

## 基于球面交点的 AFM 算法的误差分析与改进方法

陈万通 秦红磊 丛丽 金天  
(北京航空航天大学电子信息工程学院 北京 100191)

**摘要:** 基于球面交点的模糊度函数法是一种利用 GPS 信号求解载体姿态的有效算法,但其成功率受观测噪声影响很大,针对这一问题,该文对该算法进行了误差分析并提出提高成功率的改进方法。首先将原算法推广到双差观测模型,然后分析噪声的统计特性和误差传播的特点,深入研究了其对姿态解算成功率的影响,最后通过整周模糊度识别算法降低求解过程对噪声的敏感性。实验表明:相比于原算法,改进算法有效地提高了 GPS 姿态解算的成功率,同时消除了原算法对公共时钟的限制。

**关键词:** 全球定位系统; 姿态解算; 模糊度函数法; 适应度函数

中图分类号: TN967.1

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2010)09-2220-06

DOI: 10.3724/SP.J.1146.2009.01278

## Error Analysis and Improvement of the Ambiguity Function Method Based on the Intersection Point on Sphere

Chen Wan-tong Qin Hong-lei Cong Li Jin Tian

(School of Electronic and Information Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China)

**Abstract:** The improved Ambiguity Function Method (AFM) method of intersection point on sphere is an effective algorithm for attitude determination using GPS signal, but the success rate is influenced by observation noise significantly. To deal this problem, in this paper, the error analysis is given and a further improvement method is proposed. First the original algorithm is extended under the double difference observation model. Then the statistical properties of noise and error propagation characteristics are both analyzed, which are followed by in-depth study of its affects to the success rate of attitude determination. Finally the noise sensitivity of the solution process is reduced by integer ambiguity recognition algorithm. The testing results show that the success rate of GPS attitude determination of the proposed algorithm increases greatly over that of the original algorithm while the restriction on public clocks is eliminated.

**Key words:** GPS; Attitude determination; Ambiguity Function Method (AFM); Adaptive function

### 1 引言

姿态测量一般应用于卫星、航天器、飞机、船舶、汽车等高动态的载体上,要求姿态测量系统具有精度高、实时性强、安装方便等特点。利用 GPS 信号进行姿态测量相比于惯性器件解算姿态具有体积小、成本低、无累积误差等优势,已经成为当前姿态测量的主要手段之一<sup>[1]</sup>。采用 GPS 载波相位双差模型能够削减电离层和对流层误差,轨道误差,卫星和接收机时钟误差,实现高精度的相对定位,进而完成姿态测量。但由于载波相位测量时存在观测信号的整周模糊度和整周跳变问题,成为当前该领域的技术难点<sup>[2]</sup>。目前解算整周模糊度的最有效方法主要有 LAMBDA<sup>[3]</sup>、OMEGA<sup>[4]</sup>、CTLS<sup>[5]</sup>等,但其要求准确剔除观测数据中的周跳,不利于实际应

用。模糊度函数法(AFM)只用到载波相位观测值的小数部分,对周跳不敏感,可以单历元姿态解算,缺点是计算量太大<sup>[2]</sup>。基于球面交点的模糊度函数法进行计算量的削减<sup>[6]</sup>,其采用双星解析法将姿态角的搜索域限制在球面的有限个点,从而减小了计算量<sup>[7]</sup>,并在高动态环境下取得了较好的效果<sup>[8]</sup>。但是,该算法并没有提高成功率,以及深入研究观测噪声统计特性对姿态解算成功率的影响。为此,本文以噪声对姿态解算的影响为背景,对该算法的成功率进行分析,并提出了进一步提高成功率的方法。

### 2 模糊度函数法(AFM)

对于以 A、B 两个天线为端点的短基线,其双差载波相位观测方程表述如下<sup>[9]</sup>:

$$\lambda(\nabla\Delta\varphi_{AB}^{ik} + \nabla\Delta N_{AB}^{ik}) = (\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_k)^T \cdot \mathbf{b} + v_{AB}^{ik} \quad (1)$$

其中  $\lambda$  是载波波长,  $\nabla\Delta\varphi_{AB}^{ik}$  是第  $i$  颗卫星到参考星  $k$  的双差载波相位观测值的小数部分,  $\mathbf{s}_i$  和  $\mathbf{s}_k$  分别

