infty)$ . Их подстановка в функцию  $\psi_+$  дает зависимости  $\eta_{31}^-(h, \lambda)$  и  $\eta_{31}^+(h, \lambda)$  на монотонных участках  $\delta_3$ . Очевидно,  $\eta_{31}^- < \eta_{31}^+ < \xi_1 = h - \lambda^2/2$ .

Уравнение (11) вместе с уравнением кривой  $\delta_2$  дает в точке возврата

$$A_5: \quad h_5 = \frac{1}{4} \left[ (4 + \lambda^{4/3})^{3/2} - \lambda^{2/3}(6 + \lambda^{4/3}) \right], \quad \lambda \geq 0. \quad (15)$$

**Предложение 3 (3).** *Допустимая область на поверхности  $\Pi_1$  описывается следующим образом:*

$$\begin{aligned} h \in (-\infty, -1) &\Rightarrow s \in \emptyset; \\ h \in [-1, h_3] &\Rightarrow s \in [\eta_{11}, h - \frac{\lambda^2}{2}]; \\ h \in (h_3, +\infty) &\Rightarrow s \in [\eta_{11}, \eta_{31}^-] \cup [\eta_{31}^+, h - \frac{\lambda^2}{2}]. \end{aligned}$$

Подчеркнем, что  $\eta_{11}, \eta_{31}^-, \eta_{31}^+$  — однозначно определенные и эффективно вычисляемые функции от  $h, \lambda$ . Для систем  $\mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$  условие  $g \geq 0$  равносильно

$$h \geq h_{\min} = \frac{1 - \lambda^2 s + 4\lambda^2 s^3}{2s}, \quad (16)$$

а из уравнений (6) следует, что  $\text{sgn}(\rho^2) = \text{sgn}(Y^2)$  и  $\text{sgn}(\rho^2) = \text{sgn}(sZ^2)$ . Пусть  $Y_* = Y$ , если  $\rho$  вещественно, и  $Y_* = iY$ , если  $\rho$  чисто мнимое. Тогда в плоскости  $(X, Y_*)$  кривая  $\Gamma_0$ , заданная тождеством  $X^2 + Y^2 = 1$ , представляет собой окружность или гиперболу, в то время как кривая  $\Gamma_1$ , заданная уравнением  $Z^2(X, Y) = 0$ , при всех  $\rho^2 \neq 0$  есть эллипс. Отметим также следующие из определений равенства

$$\rho^2 = \frac{h_{\tan} - h}{s}, \quad h_{\tan} = \frac{1 - \lambda^2 s + 2s^2}{2s}, \quad h_{\min} - h_{\tan} = -s(1 - 2\lambda^2 s). \quad (17)$$

Здесь  $h = h_{\tan}(s)$  — зависимость на кривой  $\delta_0$  касания поверхностей  $\Pi_1$  и  $\Pi_3$ .

Из (16), (17) получаем следующее утверждение.

**Предложение 4 (4).** *Для существования вещественных решений (6) при заданных  $s, h$  необходимо и достаточно выполнение условия (16) и следующих условий:*

- 1) при  $s < 0$  окружность  $\Gamma_0$  и эллипс  $\Gamma_1$  имеют общую точку;
- 2) при  $s > 0$ ,  $\rho^2 \geq 0$  окружность  $\Gamma_0$  не лежит целиком строго внутри области, ограниченной эллипсом  $\Gamma_1$ ;
- 3) при  $s > 0$ ,  $\rho^2 < 0$  гипербола  $\Gamma_0$  и эллипс  $\Gamma_1$  имеют общую точку.

Отсюда следует, что бифуркации решений по  $s, h$  происходят в случаях касания кривых второго порядка  $\Gamma_0$  и  $\Gamma_1$ . Обозначая в точке касания  $\omega_3 = r$  (здесь это константа), получим выражения

$$h = \varphi_{\pm}(r), \quad s = \theta_{\pm}(r) = \frac{r - \lambda}{4\lambda} [r(r - \lambda) \mp D], \quad (18)$$

где  $D, \varphi_{\pm}$  определены в (7). Это совпадение не случайно, поскольку найденные значения отвечают точкам трансверсального пересечения поверхности  $\Pi_1$  с  $\Pi_2, \Pi_3$ . Выражения для  $s$  различны, так как они определяют одну из компонент нормали к соответствующей поверхности в общей точке.

