

## SAR 图像去噪的分数阶多尺度变分 PDE 模型及自适应算法

张 军<sup>①</sup> 韦志辉<sup>②</sup>

<sup>①</sup>(南京理工大学理学院 南京 210094)

<sup>②</sup>(南京理工大学计算机科学与技术学院 南京 210094)

**摘 要:** 在合成孔径雷达(SAR)图像相干斑噪声抑制中,保持图像的边缘和纹理是非常重要的。该文首先利用分数阶导数和负指数 Sobolev 空间对图像进行建模,建立了分数阶多尺度变分偏微分方程(PDE)模型,然后给出了模型参数自适应选择方法,并在此基础上提出了区域、尺度自适应的去噪算法。数值实验表明,新方法能在去除噪声,抑制图像的“阶梯效应”,保持图像的边缘、纹理细节几个方面取得较好的效果。

**关键词:** 合成孔径雷达;相干斑噪声抑制;分数阶导数;多尺度;细节保持;阶梯效应

中图分类号: TN957.52

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2010)07-1654-06

DOI: 10.3724/SP.J.1146.2009.00894

## Fractional-Order Multi-scale Variation PDE Model and Adaptive Algorithm for SAR Image Denoising

Zhang Jun<sup>①</sup> Wei Zhi-hui<sup>②</sup>

<sup>①</sup>(School of Science, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China)

<sup>②</sup>(School of Computer Science and Technology, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China)

**Abstract:** In the processing of Synthetic Aperture Radar (SAR) image speckle noise reduction, maintaining the edges and textures of image are very important. This paper proposes a fractional-order multi-scale Partial Differential Equation (PDE) model by modeling the image with fractional-order derivative and negative Sobolev space, and then gives the adaptive selection method for the model parameters and the region-scale adaptive algorithm for SAR image denoising. Numerical experiments show that the new method can achieve better results in removing the noise, restraining the staircase effect and preserving edges and textures.

**Key words:** Synthetic Aperture Radar (SAR); Speckle noise removal; Fractional-order derivative; Multi-scale; Detail preserving; Staircase effect

### 1 引言

合成孔径雷达(SAR)由于成像机制的缘故,在成像中不可避免地受到相干斑噪声的污染,相干斑噪声是造成SAR图像质量下降的主要原因之一。在SAR图像去噪中,传统方法如Lee滤波、小波去噪等在去除噪声方面表现较好,但是会模糊图像的细节。近年来,基于偏微分方程(PDE)的方法由于能较好地保持图像的边缘,成为SAR图像去噪的研究热点。2008年,Aubert等人针对服从Gamma分布的相干斑噪声,提出了去噪的AA模型<sup>[1]</sup>,Huang还研究了AA模型的快速算法<sup>[2]</sup>。AA模型能有效地去除相干斑噪声,较好地保持边缘,但对于图像纹理保持不好,

在灰度变化不大的区域容易产生“阶梯效应”。

针对SAR图像去噪中的纹理保持及“阶梯效应”抑制,本文利用分数阶导数和负指数Sobolev空间建模,提出一种新的分数阶多尺度SAR图像去噪变分PDE模型,并利用图像局部方差等统计特征以及小波分解后的小波系数与函数正则性之间的关系给出了模型参数自适应选择方法,在此基础上提出了自适应去噪算法。理论分析和实验表明,这种新的方法可以在图像的非纹理区域有效去除噪声及抑制“阶梯效应”,在图像的边缘、纹理区域可以较好地保持图像的边缘和纹理。

### 2 分数阶多尺度模型的提出

相干斑噪声一般作为乘性噪声来建模,2008年,Aubert和Aujol提出了以Gamma分布为噪声先验的乘性噪声去噪模型,即AA模型<sup>[1]</sup>。

$$\min_{u \in S\Omega} \left\{ F(u) = |u|_{BV} + \lambda \int_{\Omega} (\log u + f/u) dx dy \right\} \quad (1)$$

2009-06-19 收到,2010-03-09 改回

国家 863 计划项目(2007AA12E142)和高等学校博士学科点专项科研基金(200802880018)资助课题

通信作者:张军 phil\_zj@163.com

其中  $f$  为观测图像,  $u$  为待求的近似图像,  $S(\Omega) := \{u \in \text{BV}(\Omega), u > 0\}$ ,  $\text{BV}(\Omega)$  为定义在区域  $\Omega$  上的有界变差(Bounded Variation, BV)函数空间。AA 模型对于图像边缘保持比较好, 但对于图像的纹理保持不好, 而且容易出现块状的“阶梯效应”。