2009-09-25 收到, 2010-04-30 改回

国家 863 计划项目(2009AA12Z313)资助课题

通信作者: 陈万通 chenbnu@126.com

是接收机到卫星  $i$  和参考星  $k$  的单位矢量,  $\mathbf{b}$  是待求的基线矢量,  $\nabla\Delta N_{AB}^{ik}$  是未知的双差整周模糊度,  $v_{AB}^{ik}$  是观测噪声。AFM 算法的基本思想是对于正确的姿态角, 双差方程中的模糊度最接近整数。给定俯仰角  $\theta$  和航向角  $\psi$  以及基线长  $l$ , 则北东天坐标系下的基线坐标为

$$\mathbf{b} = [l \cos \theta \cos \psi \quad l \cos \theta \sin \psi \quad l \sin \theta]^T \quad (2)$$

整周模糊度的浮点解为

$$\nabla\Delta\tilde{N}_{AB}^{ik} = \frac{1}{\lambda}(\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_k)^T \cdot \mathbf{b} - \nabla\Delta\varphi_{AB}^{ik} \quad (3)$$

对于  $N$  个双差整周模糊度, AFM 算法将双差观测值适应度函数定义为

$$F(\theta, \psi) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \cos\left(2\pi\nabla\Delta\tilde{N}_{AB}^{ik}\right) \quad (4)$$

然后采用搜索策略, 针对  $\theta$  和  $\psi$  的角度范围, 选定步长, 则适应度函数的最大值所对应的  $(\theta, \psi)$  即为正确的姿态角, 步长越小, 则姿态角的精度越高, 但计算量也越大。

### 3 基于球面交点的 AFM 算法

#### 3.1 单差模型下的双星解析法

基于球面交点的 AFM 算法是一种减小 AFM 算法计算量的改进算法<sup>[8]</sup>。其采用双星解析法将候选姿态角限制在球面上有限个交点, 避免了全局搜索。其采用同一时钟的两台接收机进行姿态解算, 将载波相位观测值作单差就可以消除卫星和接收机时钟误差, 故采用两颗卫星的单差方程就可以求解出未知俯仰角和航向角的解析解。即

$$\left. \begin{aligned} \lambda(\Delta\varphi_{AB}^i + \Delta N_{AB}^i) &= \mathbf{s}_i^T \cdot \mathbf{b} \\ \lambda(\Delta\varphi_{AB}^j + \Delta N_{AB}^j) &= \mathbf{s}_j^T \cdot \mathbf{b} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式(5)中,  $\Delta\varphi_{AB}^i$  为单差载波相位观测值,  $\Delta N_{AB}^i$  为单差整周模糊度, 根据其存在的整数范围, 就可以求得所有可能的姿态角候选解。然后从中选出适应度函数的最大值所对应的姿态角, 即为正确解。

#### 3.2 双差模型下的三星解析法

对于使用不同时钟的两台接收机而言, 必须采用双差方程。求解候选姿态角至少需要 3 颗卫星, 指定其中一颗为参考星, 由得到的两个双差观测方程进行求解, 即三星解析法。与双星解析法不同的是用双差观测值取代单差观测值, 观测噪声会变大, 双差整周模糊度的范围变大, 解析法中需试验的组合数将增多, 而且, 需要使用不同卫星与参考星的方向单位矢量的差矢量进行计算, 这使得其最优星算法与单差情况下不同。为此, 给出基于双差观测方程下的候选姿态角的解析解求法。将式(1)中的

单位矢量差  $(\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_k)$  的北东天 3 个分量用方位角  $\alpha^{ik}$  和俯仰角  $\beta^{ik}$  表示。

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{ik} &= (\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_k) = \begin{pmatrix} s_N^{ik} & s_E^{ik} & s_U^{ik} \end{pmatrix}^T \\ &= |\mathbf{s}_{ik}| \cdot \begin{pmatrix} \cos \beta^{ik} \cos \alpha^{ik} & \cos \beta^{ik} \sin \alpha^{ik} & \sin \beta^{ik} \end{pmatrix}^T \end{aligned}$$

则  $i$  和  $j$  两颗卫星对参考星  $k$  的双差方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\lambda(\nabla\Delta\varphi_{AB}^{ik} + \nabla\Delta N_{AB}^{ik})}{|\mathbf{b}| \cdot |\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_k|} &= \langle \mathbf{e}_{ik}, \mathbf{e}_b \rangle \\ \frac{\lambda(\nabla\Delta\varphi_{AB}^{jk} + \nabla\Delta N_{AB}^{jk})}{|\mathbf{b}| \cdot |\mathbf{s}_j - \mathbf{s}_k|} &= \langle \mathbf{e}_{jk}, \mathbf{e}_b \rangle \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

其中  $\langle \mathbf{e}_{ik}, \mathbf{e}_b \rangle$  表示单位矢量的内积, 即有

$$\langle \mathbf{e}_{ik}, \mathbf{e}_b \rangle = \sin \theta \sin \beta^{ik} + \cos \beta^{ik} \cos \theta \cos(\alpha^{ik} - \psi)$$