Анализируя условия предложения 4 в областях, на которые полуплоскость  $s < 0$  делится кривыми (18), с учетом условия (16) приходим к следующему результату.

**Предложение 5 (5).** *Бифуркационная  $(s, h)$ -диаграмма критической системы  $\mathcal{M}_2$  состоит из следующих множеств:*

$$\begin{aligned}\gamma_2 : \quad h &= h_{\min}(s), \quad s \leq -\frac{1}{2}; \\ \delta_1 : \quad h &= \varphi_-(r), \quad s = \theta_-(r), \quad r \in [0, \lambda); \\ \delta_3 : \quad h &= \varphi_+(r), \quad s = \theta_+(r), \quad r \in (\lambda, +\infty).\end{aligned}$$

Внешними границами области существования движений служат  $\gamma_2$  и  $\delta_1$ .

Поскольку зависимость (9) на  $\delta_1$  уже известна, получаем  $\eta_{12} = \theta_-(r_-)$ . На кривой  $\gamma_2$  имеем

$$h'_{\min}(s) = \frac{1}{2s^2}(8\lambda^2 s^3 - 1).$$

Поэтому при отрицательных  $s$  уравнение  $h = h_{\min}(s)$  имеет единственное решение  $s = \xi_2(h, \lambda)$ . Тогда из предложения 5 получим следующее утверждение.

**Предложение 6 (6).** *Допустимая область на поверхности  $\Pi_2$  описывается следующим образом:*

$$\begin{aligned}h \in (-\infty, -1) &\Rightarrow s \in \emptyset; \\ h \in [-1, +\infty) &\Rightarrow s \in [\xi_2, \eta_{12}].\end{aligned}$$

И здесь функции  $\eta_{12}(h, \lambda), \xi_2(h, \lambda)$  эффективно вычисляются.

Диаграмма системы  $\mathcal{M}_2$  показана на рис. 1, *b*. Новых разделяющих зависимостей между  $h$  и  $\lambda$  не появляется, поскольку узловые точки  $A_1$  и  $A_3$  уже учтены в системе  $\mathcal{M}_1$ .

**Замечание 2 (2).** *Отметим двойственность, типичную для случая, когда ребро возврата одной бифуркационной поверхности попадает на другую. Возникающий след в параметрах одной поверхности дает экстремум на гладкой кривой, а в параметрах другой порождает точку возврата. Здесь это видно для точки  $A_3$ , но ниже проявится и для точек  $A_4, A_5$ .*

Для системы на  $\mathcal{M}_3$  к уже известным уравнениям бифуркаций решений (6) добавляется разделяющий случай  $\rho^2 = 0$ . Из последнего равенства (17) определяются значения  $s$ , при которых эта кривая лежит в области (16).

**Предложение 7 (7).** *Бифуркационная  $(s, h)$ -диаграмма критической системы  $\mathcal{M}_3$  состоит из следующих множеств:*

$$\begin{aligned}\delta_0 : \quad h &= h_{\tan}(s), \quad 0 < s \leq \frac{1}{2\lambda^2}; \\ \delta_2 : \quad h &= \varphi_+(r), \quad s = \theta_+(r), \quad r \in (-\infty, 0]; \\ \gamma_3 : \quad h &= h_{\min}(s), \quad s \in I(\lambda),\end{aligned}$$

где

$$I(\lambda) = \begin{cases} (0, +\infty), & \lambda^2 \leq 8/(3\sqrt{3}) \\ (0, s_*] \cup [s^*, +\infty), & 8/(3\sqrt{3}) \leq \lambda^2 \leq 2 \\ (0, s_*] \cup [1/2, +\infty), & \lambda^2 \geq 2 \end{cases},$$

$s_*(\lambda) < s^*(\lambda)$  – абсциссы точек касания кривых  $\delta_2$  и  $\gamma_3$ , существующих при значениях  $\lambda^2 \geq 8/(3\sqrt{3})$ .