蒲亦非等人研究表明分数阶导数有利于刻画纹理<sup>[3]</sup>。针对加性噪声去噪, Bai 等人在 P-M 方程基础上研究了基于 Fourier 变换的分数阶导数去噪方法<sup>[4]</sup>, 在阶梯效应抑制方面取得了较好的效果, 但计算量太大, 模型参数也是人工选择, 不利于实际应用。本文针对乘性噪声抑制, 在 AA 模型基础上, 采用新的分数阶导数来对图像建模。

目前分数阶导数的定义并不统一, 本文采用 Grmwald-Letnikov 的分数阶导数定义<sup>[5]</sup>。利用 Grmwald-Letnikov 定义的  $\alpha$  ( $\alpha > 0$ ) 阶导数算子  $D^\alpha$  代替 AA 模型中的一阶导数算子, 可得到下面的分数阶变分模型:

$$\min \left\{ E(u) = \int_{\Omega} |D^\alpha u| \, dx dy + \lambda \int_{\Omega} (\log u + f/u) \, dx dy \right\} \quad (2)$$

其中  $|D^\alpha u| = \sqrt{(D_x^\alpha u)^2 + (D_y^\alpha u)^2}$ ,  $D_x^\alpha u$  和  $D_y^\alpha u$  分别为  $u$  关于  $x$  和  $y$  的  $\alpha$  阶偏导数。特别地, 当  $\alpha = 1$  时, 式(2)就是 AA 模型。利用变分法, 可得到式(2)的 Euler-Lagrange 方程为

$$u \cdot H^\alpha(u) - \lambda \cdot \frac{f-u}{u} = 0 \quad (3)$$

其中  $H^\alpha(u) = (-1)^\alpha [\bar{D}_x^\alpha (D_x^\alpha u / |D^\alpha u|) + \bar{D}_y^\alpha (D_y^\alpha u / |D^\alpha u|)]$ ,  $\bar{D}^\alpha$  为分数阶导数算子  $D^\alpha$  的共轭算子<sup>[5]</sup>。

已有研究表明负指数 Sobolev 空间有利于对图像纹理的建模<sup>[6]</sup>。在式(3)中,  $(f-u)/u$  实际包含了图像的噪声及纹理, 由于纹理是具有多尺度的, 因此本文考虑用不同的负指数 Sobolev 空间对纹理的不同尺度部分进行建模。首先利用正交小波分解与重构, 得到  $\lambda(f-u)/u$  在不同尺度下的子图像  $[\lambda(f-u)/u]_j$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, L$ , 然后用负指数 Sobolev 空间  $H^{-s_j}$  对各尺度子图像进行建模。根据 Sobolev 空间的多尺度分析<sup>[7]</sup>, 可将式(3)改进为下面的分数阶多尺度变分 PDE 模型:

$$u \cdot H^\alpha(u) - \sum_{j=0}^L 2^{-2js_j} \left[ \frac{\lambda(f-u)}{u} \right]_j = 0 \quad (4)$$

其中  $0 \leq s_j \leq 1$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, L$  为各尺度对应的负指数 Sobolev 空间  $H^{-s_j}$  的空间参数。

引入时间变量, 设初值为  $u(x, y; 0) = f(x, y)$ , 利用梯度下降法将式(4)的求解转化为求解下面的偏微分方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \cdot H^\alpha(u) + \sum_{j=0}^L 2^{-2js_j} \left( \lambda \cdot \frac{f-u}{u} \right)_j \quad (5)$$

### 3 参数自适应选择

#### 3.1 正则化参数 $\lambda$ 的选择

对于图像中每一点对应的正则化参数  $\lambda$ , 考虑用该点邻域中的信息来确定<sup>[8,9]</sup>, 并在迭代中更新<sup>[10]</sup>。设

$$\lambda(x, y) = \int_{\Omega} \tilde{\lambda}(\tilde{x}, \tilde{y}) w_{x,y}(\tilde{x}, \tilde{y}) \, d\tilde{x} d\tilde{y} \quad (6)$$

其中  $w_{x,y}(\tilde{x}, \tilde{y}) = w(|x - \tilde{x}|, |y - \tilde{y}|)$  是一个规范化径向对称的光滑窗口函数, 满足  $\int_{\Omega} w_{x,y}(\tilde{x}, \tilde{y}) \, d\tilde{x} d\tilde{y} = 1$ 。

本文用规范化 Gauss 函数作为窗口函数。  $\tilde{\lambda}$  是结合图像、噪声先验的待定函数。

利用式(4), 式(6)以及正交小波分解, 可得

$$\int_{\Omega} \sum_{j=0}^L 2^{2js_j} [u \cdot H^\alpha(u)]_j \left( \frac{f-u}{u} \right) \, dx dy = \int_{\Omega} \tilde{\lambda}(x, y) \left[ \int_{\Omega} w_{x,y}(\tilde{x}, \tilde{y}) \left( \frac{f-u}{u} \right)^2 \, d\tilde{x} d\tilde{y} \right] \, dx dy \quad (7)$$