给定  $\nabla\Delta N_{AB}^{ik}$  与  $\nabla\Delta N_{AB}^{jk}$  一组可能的整数值, 求解  $\theta$  和  $\psi$  的步骤如下, 令

$$O_1 = \frac{\lambda(\nabla\Delta\varphi_{AB}^{ik} + \nabla\Delta N_{AB}^{ik})}{|\mathbf{b}| \cdot |\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_k| \sin \beta^{ik}},$$

$$O_2 = \frac{\lambda(\nabla\Delta\varphi_{AB}^{jk} + \nabla\Delta N_{AB}^{jk})}{|\mathbf{b}| \cdot |\mathbf{s}_j - \mathbf{s}_k| \sin \beta^{jk}}$$

$$\phi = \alpha^{ik} - \psi, \Delta = \alpha^{jk} - \alpha^{ik}$$

那么由式(6)可以得到

$$\left. \begin{aligned} \cos \phi &= \tan \beta^{ik} \cdot (O_1 - \sin \theta)(\cos \theta)^{-1} \\ \sin \theta + \cot \beta^{ik} \cos \theta \cos(\phi + \Delta) &= O_2 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

进而整理可得

$$A = a \sin \theta + b \quad (8)$$

其中  $A = -\cot \beta^{jk} \cos \theta \sin \Phi \sin \Delta$ ,  $a = \cot \beta^{jk} \cdot \tan \beta^{ik} \cos \Delta - 1$ ,  $b = O_2 - \cot \beta^{jk} \cdot \tan \beta^{ik} O_1 \cos \Delta$ , 则有  $A^2 = (\cot \beta^{jk} \sin \Delta)^2 (\cos \theta)^2 (\sin \phi)^2$ 。

令  $B = (\cot \beta^{jk} \sin \Delta)^2$  并由三角函数公式  $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$ ,  $\sin^2 \phi = 1 - \cos^2 \phi$

展开整理得

$$A^2 = c \sin^2 \theta + d \sin \theta + e \quad (9)$$

其中  $c = -B/\cos^2 \beta^{ik}$ ,  $d = \tan^2 \beta^{ik} \cdot 2O_1 \cdot B$ ,  $e = (1 - \tan^2 \beta^{ik} \cdot O_1^2)B$ 。

将式(8), 式(9)联立, 令  $x = \sin \theta$ , 即有

$$(c - a^2)x^2 + (d - 2ab)x + (e - b^2) = 0 \quad (10)$$

然后利用求根公式即可求得根  $x_1, x_2$ 。

对于俯仰角  $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ , 那么  $\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta}$ , 则可代入式(7)求得  $\phi$  为

$$\phi = f(x_i) = \arccos\left((O_1 - x_i) \tan \beta^{ik} \cdot (1 - x_i^2)^{-1/2}\right) \quad (11)$$

则  $\psi = \alpha^{ik} \mp \phi$ , 即每个俯仰角可解得两个航向角, 考虑方程有两个根, 则该方程组会求得 4 组解。分别为

$$\begin{aligned}
 \text{(I)} \quad & \begin{cases} \theta = \arcsin x_1 \\ \psi = \alpha^{ik} - f(x_1) \end{cases}, & \text{(II)} \quad & \begin{cases} \theta = \arcsin x_1 \\ \psi = \alpha^{ik} - f(x_1) \end{cases} \\
 \text{(III)} \quad & \begin{cases} \theta = \arcsin x_2 \\ \psi = \alpha^{ik} - f(x_2) \end{cases}, & \text{(IV)} \quad & \begin{cases} \theta = \arcsin x_2 \\ \psi = \alpha^{ik} - f(x_2) \end{cases}
 \end{aligned}$$

事实上, 式(6)的解是以基线长为半径的球面上的两个圆的交点, 因此上述 4 个解中仅有两个解符合原方程, 不正确的解可以回代到原方程中剔除掉。由于  $\|\mathbf{e}_{ik}, \mathbf{e}_b\| \leq 1$ , 则可得到  $\nabla \Delta N_{AB}^{ik}$  与  $\nabla \Delta N_{AB}^{jk}$  的范围, 遍历每一种组合, 可以得到所有可能的姿态角解析解。以一组长度为 1.75 m 的短基线的实际数据为例, 其解分布如图 1 所示, 可见姿态角候选点的个数大大减少, 再从中筛选出最大适应度函数值所对应的姿态角, 如箭头所示。

