

文章编号:0559-9350(2011)04-0469-07

## 考虑底面摩阻效应的弹性地基梁微分算子级数法

赵明华<sup>1</sup>, 马缤辉<sup>1</sup>, 罗松南<sup>2</sup>

(1. 湖南大学 岩土工程研究所, 湖南 长沙 410082; 2. 湖南大学 力学与航空航天学院, 湖南 长沙 410082)

**摘要:** 假定地基为具有切向和法向反力的弹性支承体, 考虑弹性地基梁的纵横向耦合变形, 根据弹性力学基本原理, 从梁体微段分析出发, 结合小变形条件下梁体几何方程和线弹性本构关系, 导出考虑摩阻效应时关于法向位移和切向位移的微分方程组; 在此基础上利用微分算子级数法对微分方程组进行求解, 得到考虑纵横向耦合变形和底面摩阻效应时地基梁法向挠度和切向相对位移计算公式。最后对一个地基梁实例进行了计算分析, 并对摩阻效应进行了讨论。结果表明, 微分算子级数法解答能有效地考虑地基梁纵横向耦合变形特征和底面摩阻效应。

**关键词:** 弹性地基梁; 纵横向耦合变形; 底面摩阻效应; 微分算子; 微分算子级数法

**中图分类号:** TU 470

**文献标识码:** A

弹性地基梁广泛存在于港工船坞、水工闸板、道桥房建基础梁以及支挡结构等工程中, 准确合理地对其进行计算具有重要的意义。弹性地基梁的计算目前多采用Winkler地基模型<sup>[1]</sup>, 其假设地基上任一点所受的压力强度 $p$ 与该点的地基沉降 $s$ 成正比。地基梁计算方法有初参数法、叠加法和应变能法等<sup>[2-4]</sup>, 以此导出的计算公式和制成的各种图表, 在工程中起着重要的作用<sup>[5]</sup>。随着研究的不断深入, 传统计算方法不断得到更新。文献[6-8]分别提出DQEM法、修正刚度矩阵法、无网格局部Petrov-Galerkin法等计算模式, 文献[9-10]则考虑了梁的剪切效应、土体非线性特征等影响因素。弹性地基梁传统分析方法考虑了地基与梁之间法向变形协调, 但对两者同平面内的切向变形不协调而导致的底面摩阻效应问题, 一般都未予考虑<sup>[3-4]</sup>; 事实上, 当梁与地基之间的接触较为粗糙时, 底面摩阻效应不能忽略<sup>[11-14]</sup>。谈至明<sup>[11]</sup>就探讨了考虑切向摩阻力时地基梁的解, 但未考虑梁上其他类型荷载作用; 马飞等<sup>[12]</sup>采用杆系有限元法分析底面摩阻效应, 但尚需假定满足边界条件的形函数; 周继凯等<sup>[13]</sup>提出改进Winkler地基模型对地基梁进行摩阻效应修正, 其假设梁底地基切向力为线性分布的合理之处尚值商榷; 赵明华等<sup>[14]</sup>假定切向摩阻力为定值, 未能反映地基梁底面相对位移对摩阻力的影响。因此, 本文拟从弹性力学基本原理和梁体微段分析出发, 考虑弹性地基梁纵横向耦合变形特征, 采用微分算子级数法求得考虑底面摩阻效应的弹性地基梁挠度及其内力分布。

## 1 计算模型的建立及其分析思路

**1.1 基本假定** 考虑弹性地基梁的纵横向耦合变形特征, 作如下基本假定: ①地基梁属各向同性Euler-Bernoulli梁范畴, 其变形满足平截面假定; ②地基梁的变形属于小变形, 且在外荷载作用下处于线弹性状态; ③地基为具有切向和法向反力的弹性支承体, 其法向受力和变形满足Winkler地基假定; 切向反力与梁底和地基间的切向相对位移成正比; ④地基梁底面切向反力和切向位移均位于法向力作用的挠曲线平面内, 不考虑该平面外的切向力。

来稿日期: 2009-06-28

基金项目: 国家863计划资助项目(2006AA11Z104); 国家自然科学基金项目(51078138)