该等式成立的充分条件为

$$\tilde{\lambda}(x, y) = (f-u) \sum_{j=0}^L 2^{2js_j} [u \cdot H^\alpha(u)]_j \left/ [u \cdot P_u(x, y)] \right. \quad (8)$$

其中  $P_u(x, y) = \int_{\Omega} w_{x,y}(\tilde{x}, \tilde{y}) [(f-u)/u]^2 \, d\tilde{x} d\tilde{y}$ 。注意到  $w_{x,y}(\tilde{x}, \tilde{y})$  的性质, 可以得到

$$\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} P_u(x, y) \, dx dy = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \left( \frac{f-u}{u} \right)^2 \, dx dy = k\sigma^2 \quad (9)$$

其中  $\sigma^2$  为噪声方差, 在实际中  $(f-u)/u$  还包含有纹理信息, 因此  $k \geq 1$ 。式(9)表明  $k\sigma^2$  是  $P_u(x, y)$  的平均值。在图像的非纹理区域,  $P_u(x, y) \approx \sigma^2 < k\sigma^2$ , 而在纹理区域, 受纹理影响,  $P_u(x, y) \gg k\sigma^2$ 。对于  $P_u(x, y)$  的估计, 首先得到 AA 模型的去噪图像  $u_{AA}$  及残差图像  $v_{AA} = (f - u_{AA})/u_{AA}$ , 然后计算  $P_{u_{AA}}(x, y)$  及  $k_{AA} = \text{var}(v_{AA})/\sigma^2$ , 其中  $\text{var}(\cdot)$  为求方差。得到  $\tilde{\lambda}$  的估计为

$$\bar{\lambda}(x, y) = \frac{(f-u) \sum_{j=0}^L 2^{2js_j} [u \cdot H^\alpha(u)]_j}{u \cdot (k_{AA} \cdot \sigma^2)} \cdot \frac{P_{u_{AA}}(x, y)}{k_{AA} \cdot \sigma^2} \quad (10)$$

并根据式(6) ( $\tilde{\lambda}$  换成  $\bar{\lambda}$ ) 得到  $\lambda$ 。这样在非纹理区域, 由于  $P_{u_{AA}} < k_{AA} \cdot \sigma^2$ , 因此得到的  $\lambda$  值较小, 从而去噪能力增强; 而在纹理区域, 由于  $P_{u_{AA}} \gg k_{AA} \cdot \sigma^2$ , 因此  $\lambda$  较大, 从而更好地保持细节。

#### 3.2 分数阶导数阶数 $\alpha$ 的选择

Bai 等人的研究表明<sup>[5]</sup>, 分数阶导数阶数  $\alpha > 1$  时可以较好抑制“阶梯效应”,  $\alpha$  太大时, 纹理保持也较好, 但去噪效果会降低。本文中在图像的非纹理区域, 为了较好地去噪并抑制“阶梯效应”, 应取  $\alpha$  接近并略大于 1, 而在纹理区域, 为了保持纹理, 可以取  $\alpha$  稍大一些。由于在纹理区域  $P_{u_{AA}}(x, y) \geq$

$k_{AA} \cdot \sigma^2$ , 在非纹理区域  $P_{u_{AA}}(x, y) < k_{AA} \cdot \sigma^2$ , 因此取  $\alpha$  为

$$\alpha = \begin{cases} \alpha_1, & P_{u_{AA}}(x, y) < k_{AA} \cdot \sigma^2 \\ \alpha_2, & P_{u_{AA}}(x, y) \geq k_{AA} \cdot \sigma^2 \end{cases} \quad (11)$$

其中  $1 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 2$ 。综合考虑去噪、抑制“阶梯效应”和纹理保持, 建议取  $\alpha_1 = 1.2$ ,  $\alpha_2 = 1.5$ 。

### 3.3 Sobolev 空间指数 $s_j$ 的选择

事实上, 负指数 Sobolev 空间指数是对函数奇异性的度量。而函数奇异性还可以用 Lipschitz 指数  $\beta$  来度量, 而且两者差异并不大。在小波多尺度分析理论中, 常常利用小波系数的幅值来度量函数的正则性<sup>[8]</sup>, 函数  $f(x, y)$  的各尺度部分的 Lipschitz 指数  $\beta_j$  的估计如下:

$$\beta_j = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} \log_2 \left( \frac{\max |W_{2^j}|}{\max |W_{2^{j-1}}|} \right) - 1 \right], \quad j = 1, 2, \dots, L \quad (12)$$