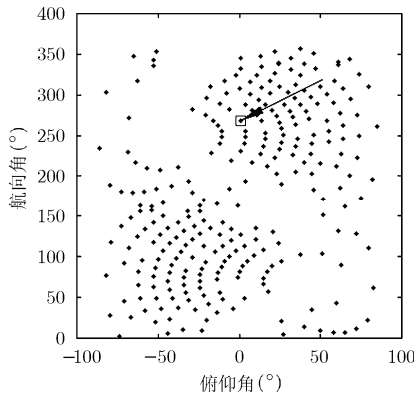


图 1 所有可能的姿态角

### 3.3 球面交点 AFM 算法流程

为了进一步提高姿态角的解算精度, 将该姿态角代入式(3)可以得到整周模糊度的浮点解, 将浮点解进行四舍五入可以得到模糊度的整数解, 已知全部卫星的整周模糊度, 就可以代入双差观测方程中, 采用最小二乘的方法, 计算高精度的基线向量, 然后求得高精度的姿态角。整体流程如图 2 所示。

## 4 误差分析

基于球面交点的 AFM 算法虽然减少了计算量, 但其对 AFM 算法的成功率尚未深入阐述, 只是对

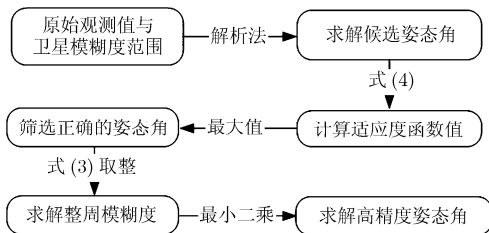


图 2 姿态测量流程图

单差观测方程下的双星解析法的误差做了定性分析<sup>[8]</sup>, 没有针对双差观测方程下的误差做分析, 也没有讨论误差对 AFM 算法的成功率的影响。下面将依次研究单差和双差观测量的噪声大小及其对 AFM 算法的各个关键步骤的误差影响。

### 4.1 噪声的统计特性研究

若接收机的载波相位测量方差为  $\sigma_\phi^2$ , 则单差载波相位的测量方差为  $2\sigma_\phi^2$ , 双差载波相位的测量方差为  $4\sigma_\phi^2$ , 一般认为  $\sigma_\phi$  为 0.025 周<sup>[10]</sup>, 则双差载波相位观测噪声的标准差为 0.05 周。对于  $m$  颗卫星, 单差载波相位观测矢量噪声的统计模型为

$$v_{AB}^{SD} \sim N(0, 2\sigma_\phi^2 \mathbf{I}_m) \quad (12)$$

双差载波相位观测矢量噪声的统计模型为

$$v_{AB}^{DD} \sim N(0, 2\sigma_\phi^2 (\mathbf{E}_{m-1} + \mathbf{I}_{m-1})) \quad (13)$$

其中  $\mathbf{E}_{m-1}$  为  $m-1$  阶全 1 矩阵,  $\mathbf{I}_{m-1}$  为  $m-1$  阶单位矩阵。双差观测值的方差不仅比单差增大 1 倍, 而且卫星之间存在相关。因此, 双差观测测量比单差观测测量对解析法的误差影响要大。此外, 仰角过低的卫星的观测噪声易偏离正态分布, 异常的概率也较大<sup>[11]</sup>。

### 4.2 噪声对解析解的影响

由式(6)可知,  $i$  和  $j$  两颗卫星对参考星  $k$  的观测噪声会分别对  $O_1$  和  $O_2$  产生影响, 式(10)中两个参数的计算不涉及  $O_1$  和  $O_2$ ,  $b$  参数与  $O_1$  和  $O_2$  都有关,  $d, e$  仅与  $O_1$  有关, 因此, 观测误差会影响一元二次方程的一次项和常数项, 最终使一元二次方程的根产生偏差。考虑到地面载体的俯仰角  $\theta$  比较小, 对式(6)求偏导

$$\frac{\partial \psi}{\partial (\nabla \Delta \varphi_{AB}^{ik})} \approx \frac{\lambda}{|\mathbf{b}| |\mathbf{s}_{ik}|} \cdot \frac{1}{\Gamma_1(\psi)} \quad (14)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial (\nabla \Delta \varphi_{AB}^{ik})} \approx \frac{\lambda}{|\mathbf{b}| |\mathbf{s}_{ik}|} \cdot \frac{1}{\Gamma_2(\psi)} \quad (15)$$

$$\Gamma_1(\psi) = \cos \beta^{jk} \sin(\alpha^{jk} - \psi) - \lambda \sin \beta^{jk} \sin(\alpha^{ik} - \psi)$$

$$\Gamma_2(\psi) = \lambda \cos \beta^{jk} \sin(\alpha^{jk} - \psi) - \sin \beta^{jk} \sin(\alpha^{ik} - \psi)$$

