

信号 DOA 和极化信息联合估计的降维四元数 MUSIC 方法

李京书* 陶建武

(空军航空大学控制工程系 长春 130022)

摘要: 基于简化电磁矢量传感器阵列, 该文提出了一种新的降维四元数 MUSIC 估计方法。文中引用了四元数的概念, 利用四元数的正交特性能够很好地描述矢量传感器阵元的正交结构这一优点, 建立了电磁矢量传感器阵列的四元数模型, 利用降维 Q-MUSIC (Quaternion-MUSIC) 方法先对极化信号 DOA 进行估计, 通过已经估计出来的 DOA 信息, 再借助传统的 V-MUSIC (long-MUSIC) 方法估计极化信息。从而依次获得极化信号的 4 个参数。仿真实验验证了算法的可行性。

关键词: 简化矢量传感器; 降维 Q-MUSIC; 波达方向; 四元数

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2011)01-0106-06

DOI: 10.3724/SP.J.1146.2010.00242

The Dimension Reduction Quaternion MUSIC Algorithm for Jointly Estimating DOA and Polarization

Li Jing-shu Tao Jian-wu

(Aviation University of Air Force, Changchun 130022, China)

Abstract: Based on simplified electromagnetic vector-sensor array, a new Dimension Reduction Quaternion MUSIC (DR-QMUSIC) algorithm is proposed. In this paper, the quaternion algebra is first introduced since the orthogonality of quaternion is suitable for describing the orthogonal structure of electromagnetic vector-sensor very well. Then, the quaternion model of simplified electromagnetic vector-sensor array is established, and the DOA of polarized signals is estimated by employing the DR-QMUSIC algorithm. Inserting the estimated DOA into the traditional V-MUSIC algorithm, the polarization parameters of polarized signals are estimated. Thus, four unknown parameters of polarized signals are obtained. The simulation experiments are given to validate the proposed algorithm.

Key words: Simplified electromagnetic vector-sensor array; DR-Q (Dimension Reduction Quaternion)MUSIC; DOA; Quaternion

1 引言

雷达系统通过接收从空间目标反射的电磁波信号来探测目标的一些信息。电磁信号的传播方向描述了目标的空间位置, 而电磁波信号的极化状态反映了目标本身的一些物理特性。因此, 传播方向和极化状态是电磁信号的重要特征参数。文献[1,2]介绍了极化的特性和几种表述方式以及对极化信息的处理。电磁矢量传感器阵列能够感知到这些信息, 因此广泛受到关注, 电磁矢量传感器通常是由多个极化敏感天线按一定规则组成, 极化敏感天线可以由磁环或偶极子构成。电磁矢量传感器阵列的优点是: (1) 在每个天线的各个分量上, 信号的空间传播延时是相同的。因此, 它适用于近场或远场, 宽带

或窄带信号的 DOA 估计。如文献[3]分析了基于矢量传感器对近场源的信号处理情况。(2) 当多个极化信号在空间域不能很好地被分辨时, 利用信号的极化差异能提高对 DOA 估计的精度。(3) 在阵列孔径较小时, 仍然具有较好的分辨率。因此, 电磁矢量传感器特别适合于物理空间受限的场合。基于电磁矢量传感器阵列的极化信号 DOA 估计已经被广泛地研究^[4-6]。但是, 这些估计方法都是基于长矢量数据模型。考虑到四元数模型比长矢量模型有更强的正交约束这一优越性, 文献[7-10]研究了利用四元数理论估计信号 DOA 的方法。

本文提出了一种基于四元数模型的极化信号 DOA 和极化信息联合估计的降维四元数 MUSIC 估计方法, 并和基于长矢量模型的方法进行比较, 得出了四元数模型可以提高信号 DOA 估计精度。另外, 针对 4 个待估计的参数, 文献[8-10]是先设定两个参数已知, 然后对另外的两个未知参数进行估计,

2010-03-15 收到, 2010-08-23 改回

国家自然科学基金(60872088)资助课题

*通信作者: 李京书 elvisstef@163.com

因此, 这些方法的实用性受到了限制, 而本文是在 4 个参数都未知的情况下对参数进行依次估计。它的主要思想是把极化矢量写成一个四元数的形式, 来降低矩阵维数, 然后对模型进行降维处理。这里的降维处理是指参数降维, 在搜索过程中通过参数的降维使导向矢量中不含有极化信息, 进而不需要极化信息就可以估计出 DOA。仿真实验验证了算法的有效性。

2 四元数的定义

用 C 和 R 分别表示复数域和实数域。设 Q 是一个以 e, i, j 和 k 为基元的四维实向量空间。其中, 基元 e 是单位元, 而 i, j, k 满足关系:

$$\begin{aligned} i^2 = j^2 = k^2 = -e, \quad ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \\ ki = -ik = j \end{aligned}$$