其中  $W_{2^j} f$  为  $f$  在  $2^j$  尺度下的小波系数。

在本文中先将  $\lambda(f - u)/u$  进行  $L + 1$  次正交小波分解, 得到各层小波系数, 然后按照式(12)计算各尺度对应的 Lipschitz 指数  $\beta_j$ , 并利用  $\beta_j$  来估计  $s_j$ 。考虑到取值范围 ( $0 \leq s_j \leq 1$ ), 取

$$s_j = \begin{cases} 0, & j = 0 \text{ 或 } (-\beta_j) < 0 \\ 1, & j > 0 \text{ 和 } (-\beta_j) > 1 \\ -\beta_j, & j > 0 \text{ 和 } 0 < (-\beta_j) < 1 \end{cases}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, L \quad (13)$$

## 4 算法描述

对大小为  $N \times N$  的图像  $u = [u(i, j)]_{i,j=1}^N$ , 令  $i, j < 1$  或  $i, j > N$  时,  $u_{i,j} = 0$ 。则  $D_x^\alpha u$  和  $D_y^\alpha u$  的离散化算子  $\Delta_x^\alpha u$  和  $\Delta_y^\alpha u$  分别为

$$\left. \begin{aligned} (\Delta_x^\alpha u)_{i,j} &= \sum_{k=0}^{K-1} (-1)^k \binom{\alpha}{k} u(i-k, j) \\ (\Delta_y^\alpha u)_{i,j} &= \sum_{k=0}^{K-1} (-1)^k \binom{\alpha}{k} u(i, j-k) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

则

$$\begin{aligned} [H^\alpha(u)]_{i,j} &= \sum_{k=0}^{K-1} (-1)^k \binom{\alpha}{k} p_1(i+k, j) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{K-1} (-1)^k \binom{\alpha}{k} p_2(i, j+k) \end{aligned} \quad (15)$$

其中  $p_1(i, j) = \frac{(\Delta_x^\alpha u)_{i,j}}{\sqrt{(\Delta_x^\alpha u)_{i,j}^2 + (\Delta_y^\alpha u)_{i,j}^2 + \varepsilon^2}}$ ,  $p_2(i, j) =$

$\frac{(\Delta_y^\alpha u)_{i,j}}{\sqrt{(\Delta_x^\alpha u)_{i,j}^2 + (\Delta_y^\alpha u)_{i,j}^2 + \varepsilon^2}}$ , 其中  $\varepsilon^2$  为一个很小的常数, 主要保证分母不为零。对于  $1 \leq \alpha \leq 2$ , 广义二

项式系数随着  $k$  的增大非常迅速地衰减趋于零, 因此实际计算时,  $K$  不需要取太大, 本文取  $K = 20$ 。从而式(5)的离散迭代格式为

$$u^{(n+1)} = u^{(n)} + \Delta t \cdot \left[ -u^{(n)} \cdot H^\alpha(u^{(n)}) + \sum_{j=0}^L 2^{-2js_j} \left( \lambda \cdot \frac{f - u^{(n)}}{u^{(n)} + \varepsilon^2} \right)_j \right] \quad (16)$$

在式(16)迭代过程中, 将参数  $\alpha, \lambda$  及  $s_j = 0, j = 0, 1, \dots, L$  在迭代中自适应更新, 则可得到求解分数阶多尺度变分 PDE 模型的自适应算法步骤如下:

**步骤 1** 取初值  $u^{(0)} = f$ , 参数  $\alpha = 1, s_j = 0 (j \geq 0)$  以及固定的参数  $\lambda$ , 按式(16)进行迭代计算, 经过  $M$  次迭代后得到 AA 模型去噪及残差图像  $u_{AA} = u^{(M)}, v_{AA} = (f - u_{AA})/u_{AA}$ 。将  $v_{AA}$  零均值化后, 与规范化 Gauss 模板作卷积运算, 得到  $P_{u_{AA}}$ , 并根据式(11)计算  $\alpha$ 。

**步骤 2** 重新设定初值  $u^{(0)} = f, \lambda^{(0)} = 0, s_j^{(0)} = 0, j = 0, 1, 2, \dots, L$ , 给定参数  $\Delta t$  和  $\varepsilon$ 。假设  $u^{(n)}, \lambda^{(n)}, s_j^{(n)} = 0, j = 0, 1, 2, \dots, L$  都已经得到。