作者简介: 赵明华(1956-), 男, 湖南洞口人, 教授, 博士生导师, 主要从事桥梁桩基、基坑支护及地基处理等研究。

E-mail: mhzhaohd@21cn.com

**1.2 计算模型** 如图1所示弹性地基梁AB, 可设梁  $x$  和  $z$  方向的位移分量分别为:

$$w(x, z) = w_0(x); u(x, z) = u_0(x) - zw_0'(x) \quad (1)$$

式中:  $w_0(x)$ 、 $u_0(x)$ 分别为梁轴线上  $z$ 、 $x$  方向的位移分量;  $w_0'(x)$  为对  $x$  求一阶导数。

由此可得地基梁与地基间的底面接触位移为:

$$w(x) = w_0(x); u(x) = u_0(x) - \frac{h}{2}w_0'(x) \quad (2)$$

式中:  $w(x)$ 、 $u(x)$ 分别为梁底  $z$ 、 $x$  方向的位移分量;  $h$  为梁高。

根据上述假定, 法向地基反力  $q_z$  和切向地基反力  $q_x$  (即切向摩阻力) 分别为:

$$q_z = -k_z w(x); q_x = -k_x u(x) \quad (3)$$

式中:  $k_x$ 、 $k_z$  分别为切向和法向的地基反力系数, 负号表示力与位移的方向相反。

由此可建立弹性地基梁计算模型如图1所示。

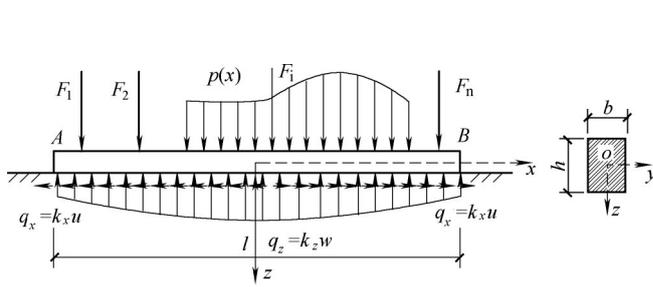


图1 弹性地基梁计算模型

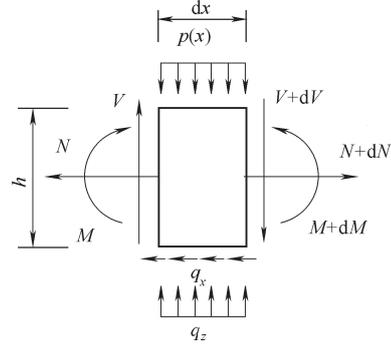


图2 弹性地基梁微段受力分析

**1.3 分析思路** 基于弹性力学基本原理, 考虑小变形条件, 位移分量对应的几何方程式为:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u(x, z)}{\partial x} = u_0'(x) - zw_0''(x) \quad (4)$$

线弹性条件下梁的本构方程式为:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x \quad (5)$$

截面上的内力与应力之间的关系为(轴力  $N$  以受拉为正):

$$N(x, z) = \int_A \sigma_x dA; M(x, z) = \int_A \sigma_x z dA \quad (6)$$

联立式(4)–(6), 可得:

$$N(x, z) = EAu_0'(x) - ESu_0''(x); M(x, z) = ESu_0'(x) - EIw_0''(x) \quad (7)$$

式中:  $E$ 、 $A$  和  $I$  分别为梁的弹性模量、横截面面积及其绕  $y$  轴的惯性矩;  $S$  为梁横截面绕  $y$  轴的静矩。

由于  $x$  轴为形心坐标轴, 有  $S=0$ , 故式(7)可简化为:

$$N(x) = EAu_0'(x); M(x) = -EIw_0''(x) \quad (8)$$

取梁微段  $dx$  进行受力分析, 如图2所示, 由静力平衡条件可得:

$$\begin{cases} \frac{dV(x)}{dx} = q_z - p(x) \\ \frac{dN(x)}{dx} = q_x \\ \frac{dM(x)}{dx} = V(x) + \frac{h}{2} \cdot q_x \end{cases} \quad (9)$$