Q 中元 $x = ex_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4$ 称为实四元数, 简称四元数。其中, x_1, x_2, x_3, x_4 称为四元数 x 的实系数。

四元数的乘法不满足交换律, 一般情况下, $xy \neq yx$ 。

称 $x^* = x_1 - ix_2 - jx_3 - kx_4$ 为 x 的共轭四元数。

3 信号接收模型

若电磁矢量传感器沿机体坐标系安装于飞机上, 由于沿 x 轴和 y 轴的两个互相垂直的磁环与飞机表面之间的互耦最小, 接收信号的效率最高^[11,12], 因此, 我们可以采用两个磁环构成两分量简化矢量传感器。两分量简化矢量传感器响应归一化表达式为

$$\mathbf{V}(\theta, \varphi) = \begin{bmatrix} -\cos \phi \sin \theta & \sin \phi \\ -\sin \phi \cos \theta & -\cos \phi \end{bmatrix} \quad (1)$$

式中俯仰角 $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$, 方位角 $\phi \in [0, 2\pi]$ 。

考虑一个窄带, 电磁横向(TEM)极化平面波在各向同性、均匀媒质中传播, 其水平电场分量和垂直电场分量为

$$\begin{bmatrix} \xi_h(t) \\ \xi_v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_h(t)e^{i\phi_h(t)} \\ a_v(t)e^{i\phi_v(t)} \end{bmatrix} s(t) \quad (2)$$

其中 $a_h(t), a_v(t)$ 是电场分量的时变幅值; $\phi_h(t), \phi_v(t)$ 是电场分量的绝对相位。假设 $a_h(t), a_v(t)$ 和 $\phi_h(t), \phi_v(t)$ 是中心对称, 稳态随机过程, 并且 $a_v(t)/a_h(t) = \tan \gamma$, $\phi_v(t) - \phi_h(t) = \eta$, γ 和 η 是常数。在这种情况下, 电磁波是完全极化波^[2]。 $s(t)$ 是信号波形。例如对于一个沿 $+z$ 轴方向传播的窄带平面波, $s(t) = \exp\{i(\omega t - kz)\}$ 。此平面波从一定方向入射到两分量矢量传感器, 在两个磁环天线上, 得到两个高度相关的时域信号 $x_x(t), x_y(t)$ 。此时域信号可表示

为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_x(t) \\ x_y(t) \end{bmatrix} &= \mathbf{V}(\theta, \phi) \begin{bmatrix} \xi_h(t) / \eta_1 \\ \xi_v(t) / \eta_1 \end{bmatrix} = \mathbf{V}(\theta, \phi) \begin{bmatrix} a_h(t) e^{i\phi_h(t)} \\ a_v(t) e^{i\phi_v(t)} \\ \eta_1 \end{bmatrix} s(t) \\ &= \mathbf{V}(\theta, \phi) \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ \tan \gamma e^{i\eta} \end{bmatrix}}_{\xi} \underbrace{\frac{a_h(t)}{\eta_1} e^{i\phi_h(t)} s(t)}_{\bar{s}(t)} = \mathbf{V}(\theta, \phi) \xi \bar{s}(t) \end{aligned} \quad (3)$$

式中 γ 称之为极化幅角, $\gamma \in (0, \pi/2)$, η 称之为极化相位角, $\eta \in [0, 2\pi]$ 。而 $\rho_{hw} = \tan \gamma e^{i\eta}$ 是电磁波的复极化比。 $\eta_1 = \sqrt{\mu_1 / \varepsilon_1}$, μ_1 是传播媒介的导磁系数, ε_1 是传播媒介的介电系数。

我们将矢量传感器两个分量所接收的时域信号合成为一个四元数, 作为矢量传感器的四元数接收信号, 即

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= x_x(t) + x_y(t)j = \begin{bmatrix} 1 & j \\ & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_x(t) \\ x_y(t) \end{bmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & j \\ & \end{bmatrix} \mathbf{V}(\theta, \phi)}_{\mathbf{p}(\theta, \phi, \gamma, \eta)} \xi \bar{s}(t) = \mathbf{p}(\theta, \phi, \gamma, \eta) \bar{s}(t) \end{aligned} \quad (4)$$

其中符号 j 是一个虚数单位。 $\bar{s}(t)$ 是一个复数, 而 $\mathbf{p}(\theta, \phi, \gamma, \eta)$ 是一个四元数, 即