**步骤 3** 利用正交小波, 将  $u^{(n)} \cdot H^\alpha(u^{(n)})$  进行  $L$  次小波分解, 并利用各尺度系数进行单枝重构得到  $[H^\alpha(u^{(n)})]_j, j = 0, 1, \dots, L$ , 根据式(6)和式(10)计算  $\bar{\lambda}^{(n+1)}$  和  $\lambda^{(n+1)}$ 。

**步骤 4** 利用正交小波, 对  $\lambda^{(n+1)}(f - u^{(n)})/(u^{(n)} + \varepsilon^2)$  进行小波分解, 根据式(12), 式(13)更新得到  $s_j^{(n+1)}$ , 并利用小波单枝重构得到  $[\lambda^{(n+1)}(f - u^{(n)})/(u^{(n)} + \varepsilon^2)]_j, j = 1, 2, \dots, L$ 。

**步骤 5** 计算  $u^{(n+1)} = u^{(n)} + \Delta t \cdot \left[ -u^{(n)} \cdot H^\alpha(u^{(n)}) \right.$

$\left. + \sum_{j=0}^L 2^{-2js_j^{(n+1)}} \left( \lambda^{(n+1)} \frac{f - u^{(n)}}{u^{(n)} + \varepsilon^2} \right)_j \right]$ , 当  $u^{(n+1)}$  满足给定的

迭代终止条件时, 迭代终止; 否则, 令  $n := n + 1$ , 转步骤 3。

在计算复杂度方面, 对于一幅大小为  $N \times N$  的图像, 当模型参数固定时, 计算 AA 模的梯度下降法的每次迭代的计算量为  $O(N^2)$ 。本文方法由于考虑到了参数自适应, 计算量比固定参数的梯度下降法要大, 增加的计算量主要体现在下面几个方面:

(1) 参数  $\lambda$  自适应导致的计算量增加。这部分主要由算法的步骤 1, 以及算法中涉及的与规范化 Gauss 模板作的卷积运算所产生。由于在步骤 1 中只需要利用固定参数的梯度下降法进行少数的有限次迭代即可, 因此增加计算量阶数仍为  $O(N^2)$ ; 当规范化 Gauss 模板窗口比较小时, 与它作的卷积运算增加的计算量为  $O(N^2)$ 。这两部分总体阶数仍为

$O(N^2)$ 。

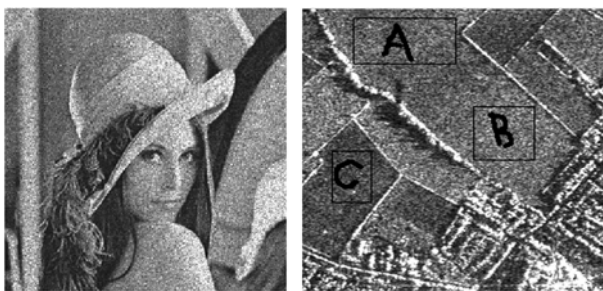
(2)参数  $s_j$  自适应导致的计算量增加。这部分计算量主要由算法中的两次小波分解与重构产生(当  $s_j = 0, j = 0, 1, 2, \dots, L$  时, 不需要进行小波分解与重构的计算)。由于每次二维小波变换的计算量为  $O(N^2)$ , 因此这部分总体增加的计算量仍为  $O(N^2)$ 。

(3)计算分数阶导数导致的计算量增加。在计算分数阶差分的式 (15) 中, 当  $\alpha = 1.0$  时,  $K \equiv 2$ , 此时计算量为  $O(N^2)$ ; 而当  $\alpha$  取非整数时, 计算分数阶差分的计算量为  $K \cdot O(N^2)$ , 但计算量阶数仍为  $O(N^2)$ 。

由于参数自适应的需要, 虽然每次迭代中本文的算法比固定参数的梯度下降算法的计算量要多  $O(N^2)$ , 但总的计算量和固定参数时的梯度下降法的计算量仍是同阶的。

## 5 数值实验与分析

分别对一幅人工加噪图像和一幅真实 SAR 图像, 用自适应 Lee 滤波, AA 模型及本文方法进行去噪进行处理和比较。待处理实验图像如图 1 所示, 其中图 1(a)是对 Lena 图像人工加入均值为 0, 方差为  $\sigma^2 = 0.04$  的服从 Gamma 分布的乘性噪声后的图像; 图 1(b)是真实的 SAR 图像, 噪声方差未知, 图 1(b)中 A, B, C 3 个区域是实验中用于比较等效视数的区域。本文算法中参数  $\Delta t = 0.1$ ,  $L = 3$ ,  $\varepsilon = 10^{-10}$ , 正交小波都选用 Db4 正交小波, 规范化 Gauss 模板窗口大小取为  $9 \times 9$ 。在自适应 Lee 滤波中, 取窗口大小为  $5 \times 5$ 。