Внешними границами допустимой области служат:

- 1) кривая  $\gamma_3$  в указанных пределах;
- 2) кривая  $\delta_0$  в пределах

$$s \in \begin{cases} (0, 1/(2\lambda^{2/3})], & \lambda^2 \leq 1/(2\sqrt{2}) \\ (0, \sqrt{1+\lambda^4} - \lambda^2], & \lambda^2 \geq 1/(2\sqrt{2}) \end{cases};$$

- 3) кривая  $\delta_2$  в пределах

$$s \in \begin{cases} [s_*, s^*], & 8/(3\sqrt{3}) \leq \lambda^2 \leq 2 \\ [s_*, 1/2], & \lambda^2 \geq 2 \end{cases}.$$

Кривая  $\delta_2$  заканчивается на кривой  $\gamma_3$  при  $r = 0, s = 1/2$ . Это – отмеченная ранее точка  $A_2$ . Уравнение для точки возврата кривой  $\delta_2$  совпадает с (10), поэтому это точка  $A_4$ . Экстремум  $h$  на  $\delta_2$  – это точка  $A_5$  (замечание 2).

Кривая  $\delta_2$  имеет с кривой  $\delta_0$  точку касания  $A_6$  при  $s = \sqrt{1 + \lambda^4} - \lambda^2, r = -\lambda$  для всех  $\lambda > 0$ . Точка их трансверсального пересечения  $A_7$ , в которой  $s = 1/(2\lambda^{2/3}), r = \lambda - 1/\sqrt[3]{\lambda}$ , существует при  $0 < \lambda \leq 1$ . При проходе кривой  $\delta_0$  в сторону увеличения  $s$  точка  $A_6$  встречается первой при  $8\lambda^4 < 1$ , затем  $A_6$  и  $A_7$  меняются местами. Верхняя граница  $s$  на  $\delta_0$  определяется из последнего уравнения (17) точкой  $A_8$  пересечения с кривой  $\gamma_3$ . При условии  $\lambda^2 < 1/\sqrt{2}$  на кривой  $\delta_0$  реализуется минимум  $h$ , равный  $\sqrt{2} - \lambda^2/2$ . Соответствующая точка  $A_9$  лежит левее  $A_7$  при  $\lambda^2 < 1/(2\sqrt{2})$ , а при увеличении  $\lambda$  она находится правее  $A_6$  и на допустимую область уже не влияет. Отметим еще минимум  $h$  на кривой  $\gamma_3$  (точка  $A_{10}$ ), равный  $(3\lambda^{2/3} - \lambda^2)/2$ .

На рис. 2 показаны первые три варианта бифуркационной  $(s, h)$ -диаграммы при возрастании  $\lambda$ : 1)  $0 < \lambda^2 < 1/(2\sqrt{2})$ ; 2)  $1/(2\sqrt{2}) < \lambda^2 < 1$ ; 3)  $\lambda^2 > 1$ . Проверка условий предложения 4 показывает, что движения невозможны в области, ограниченной двумя бесконечными отрезками кривых  $\delta_2$  и  $\delta_0$  до точки пересечения  $A_7$  в первом случае и до точки касания  $A_6$  при остальных  $\lambda$ . Как отмечалось, это свойство впервые доказано (в иных терминах и параметрах) в работе [16]. Обсуждаемая недопустимая область на рис. 2 указана звездочкой со стрелками.