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(\theta, \phi, \gamma, \eta) &= \begin{bmatrix} 1 & j \\ & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\cos \phi \sin \theta & \sin \phi \\ -\sin \phi \cos \theta & -\cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \tan \gamma e^{i\eta} \end{bmatrix} \\ &= -\cos \phi \sin \theta + \sin \phi \tan \gamma e^{i\eta} \\ &\quad + j(-\sin \phi \cos \theta - \cos \phi \tan \gamma e^{i\eta}) \end{aligned} \quad (5)$$

通过上述方式, 我们将两个复数分量合成一个四元数。以上推导未考虑测量(或接收)噪声的影响, 当考虑测量噪声时, 矢量传感器的四元数接收信号为

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{p}(\theta, \phi, \gamma, \eta) \bar{s}(t) + n_\theta(t) \quad (6)$$

其中 $n_\theta(t) = \begin{bmatrix} 1 & j \\ & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x(t) \\ n_y(t) \end{bmatrix}$, $n_x(t)$ 和 $n_y(t)$ 为矢量传感器两个磁环天线上的测量噪声, 通常, 假设 $n_x(t)$ 和 $n_y(t)$ 是复噪声, 且互相不相关, 即噪声是未极化的。因而, $n_\theta(t)$ 是一个四元数。

下面, 将上述单个两分量矢量传感器四元数模型扩展到矢量传感器阵列。假设有 M 个两分量矢量传感器组成一个阵列, 若第 m 个传感器的 3 维位置坐标矢量为

$$\mathbf{r}_m = [x_m \ y_m \ z_m]^\top, \quad 1 \leq m \leq M \quad (7)$$

以第一个阵元为参考阵元, 沿着阵列传播的平面电磁波在阵列各阵元上产生的空间相移矢量为

$$\mathbf{q}(\theta, \phi) = [1 \ e^{-i\psi_2} \ \dots \ e^{-i\psi_M}]^T \quad (8)$$

其中 $\psi_m = (2\pi/\lambda)\mathbf{r}^T \mathbf{r}_m$, \mathbf{r} 是方向矢量, 即

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ \sin \theta \end{bmatrix} \quad (9)$$

λ 是电磁波的波长, 因而 ψ_m 是方向角的函数。

因此, 阵列输出矢量的四元数模型可表示为

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{q}(\theta, \phi) \mathbf{p}(\theta, \phi, \gamma, \eta) \bar{s}(t) + \mathbf{N}_\theta(t) \quad (10)$$

其中 $\mathbf{N}_\theta(t) = [n_\theta^1(t) \ n_\theta^2(t) \ \dots \ n_\theta^M(t)]$ 是噪声矢量, $n_\theta^m(t)$ 表示第 m 个矢量传感器的四元数加性噪声。

若 K 个不相关, 远场完全极化电磁信号入射阵列, 则阵列输出矢量的四元数模型为

$$\mathbf{X}(t) = \sum_{k=1}^K \mathbf{q}(\theta_k, \phi_k) \mathbf{p}(\theta_k, \phi_k, \gamma_k, \eta_k) \bar{s}(t) + \mathbf{N}_\theta(t) \quad (11)$$

4 降维 Q-MUSIC 算法

将式(11)写成矩阵的形式:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t) &= \sum_{k=1}^K \mathbf{q}(\theta_k, \phi_k) \mathbf{p}(\theta_k, \phi_k, \gamma_k, \eta_k) \bar{s}(t) + \mathbf{N}_\theta(t) \\ &= \sum_{k=1}^K \mathbf{a}_k \bar{s}(t) + \mathbf{N}_\theta(t) \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{q}(\theta_1, \phi_1) & \mathbf{q}(\theta_2, \phi_2) & \dots & \mathbf{q}(\theta_K, \phi_K) \end{bmatrix} \\ &\quad \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{p}(\theta_1, \phi_1, \gamma_1, \eta_1) \\ \mathbf{p}(\theta_2, \phi_2, \gamma_2, \eta_2) \\ \vdots \\ \mathbf{p}(\theta_K, \phi_K, \gamma_K, \eta_K) \end{bmatrix} \\ &\quad + \mathbf{N}_\theta(t) \\ &= \mathbf{QPS}(t) + \mathbf{N}_\theta(t) = \mathbf{AS}(t) + \mathbf{N}_\theta(t) \end{aligned} \quad (12)$$

其中 $\bar{\mathbf{S}}(t) = [\bar{s}_1(t), \bar{s}_2(t), \dots, \bar{s}_K(t)]^T$ 是等效信号矢量, $\mathbf{a}_k = \mathbf{q}(\theta_k, \phi_k) \mathbf{p}(\theta_k, \phi_k, \gamma_k, \eta_k)$ 是阵列的四元数导引矢量, $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_K]$ 是阵列的导引矩阵。阵列输出矢量的四元数相关函数为

$$\mathbf{R} = E(\mathbf{X}(t)\mathbf{X}^H(t)) \quad (13)$$

“H”代表四元数的共轭转置。以后不再赘述。

对 \mathbf{R} 进行特征值分解: $\mathbf{R} = \mathbf{U}_s \Sigma \mathbf{U}_s^H + \mathbf{U}_n \Lambda_n \mathbf{U}_n^H$, \mathbf{U}_s 表示对应于信号子空间的特征向量, \mathbf{U}_n 表示对应于噪声子空间的特征向量。由子空间原理得