联立式(2)、(3)、(8)和(9), 可得微分方程组为:

$$u_0''(x) - \frac{k_x}{EA}u_0(x) + \frac{k_x h}{2EA}w_0'(x) = 0; w_0^{(4)}(x) - \frac{k_x h^2}{4EI}w_0''(x) + \frac{k_z}{EI}w_0(x) + \frac{k_x h}{2EI}u_0'(x) = \frac{p(x)}{EI} \quad (10)$$

上述微分方程组亦可简写为：

$$u'' - A_1 u + A_2 w' = 0; \quad w^{(4)} - A_3 w'' + A_4 w + A_5 u' = A_6 \quad (11)$$

式中： $u=u_0(x)$ ， $w=w_0(x)$ ， $A_1=k_x/EA$ ， $A_2=k_x h/2EA$ ， $A_3=k_x h^2/4EI$ ， $A_4=k_z/EI$ ， $A_5=k_x h/2EI$ ， $A_6=p(x)/EI$ 。

对于具体的实例计算， $k_x$ 、 $k_z$ 、 $EA$ 、 $EI$ 、 $h$ 均为特定值，即系数 $A_1$ 、 $A_2$ 、 $A_3$ 、 $A_4$ 、 $A_5$ 均为常量，不随 $x$ 的位置发生变化。 $A_6$ 为与 $x$ 位置有关的函数。因此，式(11)属高阶常系数非齐次微分方程组，可采用微分算子级数法进行求解。

## 2 微分算子级数法求解

**2.1 微分算子及逆算子**<sup>[15]</sup> 设 $n$ 阶线性常微分方程为：

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \quad (12)$$

式中： $a_i \in R(i=0, 1, \dots, n)$ 。

令 $D=d/dx$ ， $\dots$ ， $D^n=d^n/dx^n$ ( $D$ 称为微分算子元素)，则方程(12)可简写为：

$$P(D)y = f(x) \quad (13)$$

式中： $P(D)=a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n$ ，称为微分方程(12)关于微分算子元素 $D$ 的微分算子多项式。令 $P^{-1}(D)=1/P(D)$ ，称为算子 $P(D)$ 的逆算子。

**2.2 微分算子级数**<sup>[15]</sup> 设 $P(D)=a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n$ ( $a_n \neq 0$ )，则有：

$$\frac{1}{P(D)} = \frac{1}{a_n} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D}{a_n} \right)^k \quad (14)$$

式(14)称为逆算子 $P^{-1}(D)$ 的微分算子级数。

**2.3 微分算子级数法求解过程** 式(11)可写成：

$$(D^2 - A_1)u + (A_2 D)w = 0; \quad (A_5 D)u + (D^4 - A_3 D^2 + A_4)w = A_6 \quad (15)$$

2.3.1 地基梁无载段的解答 考虑无载段，有 $A_6=0$ ，即为式(15)的齐次方程：

$$(D^2 - A_1)u + (A_2 D)w = 0; \quad (A_5 D)u + (D^4 - A_3 D^2 + A_4)w = 0 \quad (16)$$

由式(16)的算子特征方程<sup>[15]</sup>可得：

$$\Delta(D) = D^6 + aD^4 + bD^2 + c = 0 \quad (17)$$

其中： $a=-(A_1+A_3)=-4k_x/EA$ ， $b=A_1 A_3 - A_2 A_5 + A_4 = k_z/EI$ ， $c=-A_1 A_4 = -k_x k_z/(E^2 A I)$ 。

令 $D^2=Y-a/3$ 并代入式(17)整理得：

$$Y^3 + pY + q = 0 \quad (18)$$

其中： $p=b - \frac{a^2}{3} = \frac{k_z}{EI} - \frac{16k_x^2}{3E^2 A^2}$ ， $q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c = -\frac{128k_x^3}{27E^3 A^3} + \frac{k_x k_z}{3E^2 A}$ 。

式(18)的判别式为：

$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^2 = -\frac{k_z(256k_x^4 I^2 - 61k_x^2 k_z EA^2 I + 4k_z^2 E^2 A^4)}{108E^5 A^4 I^3} \quad (19)$$

对于土质地基， $k_z$ 的取值范围<sup>[4]</sup>为 $0 \sim 2.0 \times 10^5$  kN/m<sup>3</sup>， $k_x$ 的取值范围<sup>[4]</sup>为 $0 \sim 2.0 \times 10^6$  kN/m<sup>3</sup>，而混凝土模量 $E$ 的取值为几十兆帕。据此可推得 $p$ 、 $q$ 和 $\Delta$ 均大于0。