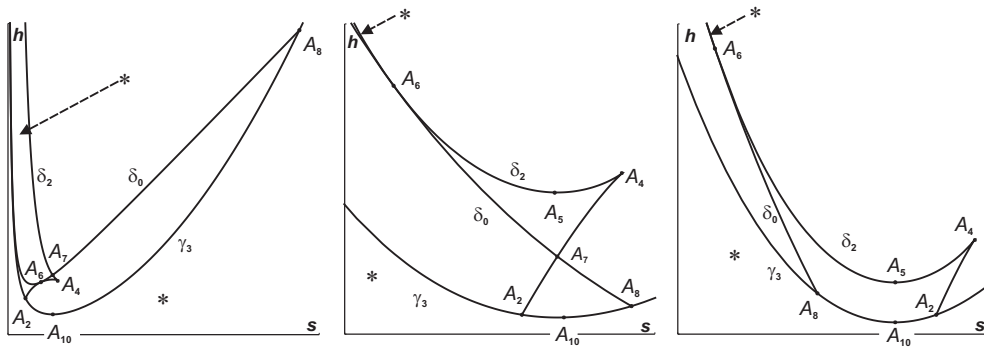


Рис. 2: Допустимая область для  $M_3$ .

**Замечание 3 (3).** Строго говоря, пересечение кривой  $\delta_0$  не всегда сопровождается топологически бифуркациями решений, но заведомо меняется их аналитическое представление (6). Как следует из результатов [20], эта кривая также отвечает за вырождение индуцированной симплектической структуры на соответствующем четырехмерном критическом подмногообразии фазового пространства  $TSO(3)$  нередуцированной системы.

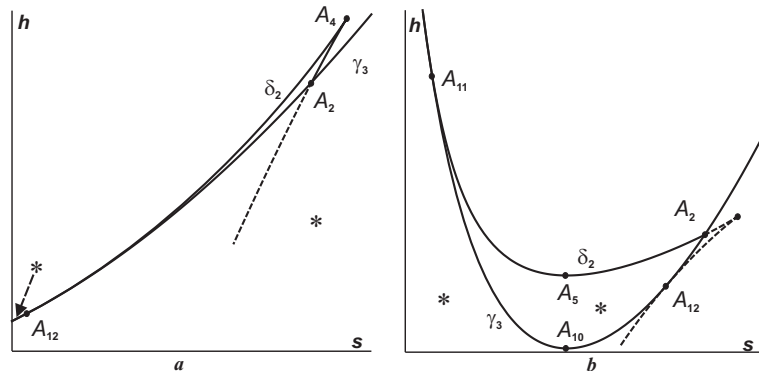


Рис. 3: Эволюция особых точек в окрестности  $\lambda^2 = 2$ .

Приведенными тремя случаями видоизменения  $(s, h)$ -диаграммы на  $M_3$  не исчерпываются. Точка возврата  $A_4$  кривой  $\delta_2$  существует лишь при  $\lambda^2 < 2$ . При  $\lambda^2 = 2$  она сливается с  $A_2$  и после этого исчезает.

При  $r < 0$  имеем

$$\frac{\varphi_+(r) - h_{\min}(\theta_+(r))}{\theta_+(r)} = -\frac{\lambda r}{(r - \lambda)^2} [\lambda(r - \lambda) + D]^2 \geq 0,$$

поэтому другие возможные общие точки  $\gamma_3$  и  $\delta_2$  оказываются точками касания и подчинены уравнению

$$(\lambda - r)^3(\lambda + r) - 4 = 0. \quad (19)$$

Оно имеет вещественные корни лишь при  $\lambda^2 \geq 8/(3\sqrt{3})$ . В случае строгого неравенства таких корней два, нижний всегда отрицателен, а верхний отрицателен лишь при  $\lambda^2 < 2$ . Поэтому если  $8/(3\sqrt{3}) < \lambda^2 < 2$ , то между точками  $A_6, A_5$  кривая  $\delta_2$  имеет еще две точки касания  $A_{11}, A_{12}$  с кривой  $\gamma_3$ . Соответствующие значения  $s$  в предложении 7 обозначены через  $s_*, s^*$ . При  $\lambda^2 = 2$  точка  $A_{12}$  сливается с  $A_5$  и  $A_2$  и при  $\lambda^2 > 2$  уходит из допустимой области вместе с точкой возврата (см. рис. 3). При  $g = 0$  между точками  $A_8$  и  $A_2$  имеем  $\rho^2 = 1 - 2\lambda^2 s < 0$ , поэтому совместность уравнений (6) равносильна существованию решений системы неравенств