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_k^H \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H \mathbf{a}_k &= \mathbf{p}^H(\theta_k, \phi_k, \gamma_k, \eta_k) \mathbf{q}_k^H(\theta_k, \phi_k) \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H \mathbf{q}_k \\ &\quad \cdot (\theta_k, \phi_k) \mathbf{p}(\theta_k, \phi_k, \gamma_k, \eta_k) \\ &= \mathbf{p}^H(\theta_k, \phi_k, \gamma_k, \eta_k) \mathbf{C}(\theta_k, \phi_k) \mathbf{p}(\theta_k, \phi_k, \gamma_k, \eta_k) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

其中 $\mathbf{C}(\theta, \phi) = \mathbf{q}^H(\theta, \phi) \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H \mathbf{q}(\theta, \phi)$ 。

从式(4)和式(5)可以看出 $\mathbf{p}(\theta_k, \phi_k, \gamma_k, \eta_k)$ 中包含波达方向 DOA 和极化参数, 而 $\mathbf{C}(\theta_k, \phi_k)$ 中仅含有方向角和俯仰角。由式(5)可知, 当 $\gamma \in (0, \pi/2)$ 时, $\mathbf{p}(\theta_k, \phi_k, \gamma_k, \eta_k) \neq 0$ 。 $\mathbf{C}(\theta_k, \phi_k) = 0$ 就等效于 $\mathbf{a}_k^H \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H \mathbf{a}_k = 0$ 。因此可以由式(15)得到 DOA 的估计

$$(\hat{\theta}_k, \hat{\phi}_k) = \arg \max_{\theta, \phi} \frac{1}{|\mathbf{C}(\theta_k, \phi_k)|} \quad (15)$$

式(15)称为降维四元数 MUSIC 方法, 这个方法的优点是极化信息剥除, 使原来的四维参数搜索变为二维参数搜索。

下面讨论 $\mathbf{C}(\theta_k, \phi_k) = 0$ 和 $\mathbf{a}_k^H \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H \mathbf{a}_k = 0$ 对 DOA 估计的一致性, 即充分性: 当 (θ, ϕ) 取真实的方位角 $(\theta_k, \phi_k)_{k=1}^K$, 两式同时成立; 必要性: 当 $\mathbf{C}(\theta_k, \phi_k) = 0$ 成立, (θ, ϕ) 的取值与 $\mathbf{a}_k^H \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H \mathbf{a}_k = 0$ 得出的值一致。

(1)充分性: 当取 (θ, ϕ) 为信号的真实方位角 $(\theta_k, \phi_k)_{k=1}^K$ 时, \mathbf{a}_k 位于阵列协方差矩阵的信号子空间中, 由子空间原理可知式(16)成立

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_k^H \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H \mathbf{a}_k &= \mathbf{p}_k^H(\theta_k, \phi_k, \gamma_k, \eta_k) \mathbf{q}_k^H(\theta_k, \phi_k) \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H \mathbf{q}_k \\ &\quad \cdot (\theta_k, \phi_k) \mathbf{p}(\theta_k, \phi_k, \gamma_k, \eta_k) \\ &= \mathbf{p}^H(\theta_k, \phi_k, \gamma_k, \eta_k) \mathbf{C}(\theta_k, \phi_k) \mathbf{p}(\theta_k, \phi_k, \gamma_k, \eta_k) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

因为 $\mathbf{p}(\theta_k, \phi_k, \gamma_k, \eta_k) \neq 0$, 则只有 $\mathbf{C}(\theta_k, \phi_k) = 0$, 充分性得证。

(2)必要性: 当 $\mathbf{C}(\theta_0, \phi_0) = 0$ 成立时, 满足上式的 (θ_0, ϕ_0) , 左右两边都乘一个数 $\mathbf{P}(\theta_0, \phi_0, \gamma_0, \eta_0)$, $\mathbf{P}^H(\theta_0, \phi_0, \gamma_0, \eta_0) \mathbf{C}(\theta_0, \phi_0) \mathbf{P}(\theta_0, \phi_0, \gamma_0, \eta_0) = \mathbf{a}_0^H \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H \mathbf{a}_0 = 0$, 则 \mathbf{a}_0 属于信号子空间的导引矢量, 则 (θ_0, ϕ_0) 是信号的 DOA 参数, 即 (θ_0, ϕ_0) 就是 (θ_k, ϕ_k) , 必要性得证。