由 $\Delta > 0$ 可知式(18)有一个实根和两个共轭虚根，且其值可由Cardon公式确定：

$$\begin{cases} Y_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}} \\ Y_2 = \omega_1 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \omega_2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}} \\ Y_3 = \omega_2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \omega_1 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}} \end{cases} \quad (20)$$

式中:  $\omega_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ ,  $\omega_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ 。

同时由三个根与系数的关系:

$$\begin{cases} Y_1 + Y_2 + Y_3 = 0 \\ \frac{1}{Y_1} + \frac{1}{Y_2} + \frac{1}{Y_3} = \frac{-p}{q} \\ Y_1 Y_2 Y_3 = -q \end{cases} \quad (21)$$

可知实根  $Y_1$  为负根, 共轭虚根  $Y_2$ 、 $Y_3$  的实部大于 0。

将三个根  $Y_i$  回代  $D^2 = Y - a/3$  可求得  $D$  的六个根为  $\pm\lambda$ ,  $\pm\alpha \pm \beta i$  ( $i$  为虚数单位)。

由此可得地基梁无载段解答<sup>[15]</sup>为:

$$\begin{cases} X_1 = u^* = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x} + e^{\alpha x} (C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x) + e^{-\alpha x} (C_5 \cos \beta x + C_6 \sin \beta x) \\ X_2 = w^* = B_1 e^{\lambda x} + B_2 e^{-\lambda x} + e^{\alpha x} (B_3 \cos \beta x + B_4 \sin \beta x) + e^{-\alpha x} (B_5 \cos \beta x + B_6 \sin \beta x) \end{cases} \quad (22)$$

实际上, 利用式(22)中  $u$  的解答, 将其代入齐次方程(16)的第一个方程, 可得:

$$w = -\frac{(D^2 - A_1)u}{A_2 D} \quad (23)$$

利用逆算子的特性, 有:

$$w = -\frac{1}{A_2} \int (D^2 - A_1)u dx = -\frac{Du}{A_2} + \frac{A_1}{A_2} \int u dx \quad (24)$$

因此通过消元法也可求得  $w$  的表达式, 其形式同  $u$ 。由此可知, 式(22)中的待定常数  $[C] = [C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6]$  和  $[B] = [B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6]$  是线性相关的, 其相关矩阵  $[CB]$  可由式(24)求得。因此式(22)只有 6 个待定常数, 可由地基梁两端边界条件求出。

2.3.2 地基梁有载段的解答 考虑有载段, 按推广的 Cramer 法则求非齐次方程式(15)的特解。此时式(15)右边项的指数  $\lambda=0$  不是特征根, 则式(15)的特解  $\bar{X}$  的分量<sup>[15]</sup>为:

$$\begin{cases} \bar{X}_1 = \bar{u} = \frac{1}{\Delta(D)} \begin{vmatrix} 0 & A_2 D \\ A_6 & D^4 - A_3 D^2 + A_4 \end{vmatrix} = \frac{-A_2 D (p(x))}{\Delta(D) EI} \\ \bar{X}_2 = \bar{w} = \frac{1}{\Delta(D)} \begin{vmatrix} D^2 - A_1 & 0 \\ A_5 D & A_6 \end{vmatrix} = \frac{D^2 (p(x)) - A_1 p(x)}{\Delta(D) EI} \end{cases} \quad (25)$$

可见其特解的形式取决于  $p(x)$  的分布形式。

实际上对于集中荷载、力偶、各种分布荷载等作用, 亦可在上述地基梁无载段解答基础上, 参照文献[4]的初参数法进行求解, 此不赘述。

由此可得地基梁有载段的解答为:

$$\begin{cases} u = u^* + \bar{u} = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x} + e^{\alpha x} (C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x) + e^{-\alpha x} (C_5 \cos \beta x + C_6 \sin \beta x) + \bar{u} \\ w = w^* + \bar{w} = B_1 e^{\lambda x} + B_2 e^{-\lambda x} + e^{\alpha x} (B_3 \cos \beta x + B_4 \sin \beta x) + e^{-\alpha x} (B_5 \cos \beta x + B_6 \sin \beta x) + \bar{w} \end{cases} \quad (26)$$

