

## 基于 Floquet 模式的异向介质参数提取方法

王瑞 谢拥军 杨锐 李慧 田超 吴召海 胡海鹏  
(西安电子科技大学天线与微波技术国家重点实验室 西安 710071)

**摘要:** 基于 TEM 波作用下 SRR(开口谐振环)异向介质的解析分析, 确立了 3 种摆向下 SRR 结构的负参数谐振响应。将 Smith 的异向介质参数提取方法推广至 Floquet 模式下, 并比较了两种方法的 S 参数。逐一分析了不同摆向下异向介质的负效应, 证明了解析分析的正确性。与传统方法相比, 基于 Floquet 模式的参数提取有效地减少了 S 参数的计算时间, 更有利于分析异向介质的双各向异性。

**关键词:** 异向介质; 参数提取; Floquet 模; 谐振

**中图分类号:** TM22

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1009-5896(2010)06-1501-04

**DOI:** 10.3724/SP.J.1146.2009.00736

## Electromagnetic Parameter Retrieval Method Based on Floquet Mode Analysis

Wang Rui Xie Yong-jun Yang Rui Li Hui Tian Cao Wu Zhao-hai Hu Hai-peng  
(National Key Laboratory of Antennas and Microwave Technology, Xidian University, Xi'an 710071, China)

**Abstract:** A rigorous analysis of Split Ring Resonator (SRR) metamaterials is presented for three different electromagnetic field polarization and propagation directions to establish the SRR resonance behaviors. The Smith's parameter retrieval method is then extended to Floquet mode analysis, and the S parameters from the two methods are compared. The resonances of SRR with different orientation is investigated to testify the proposed analysis. Compared with traditional methods, parameter retrieval method based on Floquet mode analysis reduces greatly the time to calculate the S parameters, thus it is more convenient for the analysis of metamaterial bianisotropic effects.

**Key words:** Metamaterials; Parameter retrieval; Floquet model; Resonance

### 1 引言

自然界中, 绝大部分的物质的介电常数和磁导率同时为正。早在 1968 年, Veselago 就从理论上分析了具有负介电常数和负磁导率的异向介质的全新物理特性<sup>[1]</sup>。但是由于自然界中并不存在介电常数和磁导率同时小于 0 的物质, 所以这一理论的研究此后一直停滞不前。直到 20 世纪 90 年代末英国物理学家 Pendry 提出了异向介质完美透镜<sup>[2]</sup>, Ziolkowski 从解析和数值两方面研究了异向介质中的波传播问题<sup>[3]</sup>, Smith 基于 Pendry 的研究, 通过将金属丝阵列和谐振环阵列合理布局, 制造出了双负材料<sup>[4]</sup>。之后, 国内外很多学者对其传播特性作了实验研究, 证实了双负特性的存在<sup>[5-8]</sup>。

异向介质属于一种特殊的周期性结构, 它的各种特性一般是由其宏观的本构参数来体现。目前, 异向介质的基本参数提取方法通常是提出一个结构

单元, 边界条件设置为 PEC-PMC 周期性边界条件, 模拟均匀平面波照射, 计算出该异向介质的传输系数和反射系数, 根据这些传输参数来提取异向介质的相对本构参数。Smith 和 Ziolkowski 都利用这种波导模式法获得 S 参数, 成功设计出异向介质结构并提出其本构参数<sup>[3,9]</sup>。虽然 SRR(开口谐振环)参数的设计日趋详尽, 但是 SRR 异向介质对于入射场的电磁响应除了电耦合, 磁耦合之外, 还存在磁电耦合, 构成了双各向异性介质, 现有理论多只考虑自由空间中横电磁(TEM)波作用下单一的 SRR 摆向, 从而缺乏对各种不同摆向下 SRR 异向介质谐振响应的统一理论, 而且目前的研究对于 SRR 异向介质张量形式本构参数的提取也只限于单一分量, 从而难以全面了解异向介质的双各向异性。