其中  $\lambda = \tan \beta^{ik}$ 。

若要降低噪声对姿态解析解的影响, 需要使偏导分母尽可能大, 可采取如下措施:

(1) 增加基线长度。缺点是会导致双差整周模糊度的存在范围变大, 式(6)需要试验的模糊度组合数变多, 增加了计算量。

(2) 增大  $|\mathbf{s}_{ik}|$ 。由于参考星一般选择仰角最高的, 则  $i$  星应该选择仰角较低的卫星, 但是仰角过低会导致观测噪声偏离正态, 而且  $|\mathbf{s}_{ik}|$  的改变会影响到  $\Gamma_1(\psi)$ ,  $\Gamma_2(\psi)$  的计算。

(3)增大  $\Gamma_1(\psi)$  和  $\Gamma_2(\psi)$ 。即尽量使  $\mathbf{s}_{ik}$  和  $\mathbf{s}_{jk}$  矢量的方位角分布在载体两侧, 从而使得  $\sin(\alpha^{ik} - \psi)$  和  $\sin(\alpha^{jk} - \psi)$  符号相反, 分母成同符号相加。

4.3 解析解误差传播

假设真实的姿态角为  $(\theta_0, \psi_0)$ , 解析法求得的姿态角为  $(\theta, \psi)$ , 则基线坐标的误差为

$$\delta \mathbf{b} = \mathbf{b} - \mathbf{b}_0 \quad (16)$$

设真实的双差载波相位为  $\nabla \Delta \tilde{\varphi}_{AB}^{ik}$ , 观测值为  $\nabla \Delta \varphi_{AB}^{ik}$ , 观测噪声为

$$\delta \varphi_{AB}^{ik} = \nabla \Delta \varphi_{AB}^{ik} - \nabla \Delta \tilde{\varphi}_{AB}^{ik} \quad (17)$$

则不考虑解析解误差和观测噪声, 真实的双差整周模糊度为

$$\nabla \Delta N_{AB}^{ik} = \frac{1}{\lambda} (\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_k)^T \cdot \mathbf{b}_0 - \nabla \Delta \tilde{\varphi}_{AB}^{ik} \quad (18)$$

则解析解误差和观测噪声导致模糊度偏差

$$\delta N_{AB}^{ik} = \frac{1}{\lambda} (\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_k)^T \cdot \delta \mathbf{b} - \delta \varphi_{AB}^{ik} \quad (19)$$

即整周模糊度的偏差与基线分量偏差和观测噪声的大小都有关系, 而基线分量偏差又是由观测噪声导致,  $\delta \varphi_{AB}^{ik}$  的方差为 0.05, 当  $\delta \mathbf{b}$  的偏差稍大时, 则会导致模糊度的计算值与真值有较大偏差, 最终导致正确解的适应度函数值小于非正确解的适应度函数值, 这时选取适应度函数最大值所对应的姿态角作为姿态解算结果将导致错误。具体如下:

(1)若  $|\delta N_{AB}^{ik}| \leq 0.5$ , 仅采用适应度最大值来评价正确解可能导致错误, 但若将模糊度浮点解  $\nabla \Delta \tilde{N}_{AB}^{ik}$  通过四舍五入取整映射成模糊度整数解, 不会产生错误, 即由全部的姿态角候选值映射到整周模糊度的候选值, 其中必包含着真实整周模糊度, 可以通过基线长度和俯仰角等信息进行筛选出正确解。

(2)当  $|\delta N_{AB}^{ik}| > 0.5$ , 由模糊度浮点解映射到整周模糊度会出现错误, 即噪声太大, 使整周模糊度的值也产生偏差。此时整周模糊度候选解中不包含正确解, 无论用什么方法也不能得到正确解, 必须避免此情况的发生。

以一组单基线数据进行说明: 基线长度为 1.754 m, 东西向水平放置, 输出频率为 1 Hz/s。以第 119 s 数据为例, 卫星可见数为 8 颗, 卫星编号分别为 16, 6, 31, 23, 32, 29, 20, 14, 仰角高度分别为  $68.0^\circ, 61.8^\circ, 31.8^\circ, 30.0^\circ, 28.5^\circ, 24.4^\circ, 17.1^\circ, 15.7^\circ$ , 以 16 号星为参考星, 观测数据如表 1 所示。

表 2 最右列为双差整周模糊度, 是采用 LAMBDA 算法得到的正确解, 同时得到基线的俯仰角为  $0.65^\circ$ , 航向角为  $267.74^\circ$ 。如果式(6)中给定的两个模糊度是正确的, 按照图 2 流程可以得到