(a) 实验图像 1

(b) 实验图像 2

图 1 待处理实验图像

**实验 1** 对于实验图像 1, 该图像的干净图像及噪声方差都是已知的, 本文采用峰值信噪比(PSNR)作为衡量去噪效果的定量指标。在 3 种方法中, 都是以  $\text{PSNR}(u^{(n+1)}) < \text{PSNR}(u^{(n)})$  为迭代终止条件。去噪及残差图像如图 2 所示, 其中第一排为去噪图像  $u^{(n)}$ , 第 2 排为去噪的残差图像  $(f - u^{(n)})/u^{(n)} + 100$  (这里为更清楚显示残差图像, 给残差图像增

加了亮度 100), 第 3 排为去噪图像的局部放大图。表 1 中列出了对应图 2 的去噪图像的峰值信噪比的比较。

表 1 实验图像 1 去噪图像 PSNR 比较

	原图像	自适应 Lee 滤波	AA	本文方法
PSNR	19.0959	26.7535	27.7593	27.8881

从去噪及残差图像比较可以看到, Lee 滤波在非纹理区域去噪效果最好, 但边缘、纹理模糊严重, AA 模型能较好地保持边缘, 但纹理信息保持不好; 本文方法在边缘和纹理保持方面都比较好。从峰值信噪比的比较可以看到, 本文方法得到的峰值信噪比是最大的。从局部放大图的比较可以看到, Lee 滤波不存在“阶梯效应”, 对于边缘模糊严重; AA 模型具有较明显的“阶梯效应”; 而本文方法可以较好地保持细节, 同时能有效抑制“阶梯效应”。

**实验 2** 对实验图像 2 的真实 SAR 图像, 该图像噪声未知, 本文利用 Donoho 的噪声估计方法<sup>[1]</sup>来进行估计噪声标准差, 即

$$\hat{\sigma} = \text{Mid}_{\text{HH}}/0.6745$$

其中  $\text{Mid}_{\text{HH}}$  为图像小波分解的最高频的 HH 子带小波系数的幅度中值。本文取  $\text{Mid}_{\text{HH}}$  为 AA 模型去噪残差图像小波分解的最高频 HH 子带小波系数的幅度中值。

由于干净的原始图像不知道, 因此不能用 PSNR 来比较去噪效果, 这里采用等效视数来比较去噪效果。等效视数定义为

$$\text{ENL} = E(I_s)^2 / \text{Var}(I_s)$$

其中  $I_s$  为图像中的选定的平坦区域,  $E(I_s)$ ,  $\text{Var}(I_s)$  分别为该平坦区域的均值和方差。

为比较边缘保持效果, 这里采用边缘保持指数来进行比较。边缘保持指数 EPI 定义为

$$\text{EPI} = \frac{\sum \sqrt{(u_s(i, j) - u_s(i+1, j))^2 + (u_s(i, j) - u_s(i, j+1))^2}}{\sum \sqrt{(u_0(i, j) - u_0(i+1, j))^2 + (u_0(i, j) - u_0(i, j+1))^2}}$$

其中  $u_s$  为去噪后图像,  $u_0$  是去原始图像的像元值, 在 EPI 定义中  $u_s(i, j)$  和  $u_0(i, j)$  都是在图像梯度变化迅速的区域的像元中选择的样本点。EPI 最大值为 1, 最小值为 0, EPI 的值越大, 表明边缘保持能力越强。

图 3 中列出实验图像 2 的去噪及残差图像的比较。表 2 中列出了对应实验图像 2 中 A, B, C 3 个区域的等效视数、3 种方法的边缘保持指数 EPI 及迭代数的比较。