将求得的  $u$  和  $w$  代入式(2)和式(3)即可求得法向地基反力  $q_z$  和切向地基反力  $q_x$ 。至此地基梁上所有荷载均为已知, 可按结构力学中的普通梁进行内力计算, 并对其进行强度和刚度分析。

### 3 计算分析

3.1 算例验证 为验证本文解答的正确性和合理性, 现取梁中点作用一个集中荷载  $F = 3\,000\text{ kN}$  (如图3)的无限长弹性地基梁进行分析。计算时取梁长度  $l = 100\text{ m}$ , 宽度  $b = 1.0\text{ m}$ , 高度  $h = 1.0\text{ m}$ , 梁弹性模量  $E = 2.05 \times 10^7\text{ kPa}$ , 法向地基反力系数  $k_z = 3.0 \times 10^4\text{ kN/m}^3$ 。

首先令  $k_x = 0$ , 考虑无限长梁受力特点, 有如下边界条件:

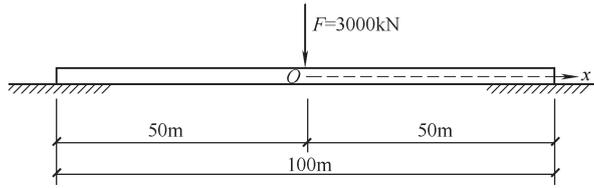


图3 弹性地基梁及其荷载分布

$$\begin{cases} u|_{x \rightarrow \infty} = 0, w|_{x \rightarrow \infty} = 0 \\ u|_{x = \infty} = 0, w'|_{x = \infty} = 0 \\ 2EIw'''|_{x=0} = F \end{cases} \quad (27)$$

由此可得待定常数为:

$$\begin{cases} B_1 = 0, B_2 = 0, B_3 = 0, B_4 = 0 \\ B_5 = B_6 = 0.012870403611 \end{cases} \quad (28)$$

代入式(25)和式(26)即可求得  $u$  和  $w$  的函数表达式, 将其代入式(2)和(3)求出法向地基反力  $q_z$  和切向地基反力  $q_x$ , 对地基梁进行求解, 并与常规弹性地基梁计算方法<sup>[4]</sup>进行比较, 其结果如表1所示。

由表可见, 当  $k_x=0$  时本文方法计算结果与常规弹性地基梁计算所得<sup>[4]</sup>结果完全一致, 从而证明了本文解答的正确性。

为探讨摩阻效应, 若令  $k_x=2.0 \times 10^6 \text{ kN/m}^3$ , 同理可得结果如表1所示。

表1 无限长梁计算结果

坐标 $x/\text{m}$	常规方法 <sup>[4]</sup> 解答		本文方法解答( $k_x=0\text{kN/m}^3$ )		本文方法解答( $k_x=2.0 \times 10^6 \text{ kN/m}^3$ )				
	挠度 $w/\text{mm}$	弯矩 $M/(\text{kN}\cdot\text{m})$	挠度 $w/\text{m}$	弯矩 $M/(\text{kN}\cdot\text{m})$	挠度 $w/\text{mm}$	弯矩 $M/(\text{kN}\cdot\text{m})$	剪力 $Q/\text{kN}$	位移 $u/\text{mm}$	摩阻力 $q_x/(\text{kN/m})$
0	-12.87	-2913.662	-12.87	-2913.662	-10.57	-2217.465	-1500.000	0	0
1	-12.15	-1604.796	-12.15	-1604.796	-10.05	-1060.522	-869.601	3.19E-01	-637.481
2	-10.48	-658.201	-10.48	-658.201	-8.89	-393.156	-497.239	4.06E-01	-812.046
3	-8.41	-25.078	-8.4	-25.078	-7.48	-16.631	-274.622	3.83E-01	-765.823
4	-6.31	355.853	-6.31	355.853	-6.05	185.295	-140.463	3.14E-01	-628.591
5	-4.41	547.046	-4.41	547.046	-4.73	281.905	-59.600	2.34E-01	-467.718
6	-2.82	605.263	-2.82	605.263	-3.56	315.324	-11.488	1.58E-01	-316.093
7	-1.58	578.048	-1.58	578.048	-2.59	311.653	16.153	9.39E-05	-187.787
8	-6.79E-01	502.566	-6.79E-01	502.566	-1.79	287.300	30.856	4.34E-05	-86.857
9	-7.09E-05	405.973	-7.09E-05	405.973	-1.16	252.653	37.368	6.14E-06	-12.283
10	3.00E-01	306.657	3.00E-01	306.657	-6.76E-01	214.260	38.759	-1.96E-05	39.278
20	3.62E-05	-22.492	3.62E-05	-22.492	2.16E-01	2.187	4.817	-2.00E-05	40.063
30	-6.40E-06	1.110	-6.40E-06	1.110	8.56E-06	-3.364	-6.789E-01	4.21E-07	-8.413E-01
40	6.12E-07	-1.197E-02	6.12E-07	-1.197E-02	-3.37E-06	-4.388E-03	-6.769E-02	3.02E-07	-6.034E-01
50	-4.15E-08	-4.909E-03	-4.15E-08	-4.909E-03	-1.01E-07	5.134E-02	1.094E-02	-9.0E-09	1.806E-02