所有卫星的整周模糊度在没有噪声的情况下也是全部正确的, 但由于不同卫星的观测噪声不同, 选取不同的卫星组合, 最终的解算结果可能不同。如表 2 所示(粗体为正确解)。

从数据计算结果可以看到, 当使用非参考星中仰角最高的 6 号和 31 号两颗星的模糊度进行计算时, 适应度函数较大的那组解与真实的姿态角非常接近, 由其得到的各个整周模糊度也正确。当采用仰角最低的 20 号和 14 号两颗星进行计算时, 可以

表 1 第 119 个历元的双差观测量

PRN	$\nabla \Delta \varphi_{AB}^{ik}$	$(\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_k)$	$\nabla \Delta N_{AB}^{ik}$
6	0.247070312	0.443517528	-7
		0.715568098	
		-0.054335108	
31	-0.502929688	0.768489172	3
		-0.30437852	
		-0.397908811	
23	0.391601562	-0.18904498	4
		-0.474857123	
		-0.440240846	
32	0.023437500	0.674259909	-10
		1.044717342	
		-0.458952619	
29	0.486328125	0.177705946	5
		-0.602792446	
		-0.523927900	
20	0.391601563	-0.60464528	-8
		0.851270507	
		-0.650607654	
14	-0.789062500	-0.771269994	-2
		0.316484324	
		-0.648917786	

表 2 不同卫星组合下的解算结果

卫星组合	模糊度	解析解	适应度	全部模糊度	
6, 31	-7, 3	$\theta_1$	-17.103	0.8095	-7,3,5,-9,
		$\Psi_1$	259.636		6,-5,1
		$\theta_2$	<b>0.3348</b>	<b>0.9282</b>	<b>-7,3,4,-10,</b>
		$\Psi_2$	<b>267.707</b>		<b>5,-8,-2</b>
23, 20	4, -8	$\theta_1$	-13.371	0.5562	-5,6,4,-6,
		$\Psi_1$	289.357		6,-8,-3
		$\theta_2$	<b>1.11176</b>	<b>0.7293</b>	<b>-7,3,4,-10,</b>
		$\Psi_2$	<b>266.558</b>		<b>5,-8,-2</b>
20, 14	-8, -2	$\theta_1$	-4.7250	0.3163	-7,4,4,-9,
		$\Psi_1$	<b>273.077</b>		<b>6,-8,-2</b>
		$\theta_2$	21.1135	0.0500	-7,0,3,-12,
		$\Psi_2$	252.780		2,-8,-2

看到适应度函数急剧下降，姿态角解析解的误差变大，由其计算其它星的整周模糊度也发生了错误。该组数据也验证了仰角低的卫星其噪声由于偏离正态，测量噪声往往会偏大。由 23 和 20 号星计算结果可以看出，相比于第一种组合，姿态角的偏差即使改变很小，适应度函数的计算值也会下降很多。即正确姿态角的适应度函数值很可能小于某个非正确的姿态角的适应度函数值，如第 1 种组合的第 1 组解析解。同时也发现，解析法给出的真实姿态角精度较低，由其得到模糊度浮点解的适应度大小也反映了浮点解的精度。

进一步研究噪声对适应度函数值的影响，将单历元内所有候选姿态角的适应度函数值由大到小进行排序，真实姿态角的适应度所处位置能够反映出该历元噪声的影响大小。即需要比较适应度最大值与真实姿态角的适应度以及排序位置情况。上例数据中 1 至 300 历元的比较结果如图 3 所示。可见，噪声在第 2 s, 103 s, 270 s, 300 s 附近对真实姿态角的适应度影响很大，函数值比最大值小 0.1 左右，出现的位置为 10 左右。其余历元基本上最大值就是真实姿态角的适应度。

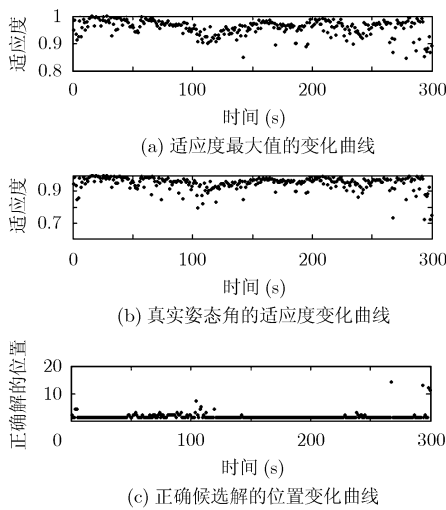


图 3 最大适应度与真实姿态角适应度比较

### 5 改进算法

虽然噪声会对适应度函数值和模糊度浮点解产生影响，只要保证浮点解映射成整周模糊度不出错误，就可以从整周模糊度的候选解中识别出正确的整周模糊度，进而获得高精度的姿态角。具体流程如图 4 所示。该流程中，有两个关键点，(1)必须保证整周模糊度的候选值包含着正确解，(2)能够有效地识别出该正确解。这里先假设模糊度候选值含有真值(具体方法后文将给出)，讨论识别算法。