$$X^2 \geq 1, \quad Q(X) = 2\lambda^2 s^3 (X^2 - 1) + 2sX + 1 \leq 0.$$

Между точками  $A_{11}$  и  $A_{12}$  дискриминант  $Q(X)$  отрицателен, а при  $\lambda^2 > 2$  между точками  $A_{11}$  и  $A_2$  оба корня  $Q(X)$  по модулю меньше 1. Поэтому на этих интервалах кривой  $\gamma_3$  вещественных решений не существует. Следовательно, при  $\lambda^2 > 8/(3\sqrt{3})$  нижней границей допустимой области является соответствующий участок кривой  $\delta_2$  (от  $A_{11}$  до  $A_{12}$  при  $\lambda^2 \leq 2$  и от  $A_{11}$  до  $A_2$  при  $\lambda^2 > 2$ ). Неявную зависимость  $h$  и  $\lambda$  для  $A_{11,12}$  можно параметризовать, используя для уравнения (19) замену (13).

В разделяющее множество на плоскости  $(h, \lambda)$  для атласа диаграмм  $\Sigma_h(\lambda)$ , в дополнение к найденным ранее кривым (8), (14), (15), необходимо включить кривые, отвечающие зависимостям между  $h$  и  $\lambda$  в новых особых точках:

$$\begin{aligned} A_6 : \quad h_6 &= \frac{3}{2}\sqrt{1 + \lambda^4} - \lambda^2, \quad \lambda \geq 0; \\ A_7 : \quad h_7 &= -\frac{\lambda^2}{2} + \lambda^{2/3} + \frac{1}{2\lambda^{2/3}}, \quad 0 < \lambda \leq 1; \\ A_8 : \quad h_8 &= \frac{1 + \lambda^4}{2\lambda^2}, \quad \lambda > 0; \\ A_9 : \quad h_9 &= \sqrt{2} - \lambda^2/2, \quad 0 \leq \lambda \leq \sqrt{1/(2\sqrt{2})}; \\ A_{10} : \quad h_{10} &= \frac{1}{2}(3\lambda^{2/3} - \lambda^2), \quad 0 \leq \lambda \leq \sqrt{8/(3\sqrt{3})}; \\ A_{11,12} : \quad h_{11,12} &= \frac{1}{8}x^2 + \frac{2}{x^2} - \frac{2}{x^6}, \quad \lambda = \frac{1}{2}x + \frac{2}{x^3}, \quad x \in [\sqrt{2}, +\infty). \end{aligned} \quad (20)$$

Для явного указания интервалов изменения  $s$  в зависимости от  $\lambda, h$  обозначим через  $\zeta^- < \zeta^+$  решения уравнения  $h = h_{\tan}(s)$  при  $h \geq h_9$

$$\zeta^\pm(h, \lambda) = \frac{1}{2} \left[ h + \frac{\lambda^2}{2} \pm \sqrt{\left( h + \frac{\lambda^2}{2} \right)^2 - 2} \right]$$

и напомним, что положительные решения уравнения  $h = h_{\min}(s)$  при  $h \geq h_{10}$  обозначаются  $\xi_3^- < \xi_3^+$ . Здесь и далее  $h_j$  определены в соответствии с (20).

При  $\lambda^2 \leq 1/(2\sqrt{2})$  на участке кривой  $\delta_2$  при  $h \geq h_7$ , а при остальных  $\lambda$  – на участке  $h \geq h_6$  имеем однозначную зависимость  $s = \eta_{23}(h, \lambda)$ . При  $\lambda^2 \geq 8/(3\sqrt{3})$  на монотонно убывающем бесконечном участке кривой  $\delta_2$  до пересечения с точкой  $A_{11}$  имеем решение  $s = \eta_{23}^-(h, \lambda)$ , а от точки  $A_{12}$  до точки  $A_2$  – решение  $s = \eta_{23}^+(h, \lambda)$ . Получаем следующее утверждение.