由表1中地基梁挠度和内力分布可见, 考虑底面摩阻效应时, 地基梁的挠度、转角、弯矩和剪力均有不同程度的减小, 其中梁中点的挠度、弯矩减小程度最大。因此对于梁与地基地面粗糙的情况, 设计计算时需考虑摩阻效应影响。同时由表1所列切向相对位移  $u(x)$  和摩阻力  $q_x$  的数值可知, 由于实际切向相对位移较小, 在实际工程中可简化计算摩阻效应, 即视切向相对位移近似等于0而采用静摩擦原理计算摩阻力。

**3.2 参数分析** 为进一步探讨摩阻效应、切向地基反力系数  $k_x$  等对地基梁内力及挠度等的影响, 仍采用前述算例, 取不同切向地基反力系数  $k_x$  进行分析, 其计算结果如图4—9所示。

图4、图5分别为地基梁中点挠度和弯矩随  $k_x$  变化的关系曲线。显见, 随着  $k_x$  的增大, 梁中点挠

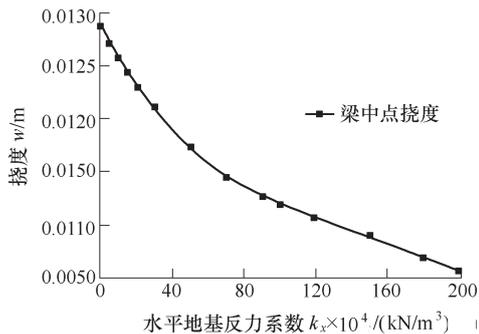


图4 弹性地基梁挠度曲线

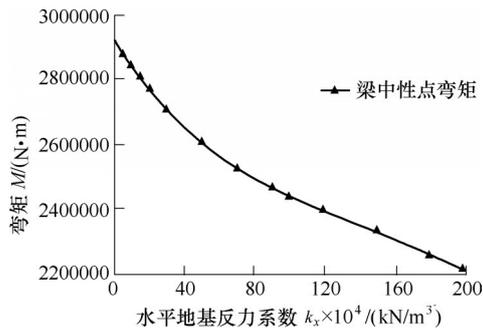


图5 弹性地基梁弯矩曲线

度和弯矩均近似线性减小。因此，切向地基反力系数  $k_x$  的取值对地基梁的挠度及弯矩计算影响很大，取值时应慎重考虑。理论上，由弹性力学可推知切向地基反力系数  $k_x$  比法向地基反力系数  $k_z$  大十至数十倍，取值范围较大；具体应用时，一般认为  $k_x$  取 10 倍左右的  $k_z$  值时地基梁的计算结果较为合理<sup>[13]</sup>。

图6给出了不同  $k_x$  下地基梁剪力沿轴线的变化曲线。由图可见，随着  $k_x$  的增加，梁中点剪力不变，其他各点剪力变化幅度不大，说明摩阻效应对地基梁剪力计算影响不大，这主要是由于切向摩阻力与剪力为正交力系，切向摩阻力主要通过减小地基梁挠度而间接影响剪力大小。因此为简化计算，在实际工程中可不考虑摩阻效应对地基梁剪力的影响。