对极化参数进行估计, 最初是将 DOA 参数代入 $\mathbf{p}_{\text{music}} = \frac{1}{\mathbf{a}_k^H \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H \mathbf{a}_k}$, 然后搜索极化参数, 本文做

了很多仿真实验, 都没有得到理想的极化信息。其原因是: 由于本文利用四元数的表示方法将极化参数表示成一个四元数, 在做特征值分解时, 极化信息被包含在特征值中, 特征向量中并不含有极化信息, 因此不能利用噪声子空间的原理对极化信息进行估计。文献[8-10]采用四元数 MUSIC 方法之所以

能估计出极化信息, 主要是因为采用的四元数模型不同: 文献[8-10]的四元数模型是把时域信号进行傅里叶变换后所建立的频域模型, 对输出的相关函数进行特征值分解时极化信息包含于特征向量中, 因此可以用 MUSIC 方法进行估计; 而本文是直接时在域上对测量信号进行处理, 建立时域模型, 在对此时域模型的输出相关函数进行特征值分解时极化信息包含于特征值当中, 特征向量中并不含有极化信息, 继而无法估计极化信息。

本文的时域模型具有直观性, 而且经过降维, 在未知极化信息时, 可以估计出信号的 DOA, 这是频域模型所不具备的。鉴于此时域模型不能直接估计极化信息, 本文考虑重新回到传统的长矢量方法, 导引矢量是方向矢量和极化矢量的 kron 积, 这样在特征值分解时, 特征向量中就含有极化信息, 就可以利用噪声子空间原理对极化信息进行搜索。

对于长矢量方法, 阵列测量模型输出为

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{A}(\gamma, \eta)s(t) + \mathbf{n}(t), \quad t = 1, 2, \dots, N \quad (17)$$

其中矩阵 $\mathbf{A}(\gamma, \eta) = \mathbf{q}(\theta, \phi) \otimes (\mathbf{V}(\theta, \phi) \cdot \xi)$ 是阵列响应, \otimes 表示 kronecker 积, $\mathbf{n}(t)$ 表示加性噪声。 N 表示测量快拍数。由于信号的 DOA 已经被估计到, 整个阵列的相移因子就是可知的, 而 ξ 是 (γ, η) 的函数, 可知 $\mathbf{A}(\gamma, \eta)$ 是未知参数 (γ, η) 的函数。

测量输出的相关函数为

$$\mathbf{R}_y = E(\mathbf{y}(t)\mathbf{y}(t)^H) \quad (18)$$

对 \mathbf{R}_y 进行特征值分解:

$$\mathbf{R}_y = \mathbf{U}_{sy} \Sigma \mathbf{U}_{sy}^H + \mathbf{U}_{ny} \Lambda_o \mathbf{U}_{ny}^H \quad (19)$$

\mathbf{U}_{sy} 表示对应于信号子空间的特征向量, \mathbf{U}_{ny} 表示对应于噪声子空间的特征向量。由于子空间原理得

$$\mathbf{A}_k(\gamma, \eta)^H \mathbf{U}_{ny} \mathbf{U}_{ny}^H \mathbf{A}_k(\gamma, \eta) = 0 \quad (20)$$

继而可以由下式得到极化参数的估计值为

$$(\hat{\gamma}_k, \hat{\eta}_k) = \arg \max_{\gamma, \eta} \frac{1}{\mathbf{A}_k(\gamma, \eta)^H \mathbf{U}_{ny} \mathbf{U}_{ny}^H \mathbf{A}_k(\gamma, \eta)} \quad (21)$$

5 仿真实验

在下面的仿真实验中, 考虑由 6 个阵元组成的

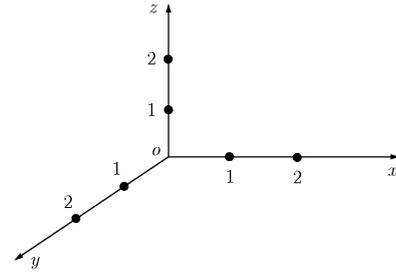


图 1 阵列结构图

立体阵列, 如图 1 所示, 阵元均匀分布在 x, y, z 3 个坐标轴上, 阵元间距为 $d = \lambda/2$, 位置矢量为 $(0, 0, 1)(0, 0, 2)(1, 0, 0)(2, 0, 0)(0, 1, 0)(0, 2, 0)$ 。采样的快拍数为 6000。为了验证本文方法的有效性, 本文方法 (简称 Q-MUSIC) 将与文献[2]中的极化域-空域 MUSIC 联合谱估计方法 (简称 V-MUSIC) 做比较。