本文将 Smith 的参数提取方法推广至 Floquet 模式下, 清晰直观地展现了 SRR 异向介质本构参数的张量形式。Floquet 模实质上是电磁场波动方程满足周期性边界条件时, 利用数学上分离变量法得到的电磁场的解, 周期结构的影响反映在 Floquet 模中, 通过数值计算, 验证了在 TEM 波作用下 SRR

2009-05-15 收到, 2009-11-02 改回

国家自然科学基金(60771040)和国家重点实验室基金(9140C0704060804)资助课题

通信作者: 王瑞 armx32@yahoo.com.cn

异向介质的解析分析。另一方面, 现有异向介质的 SRR 结构单元周期相对于其谐振波长非常小, 利用 Floquet 端口分析时, Floquet 主模起决定作用, 而 Smith 和 Ziolkowski 使用的波导模式法则采用的是全模式分析, 因此基于 Floquet 模式下的异向介质参数提取方法能够提高异向介质参数提取的速度。

## 2 异向介质谐振特性的解析分析

SRR 异向介质共有 6 种摆向, SRR 双各向异性介质可用式(1), 式(2)描述

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 (\bar{\varepsilon} \cdot \mathbf{E} + Z_0 \bar{\kappa} \cdot \mathbf{H}) \quad (1)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \left( -\frac{1}{Z_0} \bar{\kappa}^T \cdot \mathbf{E} + \bar{\mu} \cdot \mathbf{H} \right) \quad (2)$$

其中  $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$ ,  $\bar{\varepsilon}$ ,  $\bar{\mu}$  和  $\bar{\kappa}$  均为张量。对于图 1(a)所示的 SRR 结构单元摆向下可表示为

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}, \quad \mu = \begin{bmatrix} \mu_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{zz} \end{bmatrix},$$

$$\kappa = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \kappa_{yx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

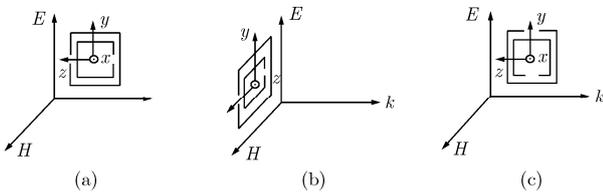


图 1 发生谐振的异向介质 3 种不同摆向

其中  $\varepsilon_{xx} = 1$ ,  $\varepsilon_{yy} = a + \frac{b\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)}$ ,  $\varepsilon_{zz} = a$ ;  $\mu_{xx} = 1 + \frac{c\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)}$ ,  $\mu_{yy} = 1$ ,  $\mu_{zz} = 1$ ;  $\kappa_{yx} = -i\kappa = -\frac{id\omega_0\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)}$ 。

引入归一化的磁场  $\mathbf{h} = Z_0 \mathbf{H}$ , 结合式(1)和式(2), 对于无源场, 从麦克斯韦旋度方程可以得到

$$-i\nabla' \times \mathbf{h} = \varepsilon \cdot \mathbf{E} + \kappa \cdot \mathbf{h} \quad (4)$$

$$i\nabla' \times \mathbf{E} = -\kappa^T \cdot \mathbf{E} + \mu \cdot \mathbf{h} \quad (5)$$

其中  $\nabla' = \nabla/k_0$ , 假定入射波沿正  $\hat{z}$  轴方向传播  $\exp(-i\beta z')$ , 其中  $\beta = k_z/k_0$  为  $\hat{z}$  方向的归一化波数, 则此时, TEM 波的归一化波数为

$$\beta^2 = \mu_{xx}\varepsilon_{yy} - \kappa^2 \quad (6)$$

可以看出, 当  $\mu_{xx}\varepsilon_{yy} - \kappa^2 < 0$  时存在传输阻带。所以当异向介质取得单负参数介质情况  $\mu_{xx} < 0$  或  $\varepsilon_{yy} < 0$ , 和双正或双负参数介质情况且  $|\mu_{xx}\varepsilon_{yy}| < |\kappa^2|$  时, 归一化波数  $\beta$  成为虚波数, SRR 异向介质将出现传输零点<sup>[10]</sup>。