**Предложение 8** (8). *Допустимая область на поверхности  $\Pi_3$  такова: при  $0 < \lambda^2 \leq 1/(2\sqrt{2})$*

$$\begin{aligned} h \in (-\infty, h_{10}) &\Rightarrow s \in \emptyset; \\ h \in [h_{10}, h_9] &\Rightarrow s \in [\xi_3^-, \xi_3^+]; \\ h \in (h_9, h_7) &\Rightarrow s \in [\xi_3^-, \zeta^-] \cup [\zeta^+, \xi_3^+]; \\ h \in (h_7, +\infty) &\Rightarrow s \in [\xi_3^-, \zeta^-] \cup [\eta_{23}, \xi_3^+], \end{aligned}$$

при  $1/(2\sqrt{2}) \leq \lambda^2 \leq 8/(3\sqrt{3})$

$$\begin{aligned} h \in (-\infty, h_{10}) &\Rightarrow s \in \emptyset; \\ h \in [h_{10}, h_6] &\Rightarrow s \in [\xi_3^-, \xi_3^+]; \\ h \in (h_6, +\infty) &\Rightarrow s \in [\xi_3^-, \zeta^-] \cup [\eta_{23}, \xi_3^+]; \end{aligned}$$



при  $8/(3\sqrt{3}) \leq \lambda^2 \leq 2$

$$\begin{aligned} h \in (-\infty, h_5) &\Rightarrow s \in \emptyset; \\ h \in [h_5, h_{12}] &\Rightarrow s \in [\eta_{23}^-, \eta_{23}^+]; \\ h \in [h_{12}, h_{11}] &\Rightarrow s \in [\eta_{23}^-, \xi_3^+]; \\ h \in [h_{11}, h_6] &\Rightarrow s \in [\xi_3^-, \xi_3^+]; \\ h \in (h_6, +\infty) &\Rightarrow s \in [\xi_3^-, \zeta^-] \cup [\eta_{23}, \xi_3^+]; \end{aligned}$$

при  $\lambda^2 \geq 2$

$$\begin{aligned} h \in (-\infty, h_5) &\Rightarrow s \in \emptyset; \\ h \in [h_5, h_2] &\Rightarrow s \in [\eta_{23}^-, \eta_{23}^+]; \\ h \in [h_2, h_{11}] &\Rightarrow s \in [\eta_{23}^-, \xi_3^+]; \\ h \in [h_{11}, h_6] &\Rightarrow s \in [\xi_3^-, \xi_3^+]; \\ h \in (h_6, +\infty) &\Rightarrow s \in [\xi_3^-, \zeta^-] \cup [\eta_{23}, \xi_3^+]. \end{aligned}$$

Для пороговых значений  $\lambda$ , естественно, можно пользоваться любым из двух подходящих представлений.

Таким образом, представлена вся информация по классификации бифуркационных диаграмм на изоэнергетических уровнях гиристора Ковалевской–Яхья. Разделяющее множество  $\mathcal{C}$  на плоскости  $(h, \lambda)$  задано уравнениями (8), (14), (15), (20). Отметим, что пересечение  $\mathcal{C}$  с осью  $\lambda = 0$  дает значения  $h = -1, 0, 1, \sqrt{2}, \frac{3}{2}, \sqrt{3}, 2$ , классифицирующие изоэнергетические диаграммы классического волчка Ковалевской (см., например, предельный случай в [19]).

Программы символьных вычислений позволяют вывести на экран компьютера множество  $\mathcal{C}$  и, выбирая интерактивно точку в какой-либо из областей, получить при необходимости детализацию окрестности этой точки. Позиционируя окончательное значение пары параметров  $(h, \lambda)$  в более мелком масштабе, согласно предложениям 3, 6, 8 строим диаграмму  $\Sigma_h(\lambda)$  по формулам (4), (3) с уже вполне определенными промежутками изменения параметра  $s$ . В результате получаем компьютерную систему, реализующую построение искомого электронного атласа.