实验 1 假设两个相互独立窄带, 电磁横向 (TEM) 极化平面波的信号源入射到上述阵列上, 信号的 DOA (θ, ϕ) 参数分别为 $(30^\circ, 40^\circ), (50^\circ, 60^\circ)$ 。极化信息 (γ, η) 为 $(60^\circ, 50^\circ), (40^\circ, 60^\circ)$ 。两个信号的信噪比 SNR 都为 -5 dB。这里给出信噪比的定义: 信号的平均功率与噪声平均功率的比值, 它的单位一般使用分贝, 其值为十倍对数信号与噪声功率比: $SNR = 10 \lg(P_{\text{signal}} / P_{\text{noise}})$, 其中 P_{signal} 为信号功率, P_{noise} 为噪声功率。在图 2 和图 3 中, 可以清楚的看到两个谱峰, 而且没有出现“伪峰”, 可以很好的分辨出这两个信号的方向角, 从而能在极化参数未知的情况下, 估计出信号的 DOA。在极化参数已知的情况下, 图 4 和图 5 给出了 V-MUSIC 方法的估计结果。将图 2 和图 3 与图 4 和图 5 的 V-MUSIC 方法进行比较, 可以看出, 本文方法形成的谱峰更加尖锐, 具有更高的增益。

下面对两种算法的计算量进行比较, 对于 V-MUSIC 方法, 导引矢量是方向矢量和极化矢量的 Kronecker 积, 则其协方差矩阵是 $2M \times 2M$ 维的, 而对于 Q-MUSIC 方法的协方差矩阵是 $M \times M$ 维的。由于 MUSIC 算法的计算量主要集中在极值搜

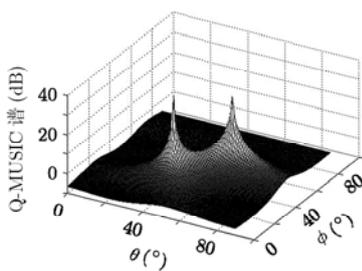


图 2 Q-MUSIC 的 DOA 估计谱

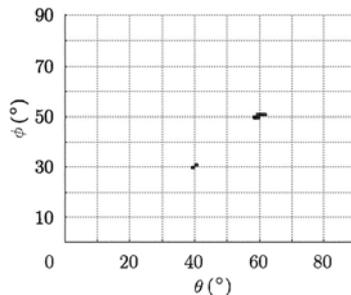


图 3 Q-MUSIC DOA 估计谱的俯视图

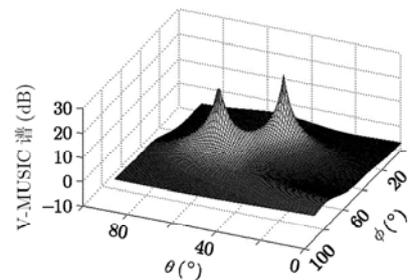


图 4 V-MUSIC 的 DOA 估计谱

索的过程。在搜索范围内，一对 (θ, ϕ) 角度对应于一个计算点。现比较一个计算点的加法和乘法的计算次数。假设两个实数相加计一次加法，相乘计一次乘法，两个复数相加计 2 次加法，相乘计 2 次加法和 4 次乘法，一个复数和一个四元数相加计 2 次加法，相乘计 4 次加法和 8 次乘法，两个四元数相加计 4 次加法，相乘计 12 次加法和 16 次乘法，数的平方可以看做一次乘法，对于 V-MUSIC 方法，由于

$$P_{\text{MUSIC}}(\theta, \phi) = \frac{1}{|\mathbf{a}(\theta, \phi)^H \mathbf{U}_N|^2} = 1 / (\text{kron}(\mathbf{q}(\theta, \phi), \mathbf{V}(\theta, \phi) \cdot \xi)^H \mathbf{U}_N|^2)$$

(注: 为了便于和 Q-MUSIC 方法比较, 这里假定 (γ, η) 已知, \mathbf{U}_N 是 V-MUSIC 方法协方差矩阵的复值特征向量), 一个计算点需要进行 $2 \times 2M + (2 \times 4 + 2 \times 2) + 2 \times (2M - 1) + 2 \times 2M + 2 = 12M + 12$ 次加法, $4 \times (2M + 4) + 4 \times 2M + 4 = 16M + 20$ 次乘法; 对于 Q-MUSIC 方法, 根据式(15), $(\hat{\theta}_k, \hat{\phi}_k) = \arg \max_{\theta, \phi} \frac{1}{|\mathbf{C}(\theta_k, \varphi_k)|} = \arg \max_{\theta, \phi} \frac{1}{|\mathbf{q}^H(\theta_k, \varphi_k) \mathbf{U}_n|^2}$,