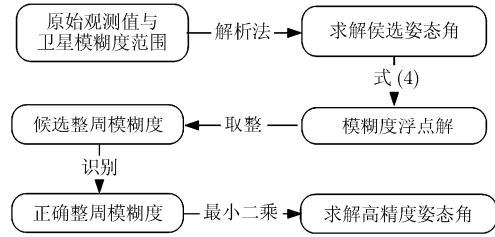


图 4 提高算法成功率的流程图

对于正确的整周模糊度，用其求得的基线向量，具有如下特征：

- (1)基线长度与真值的误差很小。
- (2)最小二乘残差最小或者接近最小。
- (3)对于地面载体，基线向量的俯仰角通常一般在  $\pm 10^\circ$  之间。

因此，可以首先按照适应度大小对模糊度候选解排序，然后根据特征(1)-特征(3)对模糊度候选解进行筛选，逐步缩小候选解范围。

对于特征(1)，若候选解得到的基线长度满足关系  $l - \delta l \leq |b| \leq l + \delta l$ ，则保留该候选值，否则暂不考虑。其中， $\delta l = 0.01 l$ 。图 5 为上例第 119 个历元利用基线约束对模糊度进行筛选的结果，其中，两条平行线代表了基线长度的上下界，位于其间的候选点需进行特征(2)，特征(3)的后续筛选。如果找不到候选解，则需要扩大  $\delta l$  的范围，重新进行特征(1)-特征(3)的筛选。若只用特征(2)筛选候选解，相比特征(2)，特征(3)同时考虑，成功率略有下降。下面讨论如何尽可能保证模糊度候选值包含着真实的整周模糊度。由 4.3 节可知，双星解析法中不同的卫星组合，对候选姿态角会产生不同的误差，当噪声过大时，将影响到整周模糊度。仰角过低 ( $< 20^\circ$ ) 的卫星的测量噪声易偏离正态出现异常值，所以双星解析法应先对其剔除，然后采用如下步骤进行选星：

- (1)计算各卫星与参考星的单位矢量差 ( $s_i - s_k$ ) 的方位角  $\alpha^{ik}$  和俯仰角  $\beta^{ik}$ 。
- (2)根据上一历元解算的航向角  $\psi$ ，筛选出  $\alpha^{ik} < \psi < \alpha^{jk}$  或  $\alpha^{ik} > \psi > \alpha^{jk}$  的  $(i, j)$  组合。
- (3)然后针对上述组合，分别计算  $T_1(i, j) =$

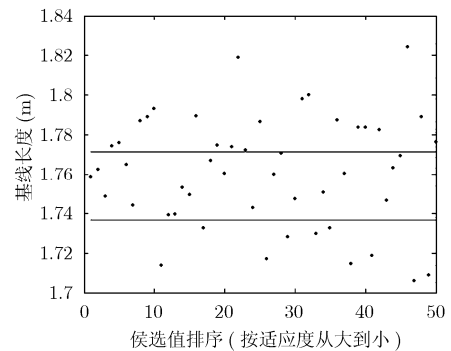


图 5 通过基线长度筛选模糊度候选值

$|s_{ik}| \cdot T_1(\psi)$  和  $T_2(i, j) = |s_{ik}| \cdot T_2(\psi)$ , 筛选出  $|T_1| + |T_2|$  最大的卫星组合。

例如, 对上例应用选星算法, 得到表 3 的几种组合, 可见第 2 颗和第 3 颗卫星组合的效果最好, 其真实姿态角的适应度为 0.93826, 且  $|T_1| + |T_2|$  越大, 则适应度越好, 进而说明模糊度浮点解的精度越高, 那么映射成整数解的出错概率越小, 即模糊度候选值中包含正确的整周模糊度的概率也越大。

表 3 第 119 s 数据选星算法结果

$i$	$j$	$T_1(i, j)$	$T_2(i, j)$	$ T_1  +  T_2 $	适应度
2	3	-0.50	0.68	1.18	0.93826
1	2	0.71	0.13	0.84	0.9282
3	4	0.39	-0.35	0.74	0.89696
3	5	0.29	-0.29	0.58	0.81496
4	5	0.17	0.31	0.48	0.45085