## Список литературы

- [1] Харламов П.В. Лекции по динамике твердого тела. – Изд-во НГУ. – 1965. – 221 с.
- [2] Харламов П.В. Один случай интегрируемости уравнений движения твердого тела, имеющего неподвижную точку // Механика твердого тела. – 1971. – № 3. – С. 57-64.
- [3] Yehia H. New integrable cases in the dynamics of rigid bodies // Mech. Res. Commun. – 1986. – **13**, 3. – P. 169-172.
- [4] Гашененко И.Н. Новый класс движений тяжелого гиристора // Докл. АН СССР. – 1991. – **318**, 1. – С. 66-68.
- [5] Рябов П.Е. Некоторые случаи вырождения переменных в одной задаче о движении твердого тела вокруг неподвижной точки // Деп. в ВИНТИ. – 1991. – № 3660-В91. – 9 с.
- [6] Гашененко И.Н. Один случай интегрируемости уравнений движения гиристора // Механика твердого тела. – 1992. – № 24. – С. 1-4.
- [7] Гашененко И.Н. Бифуркационное множество задачи о движении гиристора, подчиненного условиям Ковалевской // Механика твердого тела. – 1995. – № 27. – С. 31-35.
- [8] Рябов П.Е. О вычислении бифуркационного множества в случае Ковалевской–Яхья // Механика твердого тела. – 1995. – № 27. – С. 36-40.
- [9] Рябов П.Е. Перестройки бифуркационного множества в обобщенной задаче С.В. Ковалевской // Деп. в ВИНТИ. – 1996. – № 884-В96. – 7 с.
- [10] Рябов П.Е. Об одном свойстве бифуркационных кривых // Деп. в ВИНТИ. – 1996. – № 1954-В96. – 16 с.
- [11] Рябов П.Е. Бифуркационные множества в задаче о движении твердого тела вокруг неподвижной точки // Вестник ВолГУ. – 1996. – № 1. – С. 41-49.
- [12] Гашененко И.Н. Бифуркационное множество в задаче о движении тяжелого гиристора при условиях Ковалевской // Доповіді НАН України. – 1997. – № 2. – С. 60-62.

- [13] *Рябов П.Е., Харламов М.П.* Бифуркации первых интегралов в случае Ковалевской-Яхьи // Regular and Chaotic Dynamics. – 1997. – **2**, 2. – С. 25-40.
- [14] *Гашененко И.Н.* Интегральные многообразия и топологические инварианты одного случая движения гиростата // Механика твердого тела. – 1997. – № 29. – С. 1-7.
- [15] *Гашененко И.Н.* Инвариантные многообразия и множества допустимых скоростей в динамике твердого тела // Дисс. ... докт. физ.-мат. наук. – Донецк, ИПММ НАНУ. – 2008. – 300 с.
- [16] *Рябов П.Е.* Бифуркационное множество задачи о движении твердого тела вокруг неподвижной точки в случае Ковалевской-Яхьи // Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. – Москва, МГУ. – 1997. – 143 с.
- [17] *Рейман А.Г., Семенов-Тянь-Шанский М.А.* Лаксово представление со спектральным параметром для волчка Ковалевской и его обобщений // Функци. анализ и его приложения, 1988, т. 22, № 2, с. 87-88.
- [18] *Харламов М.П.* Критическое множество и бифуркационная диаграмма задачи о движении волчка Ковалевской в двойном поле // Механика твердого тела. – 2004. – № 34. – С. 47-58.
- [19] *Харламов М.П., Шведов Е.Г.* Бифуркационные диаграммы на изоэнергетических уровнях волчка Ковалевской в двойном поле // Механика твердого тела. – 2004. – № 34. – С. 59-65.
- [20] *Харламов М.П.* Критические подсистемы гиростата Ковалевской в двух постоянных полях // Нелинейная динамика. – 2007. – **3**, 3. – С. 331-348.
- [21] *Харламов М.П.* Области существования критических движений обобщенного волчка Ковалевской и бифуркационные диаграммы // Механика твердого тела. – 2006. – № 36. – С. 13-22.