由于 $\mathbf{q}(\theta_k, \varphi_k)$ 是复数矢量, \mathbf{U}_n 是四元数矢量, 则一个计算点需要进行 $4 \times M + 4 \times (M - 1) + 12 = 8M + 8$ 次加法, $8 \times M + 16 = 8M + 16$ 次乘法。两种算法的比较如表 1 所示。对于阵列 $M > 1$ 的情况下, $12M + 12 > 8M + 8$, $16M + 20 > 8M + 16$, 因此, Q-MUSIC 算法的计算量小于 V-MUSIC 算法, M 越大, Q-MUSIC 方法在计算量上优势越明显。不仅如此, 由于 V-MUSIC 方法事先要计算另外两个参数 (γ, η) , 这个过程需要耗费一定的计算量, 而

Q-MUSIC 方法不需要极化信息直接就可以进行搜索 DOA, 因此 Q-MUSIC 方法比 V-MUSIC 方法更易于实现。”

实验 2 在实验 1 的条件下, 图 6 给出了分别采用两种算法对两个信号 DOA 估计的均方根误差与信噪比的关系曲线, 其中均方根误差定义为 $\text{RMSE} = \sqrt{E[(\theta - \hat{\theta})^2]}$, $\hat{\theta}$ 表示 θ 的估计值。仿真中采用 50 次独立结果的平均加以近似, 即 $\text{RMSE} \approx \sqrt{\sum_{j=1}^{50} (\theta - \hat{\theta}_j)^2}$, 其中 $\hat{\theta}_j$ 表示第 j 次实验 θ 的估计结果。在图 6 中, 可以看出 DOA 的 RMSE 随着 SNR 的增大而减小。在低信噪比的情况下 Q-MUSIC 方法比 V-MUSIC 方法的均方根误差小的多, Q-MUSIC 方法在信噪比达到 -20 dB 时仍然能够较为准确的估计出 DOA, 而 V-MUSIC 方法在信噪比为 -5 dB 时均方根误差就相当大, 已经不能分辨了。因此, 在低信噪比时四元数方法仍具有卓越的性能。

表 1 两种算法一个计算点的加法和乘法次数的比较

	加法次数	乘法次数
V-MUSIC 方法	$12M + 12$	$16M + 20$
Q-MUSIC 方法	$8M + 8$	$8M + 16$

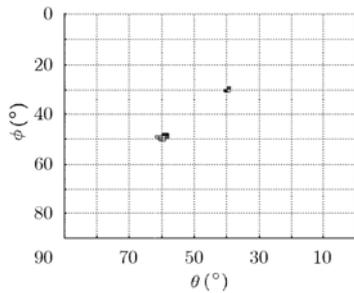


图 5 V-MUSIC 的 DOA 估计谱的俯视图

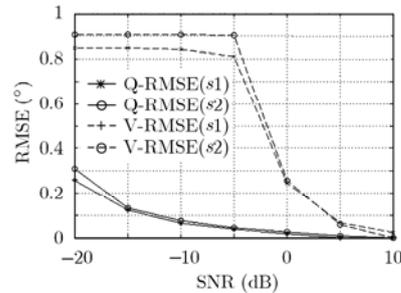


图 6 Q-MUSIC 和 V-MUSIC 的 RMSE 随 SNR 变化曲线

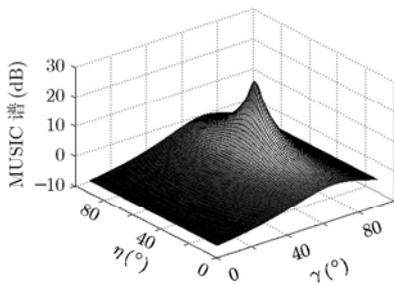
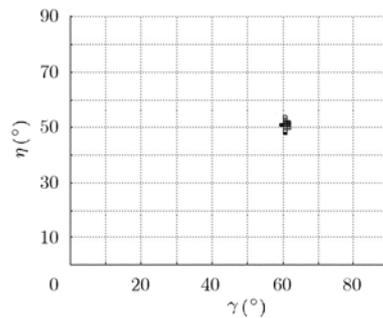