## 6 实际数据测试

为测试改进算法的成功率, 分别进行了 3 组实验, 接收机的 OEM 板采用 NovAtel 公司的 SuperStar II, 第 1 组数据采用扼流圈天线, 具有抗多径功能, 第 2, 3 两组数据采用普通 GPS 天线。每组数据均随机连续选取 400 个历元, 分别采用原算法和改进算法进行姿态解算, 实验结果如表 4 所示。

表 4 算法成功率比较

组别	卫星数	基线长度(m)	俯仰角约束( $^{\circ}$ )	改进算法的成功率(%)	原算法成功率(%)
1	7	2	20	100	98.8
			无	99.8	84
2	10	1.987	10	99.5	86
			无	89.5	67.5
3	8	1.754	10	99.3	80.5
			无	97.3	64

从上述结果可以看出, 采用扼流圈的天线成功率明显高于普通天线, 这说明噪声对姿态解算结果的影响很大; 采用俯仰角约束的姿态解算成功率明显优于无俯仰角的情况, 可以用该约束条件提高地面载体姿态解算的成功率; 对于 3 组数据, 改进算法的成功率均明显优于原算法的成功率。

## 7 结束语

基于球面交点的模糊度函数法是一种单历元载体姿态的算法, 与原模糊度函数法相比, 计算量大大减小, 但未提高算法成功率, 同时又要求两台接收机采用公共时钟。本文研究了原算法在双差模型下的表达形式, 克服了采用公共时钟的限制, 然后

对噪声的统计特性和误差传播特性进行了分析, 提出了一种改进算法, 削弱了观测噪声对姿态角解算的影响。实际数据测试表明, 改进算法可以有效地提高姿态解算的成功率。

## 参考文献

- [1] Rush John. Current issues in the use of the global positioning system aboard satellites[J]. *Acta Astronautica*, 2000, 47(7): 377-387.
- [2] Xia Kewen, Zhang Xinying, and Gao Jinyong, *et al.* Study on GPS attitude determination technology based on QPSO algorithm[C]. Proceedings of the 7th World Congress on Intelligent Control and Automation, Chongqing, China, June 25-27, 2008: 1869-1873.
- [3] Monikes R, Wendel J, and Trommer G F. A modified Lambda method for ambiguity resolution in the presence of position domain constraints[C]. Proc. 18th Int. Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation, Long Beach, California, USA, 2005: 81-87.
- [4] Kim D and Langley R B. An optimized least squares technique for improving ambiguity resolution performance and computational efficiency[C]. Proceedings of ION GPS'99, Nashville, Tennessee, 1999, 9, 14-17: 1579-1588.
- [5] Tsai Chin-lang and Kao Wei-wen. Constrained total least-square solution for GPS compass attitude determination[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2006, 183(5): 106-118.
- [6] Wang Yong-quan, Zhan Xing-qun, and Zhang Yan-hua. Improved ambiguity function method based on analytical resolution for GPS attitude determination[J]. *Measurement Science and Technology*, 2007, 18(9): 2986-2990.
- [7] Jin Wen-rui and Zhai Chuan-run, *et al.* Hybrid analytical resolution approach based on ambiguity function for attitude determination [J]. *Journal of Zhejiang University. Science A*, 2009, 10(7): 1038-1048.
- [8] 王永泉. 长航时高动态条件下 GPS/GLONASS 姿态测量研究[D]. [博士论文], 上海交通大学, 2008.  
Wang Yong-quan. GPS/GLONASS attitude determination research under long endurance and high dynamic conditions [D]. [Ph.D. dissertation], Shanghai Jiaotong University, 2008.
- [9] Hofmann-Wellenhof. GNSS-Global Navigation Satellite Systems GPS, GLONASS, Galileo, and more[M]. Springer Wien, New York, 2008: 227-234.
- [10] Misra P and Enge P. Global Positioning System: Signals, Measurements, and Performance[M]. 2nd ed. Ganga-Jamuna Press, Lincoln MA, 2006: 238-239.
- [11] Tiberius C C J M and Borre K. Are GPS data normally distributed? [C]. In: Geodesy beyond 2000. The challenges of the first decade, IAG General Assembly, Birmingham, July 19-30, 1999, Vol. 121: 243-248.

陈万通: 男, 1986 年生, 硕博连读生, 研究方向为卫星导航、姿态测量。

秦红磊: 男, 1975 年生, 副教授, 研究方向为卫星导航、自动测试系统。

丛丽: 女, 1981 年生, 博士后, 研究方向为组合导航、JTIDS 等。

金天: 男, 1981 年生, 讲师, 研究方向为 GPS 软件接收机。