通过同样的解析分析, 可以得出, 当 TEM 波穿过具有图 1(a), 1(b), 1(c)摆向的 SRR 异向介质时, 归一化波数  $\beta$  有可能变为纯虚数, 这意味着入射场将随离激励源的距离增加而指数衰减, 从而导致了出现传输零点, 发生谐振。

需要指出的是, Smith 在对表 1 中图 1(b)的  $\mu_{xx} = 1$  和图 1(c)的  $\varepsilon_{yy} = a$  的推导中, 对模型进行了抽象<sup>[5]</sup>, 而在实际的参数提取中, 它们仍是与频率相关的函数, 而不是常数。可以看出, 在如图 1(a)所示的摆向时, 电、磁耦合都对发生谐振作出贡献。图 1(b)所示的摆向下, 异向介质的谐振特性主要由电耦合引起, 图 1(c)的摆向下磁耦合产生的谐振特性远大于电耦合。而其它 3 种摆向则无法实现负参数。

表 1 具有图 1(a)-1(c)所示摆向的 SRR 异向介质的本构参数

SRR 摆向	图 1(a)	图 1(b)	图 1(c)
$\varepsilon$	$\varepsilon_{yy} = a + \frac{b\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)}$	$\varepsilon_{yy} = a + \frac{b\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)}$	$\varepsilon_{yy} = a$
$\mu$	$\mu_{xx} = 1 + \frac{c\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)}$	$\mu_{xx} = 1$	$\mu_{xx} = 1 + \frac{c\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)}$

## 3 Floquet 模下的参数提取方法

### 3.1 异向介质中 Floquet 模的传播特性

对于上面 3 种可以发生谐振的异向介质在使用 Floquet 端口对异向介质进行仿真的时候, 其散射场、透射场可以表示为

$$\mathbf{E}_{S(T)} = \sum_{m=1}^2 \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} R_{mpq} (B_{mpq}) \psi_{mpq} \quad (7)$$

其中  $p = q = 0$  时对应 Floquet 主模,  $p$  或  $q$  不等于零时对应 Floquet 高次模。  $m = 1$  代表 TE-Floquet 模,  $m = 2$  代表 TM-Floquet 模。  $R_{mpq}$ ,  $B_{mpq}$  分别为空气和异向介质层界面的反射系数和透射系数, 为矢量形式的 Floquet 模。

令垂直于 2 维周期阵列平面的方向为  $z$  向。对于传播模, 传播常数为正实数, Floquet 模在  $z$  方向只存在相位变化, 并没有幅度的衰减。来自异向介质的所有 SRR 单元结构在各 Floquet 模子波的传播

方向上相位延迟为  $2\pi$  的整数倍, 波能够传递能量。对于凋落模, 传播常数为负的纯虚数, Floquet 模在  $z$  方向没有相位变化, 但存在幅度的衰减, 从而导致传输阻带。因为 SRR 异向介质的谐振响应通常表现为  $S_{21}$  参数的极小值处出现 SRR 异向介质的谐振响应, 故 SRR 异向介质的 S 参数为

$$S_{11}^{mpq} = \frac{R_{mpq}(1-T_{pq}^2)}{1-R_{mpq}^2 T_{pq}^2}, \quad S_{21}^{mpq} = \frac{T_{pq}(1-R_{mpq}^2)}{1-R_{mpq}^2 T_{pq}^2} \quad (8)$$

其中  $R_{mpq}$  为式(1)中的反射系数, 有  $|R_{mpq}| \leq 1$ , 而  $T_{pq} = \exp(-i\gamma_{pq}d)$  为传输因子。可以看出,  $S_{21}^{mpq}$  将随着传输因子  $T_{pq}$  的减小而减小<sup>[1]</sup>。