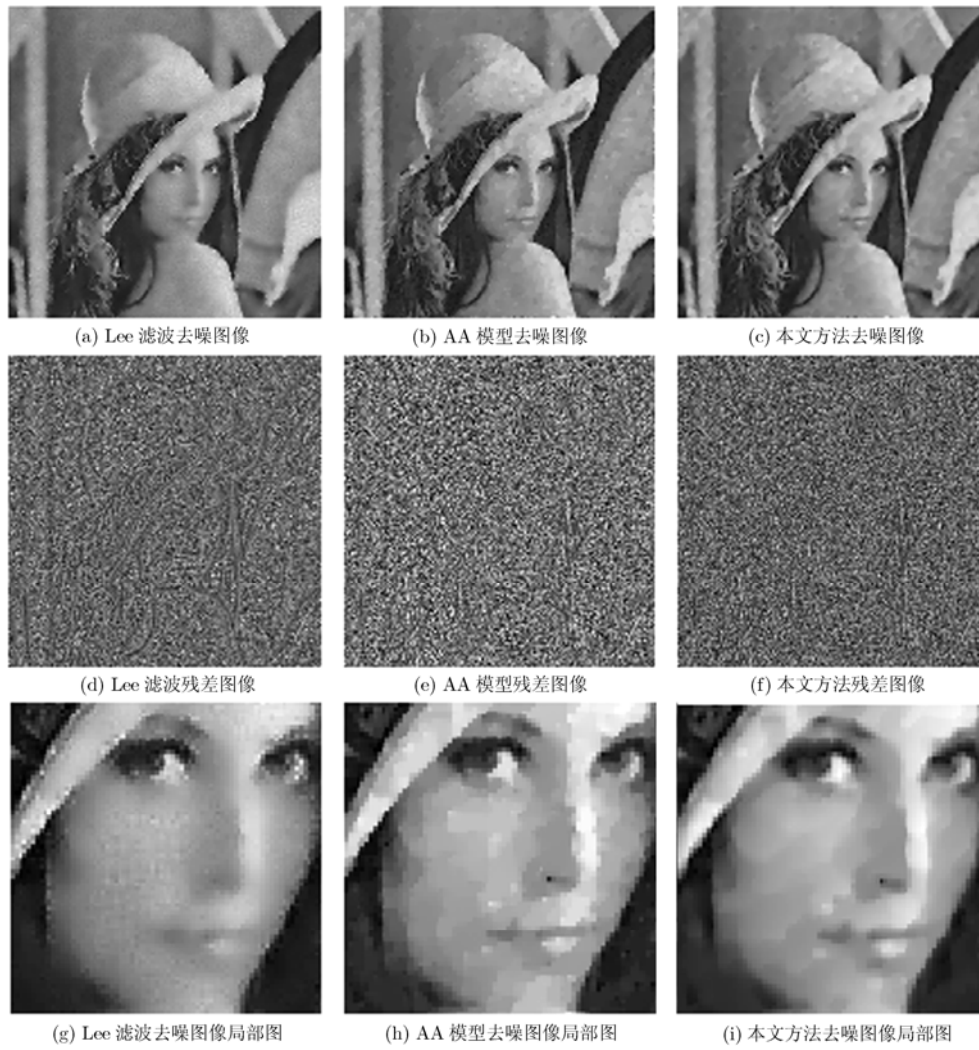


图 2 实验图像 1 去噪图像、残差图像及“阶梯效应”抑制效果比较

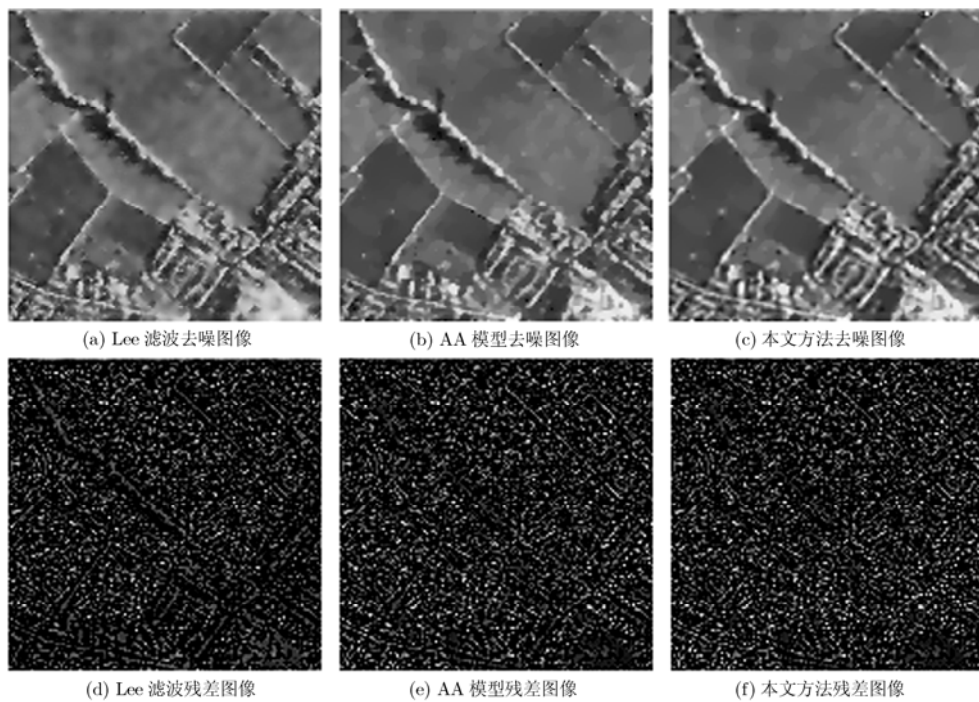


图 3 实验图像 2 去噪图像及残差图像比较

表 2 实验图像 2 去噪效果 ENL 及 EPI 的比较

	噪声污染 图像	自适应 Lee 滤波	AA	本文方法
区域 A ENL	10.0479	167.0048	199.0837	204.6410
区域 B ENL	4.1646	10.1255	9.8474	9.2243
区域 C ENL	4.1583	13.2139	14.4077	11.7949
EPI	1.0	0.5033	0.5989	0.7229
迭代 次数		7	500	500