图 7 第 1 个信号的极化参数估计谱



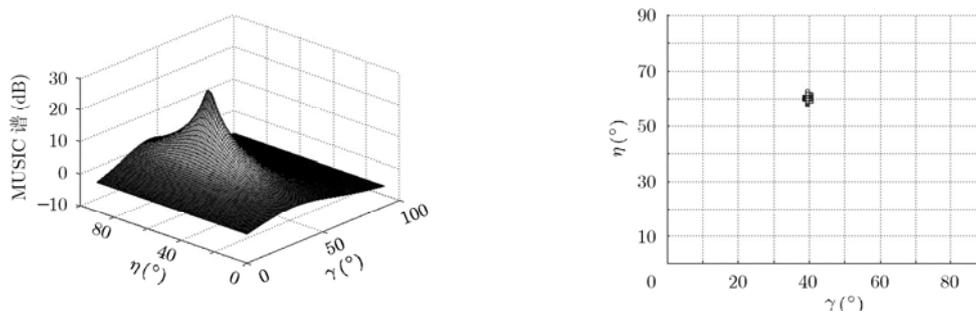


图8 第2个信号的极化参数估计谱

6 结束语

本文提出了基于两分量简化矢量传感器降维四元数 MUSIC 估计方法, 引入了四元数的表示方式来描述电磁矢量传感器, 建立了基于四元数的阵列信号处理模型, 然后利用降维四元数 MUSIC 算法, 对极化信号的 DOA 进行估计。把所估计的 DOA 代入长矢量模型, 从而估计极化信息。这种方法能够在 4 个参数同时未知时把 DOA 和极化参数依次估计出来。并使估计算法得以简化, 同时提高了估计精度。

参考文献

- [1] 曹清平著. 雷达极化技术与极化信息应用[M]. 国防工业出版社, 2006: 1-3.
- [2] 庄钊文等著. 极化敏感阵列信号处理[M]. 国防工业出版社, 2005: 1-37; 204-213.
- [3] 刘亮, 陶建武, 黄家才. 基于稀疏对称阵列的近场源定位[J]. 电子学报, 2009, 37(6): 1307-1311.
Liu Liang, Tao Jian-wu, and Huang Jia-cai. Near-field source localization based on sparse symmetric array[J]. *Acta Electronic Sinica*, 2009, 37(6): 1307-1311.
- [4] 周欣, 石要武, 郭宏志. 有色噪声背景下多径信号的二维 DOA 和极化参数同时估计算法[J]. 吉林大学学报(工学版), 2009, 39(3): 797-802.
Zhou Xin, Shi Yao-wu, and Guo Hong-zhi. Algorithm for estimating 2D direction of arrival and polarization of multiple signals in colored noise[J]. *Journal of Jilin University (Engineering and Technology Edition)*, 2009, 39(3): 797-802.
- [5] 黄家才, 陶建武, 温秀兰. 原位误差情况下 DOA 和极化参数盲估计[J]. 电波科学学报, 2009, 24(1): 179-184.
Huang Jia-cai, Tao Jian-wu, and Wen Xiu-lan. Blind DOA and polarization estimation against orientation errors of vector sensor[J]. *Chinese Journal of Radio Science*, 2009, 24(1): 179-184.
- [6] 徐友根, 刘志文. 残缺电磁矢量阵列直线信号波达方向估计[J]. 电子与信息学报, 2009, 31(4): 861-864.
Xu You-gen and Liu Zhi-wen. DOA estimation of rectilinear signals using defective electromagnetic vector arrays[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2009, 31(4): 861-864.
- [7] 崔伟, 陶建武, 刘亮. 机载电磁矢量传感器阵列 DOA 和极化参数估计[J]. 系统工程与电子技术, 2008, 30(2): 222-225.
Cui Wei, Tao Jian-wu, and Liu Liang. Novel DOA and polarization estimation of electromagnetic vector sensor mounted on the airframe[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2008, 30(2): 222-225.
- [8] 汪飞, 王树勋, 张坤雷. 色噪声背景下基于四元数 MUSIC 方法的矢量阵列信号参量估计[J]. 通信学报, 2008, 29(5): 133-140.
Wang Fei, Wang Shu-xun, and Zhang Kun-lei. Parameters estimation of vector-sensor array in colored noise based on quaternion-MUSIC[J]. *Journal on Communications*, 2008, 29(5): 133-140.
- [9] Miron S, Le Bihan N, and Mars J I. Quaternion-music for vector-sensor array processing[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2006, 54(4): 1218-1229.
- [10] Bihan N L and Mars J. Singular value decomposition of quaternion matrices: a new tool for vector-sensor signal processing[J]. *Signal Processing*, 2004, 84(7): 1177-1199.
- [11] Bliss B, Chan A, and Eapen A. Vector Sensors Array Design[M]. Lexington, MA: MIT Lincoln laboratory presentation, April 2004.
- [12] SMir H and Sahr J D. Passive direction finding using airborne vector sensors in the presence of manifold perturbations[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2007, 55(1): 156-164.

李京书: 男, 1985年生, 硕士生, 研究方向为阵列信号处理。

陶建武: 男, 1959年生, 博士, 教授, 硕士生导师, 从事阵列信号处理及应用、非平稳信号处理等方面的研究工作。