图 2(a)给出了波导传输法获得的 S 参数, 2(b)给出了 Floquet 端口法获得的 S 参数。波导传输法运用的是全波分析, 而由于现有异向介质的 SRR 结构单元周期相对于其谐振波长非常小, 利用 Floquet 端口分析时, Floquet 主模 ( $p=0, q=0$ ) 将起决定作用。比较图 2(a)和图 2(b), S 参数曲线趋势基本相同, 谐振频率极值点和 S 参数 dB 值大小略有不同, 这是因为 Floquet 端口法用主模代替了全模分析, 但是应用 Floquet 端口法后, 通过减小计算的模式数减少了计算 S 参数的时间, 从而可以提高异向介质参数提取的时间。图 3 和图 4 分别给出了图 1(b)和 1(c)摆向下两种不同方法的 S 参数曲线图, 通过比对可以看出, 可以利用 Floquet 端口法的主模分析替代波导传输法的全模分析, 以提高参数提取的速度。

### 3.2 Floquet 模下的参数提取方法

对于异向介质板的转移矩阵为

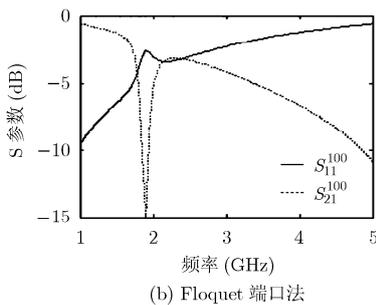
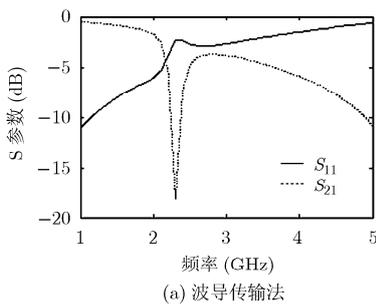


图 2 图 1(a)摆向异向介质 S 参数比较图

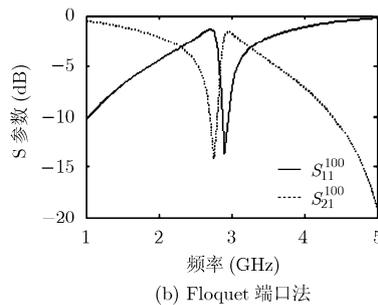
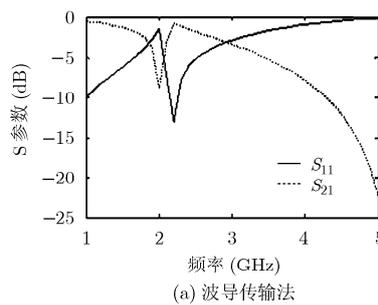


图 3 图 1(b)摆向异向介质 S 参数比较图

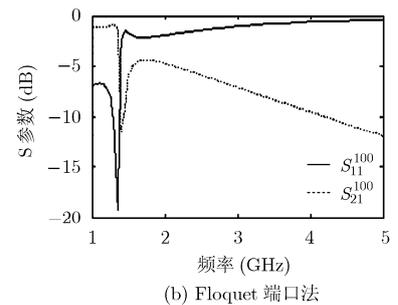
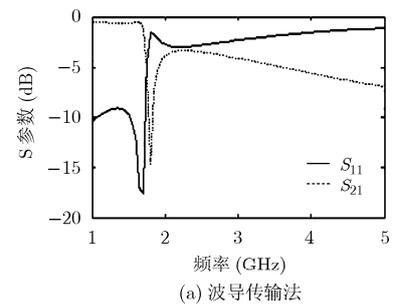


图 4 图 1(c)摆向异向介质 S 参数比较图

$$\mathbf{F}_{mpq} = \begin{pmatrix} \cos(n_{mpq}kd) & -\frac{z_{mpq}}{k} \sin(n_{mpq}kd) \\ \frac{k}{z_{mpq}} \sin(n_{mpq}kd) & \cos(n_{mpq}kd) \end{pmatrix} \quad (9)$$