通过表 2 和图 3 中的结果比较看到, Lee 滤波在多次迭代之后, 在平坦区域去噪效果较好, 但对于边缘的模糊严重。AA 模型在迭代 500 次时, 在取得较好去噪效果的同时, 可以较好地保持边缘。本文方法在迭代 500 次时, 在区域 A 的等效视最高, 在区域 B, C 略低, 但从图像的边缘、细节保持效果是最好的。从边缘保持指数 EPI 的定量比较可以看到, 本文方法的边缘保持效果是也是比较好的。

## 6 结束语

本文针对 SAR 图像去噪问题, 提出了一种分数阶多尺度去噪模型, 研究了模型参数的自适应选择, 并提出了自适应算法, 并与经典的自适应 Lee 滤波和 AA 模型进行了比较, 虽然由于参数自适应需要, 本文方法在计算量上相对于求解 AA 模型的固定参数的梯度下降算法有所增加, 但计算量仍是同阶的。仿真实验表明, 本文提出的分数阶多尺度自适应方法在去噪过程中, 可以较好区分图像纹理区域和非纹理区域, 在图像的非纹理区域, 可以取得较好的去噪效果并有效抑制“阶梯效应”, 而在图像的纹理区域, 可以较好地保持图像的纹理信息, 是一种有效的 SAR 图像相干斑抑制的方法。

## 参考文献

- [1] Aubert G and Aujol J F. A variational approach to removing multiplicative noise [J]. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 2008, 68(4): 925-946.
- [2] Huang Y M, Ng M K, and Wen Y W. A new total variation method for multiplicative noise removal [J]. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 2009, 2(1): 20-40.
- [3] 蒲亦非, 王卫星, 周激流, 王一扬, 贾华丁. 数字图像纹理细节的分数阶微分检测及其分数阶微分滤波器实现[J]. *中国科学, E辑*, 2008, 38(12): 2252-2272.  
Pu Yi-fei, Wang Wei-xing, Zhou Ji-liu, Wang Yi-yang, and Jia Hua-ding. Fractional-order derivative detection of texture of image and the realize of fractional-order derivative filtering [J]. *Science in China (Series E: Information Sciences)*, 2008, 38(12): 2252-2272.
- [4] Bai J and Feng X C. Fractional-order anisotropic diffusion for image denoising [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2007, 16(10): 2492-2502.
- [5] Ortigueira M D. A coherent approach to non-integer order derivatives [J]. *Signal Processing*, 2006, 86(10): 2505-2515.
- [6] Aujol J F, Gilboa G, Chan T, and Osher S. Structure-texture image decomposition: modeling algorithms and parameter selection [J]. *International Journal of Computer Vision*, 2006, 67(1): 111-136.
- [7] Meyer Y 著, 尤众 译. 小波与算子(第一卷) [M]. 北京: 世界图书出版公司, 1992年6月: 56-70.
- [8] Li Fang, Shen Chao-min, Shen Chun-li, and Zhang Gui-xu. Variational denoising of partly textured images [J]. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 2009, 20(4): 293-300.
- [9] Gilboa G, Sochen N, and Zeevi Y. Variational denoising of partly-textured images by spatially varying constraints [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2006, 15(8): 2281-2289.
- [10] 王振松, 刘晓云, 李小文, 陈武凡. 基于惩罚系数自适应修正的SAR图像滤波新算法[J]. *中国图象图形学报*, 2008, 13(9): 1683-1688.  
Wang Zhen-song, Liu Xiao-yun, Li Xiao-wen, and Chen Wu-fan. A novel filtering algorithm for SAR image based on self-adaptive correction of penalty coefficient [J]. *Journal of Image and Graphics*, 2008, 13(9): 1683-1688.
- [11] Donoho D L. Denoising by soft thresholding [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1995, 41(3): 613-627.

张 军: 男, 1977 年生, 讲师, 博士, 研究方向为基于变分偏微分方程的图像处理理论与应用。

韦志辉: 男, 1963 年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为多尺度几何分析、变分偏微分方程、模式识别与图像处理。