S 矩阵可以由 T 矩阵表示出来。因为异向介质属于一种特殊的周期性结构, 其结构单元周期相对于其谐振波长较小, 这样电磁波在整个异向介质结构中的空间变化要远大于因结构单元不连续性引起的电磁波局部空间变化, 因此从宏观角度看, 异向介质可以等效为均匀媒质, 则有:  $\mathbf{F}_{11}^{mpq} = \mathbf{F}_{22}^{mpq} = \mathbf{F}_s^{mpq}$ ,  $\det(\mathbf{F}_{mpq}) = 1$ 。则 S 参数表示为

$$\left. \begin{aligned} S_{21}^{mpq} = S_{12}^{mpq} &= \frac{1}{T_s^{mpq} + \frac{1}{2} \left( ikT_{12}^{mpq} + \frac{T_{21}^{mpq}}{ik} \right)} \\ S_{11}^{mpq} = S_{22}^{mpq} &= \frac{\frac{1}{2} \left( \frac{T_{21}^{mpq}}{ik} - ikT_{12}^{mpq} \right)}{T_s^{mpq} + \frac{1}{2} \left( \frac{T_{21}^{mpq}}{ik} + ikT_{12}^{mpq} \right)} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

代入 T 矩阵, 得到

$$\left. \begin{aligned} n_{mpq} &= \frac{1}{kd} \cos^{-1} \left[ \frac{1}{2S_{21}^{mpq}} (1 - (S_{11}^{mpq})^2 + (S_{12}^{mpq})^2) \right] \\ z_{mpq} &= \sqrt{\frac{(1 + S_{11}^{mpq})^2 - (S_{21}^{mpq})^2}{(1 - S_{11}^{mpq})^2 - (S_{21}^{mpq})^2}} \\ \Rightarrow \left. \begin{aligned} \mu_{mpq} &= n_{mpq} z_{mpq} \\ \varepsilon_{mpq} &= n_{mpq} / z_{mpq} \end{aligned} \right\} \quad (11) \end{aligned}$$

## 4 数值分析

图 5-图 7 分别是对应于图 1 所示的 3 种摆向,

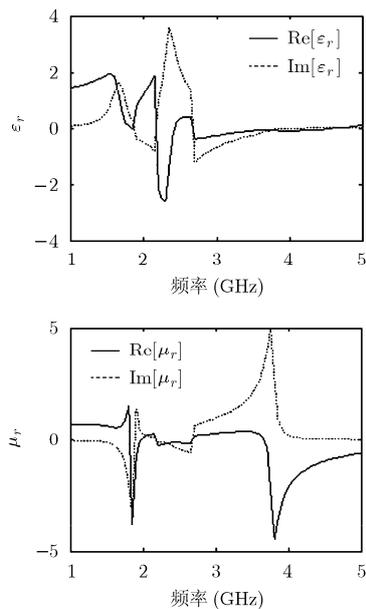


图 5 图 1(a)摆向异向介质本构参数

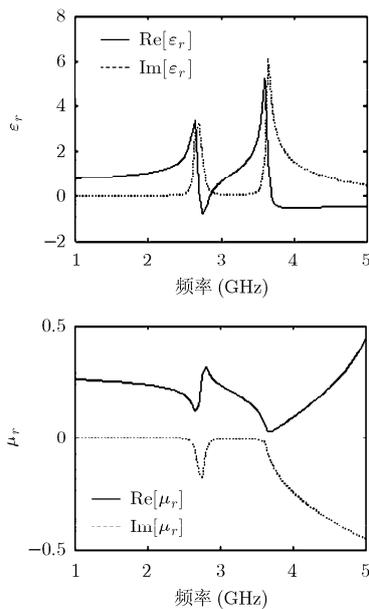


图 6 图 1(b)摆向异向介质本构参数

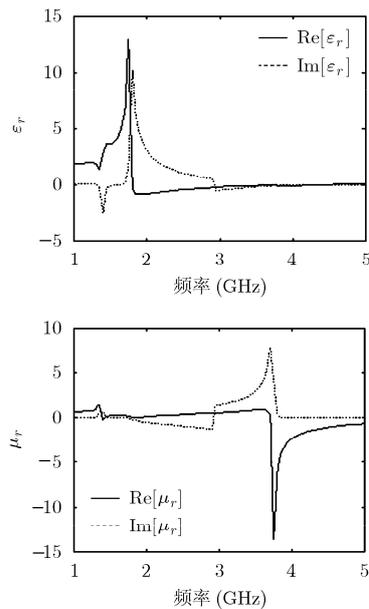


图 7 图 1(c)摆向异向介质本构参数

应用 Floquet 模下的参数提取方法得到 SRR 异向介质的本构参数。

由图 5 可以看出,在这种摆向下  $\epsilon_r$  和  $\mu_r$  都呈现负值, SRR 异向介质对于电磁场的电耦合和磁耦合都比较明显。

由图 6 可以看出,在这种摆向下  $\epsilon_r$  呈现负值,  $\mu_r$  则呈现正值,说明对这种摆向下 SRR 异向介质的谐振响应中电耦合强于磁耦合,起主要作用。由图 7 则能够看到,在图 1(c)摆向时,磁耦合对 SRR 异向介质的谐振响应起主要作用。

## 5 结论

本文将 Smith 的异向介质参数提取方法推广至 Floquet 模下,并对两种方法的 S 参数进行数值计算和比对,发现由于现有异向介质的 SRR 结构单元周期相对于其谐振波长非常小,利用 Floquet 端口分析时, Floquet 主模起决定作用,于是可以将主模分析替代全模分析,从而提高数值计算速度。通过分析不同摆向下 SRR 异向介质的负效应,证明了基于 TEM 波作用下 SRR 异向介质的解析分析的正确性。

## 参考文献

- [1] Veselago V G. The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of  $\epsilon$  and  $\mu$ [J]. *Phys. Usp.*, 1964, 92(10): 517-526.
- [2] Pendry J B, Holden A J, Robbins D J, and Stewart W. J. Magnetism from conductors and enhanced nonlinear phenomena[J]. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 1999, 47(11): 2075-2084.
- [3] Ziolkowski R W. Design, fabrication, and testing of double

negative metamaterials[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2003, 51(7): 1516-1529.

- [4] Smith D R. Metamaterials and negative refractive index[J]. *Science*, 2004, 305(5685): 788-792.
- [5] Smith D R, Schurig D, and Mock J J. Characterization of a planar artificial magnetic metamaterial surface[J]. *Phys Rev E*, 2006, 74(3): 036604.
- [6] Simovski C R. Metamaterials in electromagnetic[J]. *Metamaterials*, 2007, 1(1): 2, 1.
- [7] Semchenko I V, Khakhomov S A, and Tretyakov S A. Chiral metamaterial with unit negative refraction index[J]. *The European Physical Journal Applied Physics*, 2009, 46(3): 32607.
- [8] 叶红霞, 金亚秋. 一层随机分布的异向材料小椭球粒子的极化散射特征[J]. *电子与信息学报*, 2006, 28(1): 172-176.
- Ye Hong-xia and Jin Ya-qiu. Polarimetric scattering from a layer of random metamaterial small spheroids[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2006, 28(1): 172-176.
- [9] Smith D R, Vier D C, Koschny Th, and Soukoulis C M. Electromagnetic parameter retrieval from inhomogeneous metamaterials[J]. *Physical Review E*, 2005, 71(3): 036617.
- [10] Yang Rui, Xie Yong-jun, Yang Xiao-dong, Wang Rui, and Chen Bo-tao. Fundamental modal properties of SRR metamaterials and metamaterial based waveguiding structures[J]. *Optics Express*, 2009, 17(8): 6101-6117.
- [11] Yang R, Xie Y J, Li X F, Wang Y Y, Wang R, and Jiang J. Causality in the resonance behavior of metamaterials[J]. *Europhysics Letters*, 2008, 84(10): 1-6.

王 瑞: 女, 1985 年生, 硕士生, 研究新型人工材料、可调天线和频率选择表面等方面的研究。

谢拥军: 男, 1968 年生, 博士生导师, 研究方向为计算微波与计算电磁学、微波通信、电磁兼容及电波传播特性等。

杨 锐: 男, 1981 年生, 讲师, 从事新型人工材料和电磁场数值计算等方面的研究。