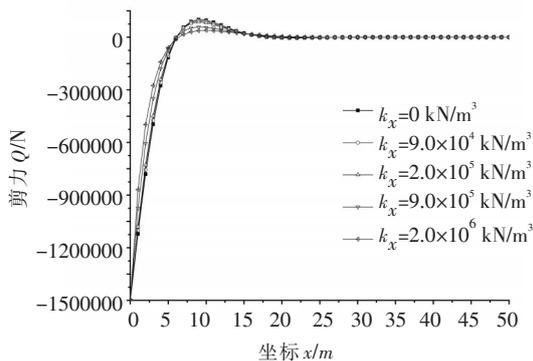


图6 弹性地基梁剪力曲线

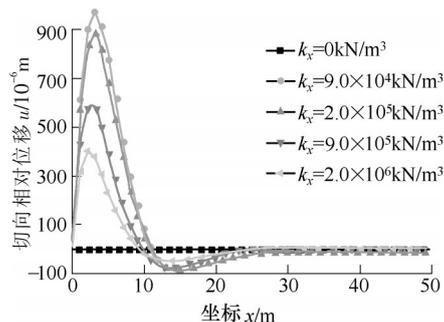


图7 弹性地基梁切向位移曲线

图7和图8分别为不同  $k_x$  下地基梁切向相对位移和切向摩阻力的分布曲线。由图可知，沿梁轴线切向相对位移与切向摩阻力均先增大后减小，在  $x=0\text{m}$  和  $x=10\text{m}$  左右为0，在  $x=2.5\text{m}$  左右达到峰值。由此亦可知文献[13]梁底地基切向力为线性分布和文献[14]切向摩阻力为定值的假设尚存在某些不足。图中曲线  $x$  大于  $10\text{m}$  后形态发生改变，是由于未考虑无拉力 Winkler 地基的脱离问题<sup>[16]</sup>。实际上地基的抗拉能力几乎为0，故图中曲线  $x$  大于  $10\text{m}$  后切向相对位移和切向摩阻力近似为0。此外，随着  $k_x$  的增大，切向摩阻力不断增大，切向相对位移反而减小，其表明随着梁与地基地面粗糙程度的增加，底面摩阻力逐渐趋近静摩擦形式。

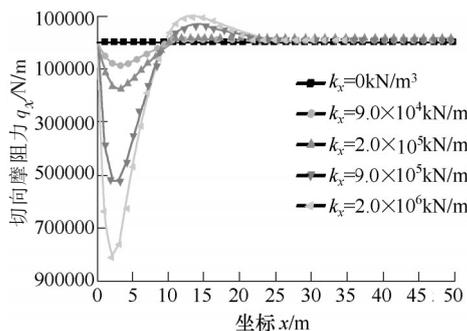


图8 弹性地基梁切向摩阻力曲线

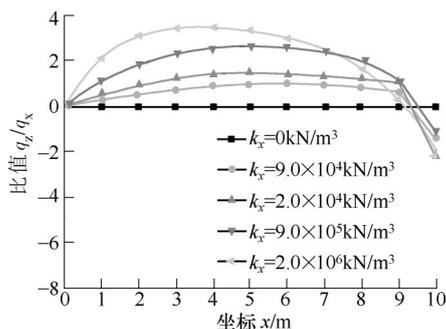


图9 弹性地基梁无量纲比值  $q_z/q_x$  曲线

图9给出了地基梁无量纲比值 $q_z/q_x$ 随 $k_x$ 的变化关系。显见,在切向地基反力系数 $k_x$ 合理取值范围内,随着 $k_x$ 的增大,无量纲比值 $q_z/q_x$ 先增大后减小,与图8中 $q_x$ 的变化规律类似。

同样由于未考虑无拉力Winkler地基的脱离问题<sup>[16]</sup>导致在 $x=10\text{m}$ 左右曲线出现陡降。无量纲比值 $q_z/q_x$ 实际上反映了梁与地基摩阻水平大小,对于作用有倾斜横向荷载的地基梁计算具有重要意义。

## 4 结论

本文根据弹性地基梁纵横向耦合变形及其底面存在摩阻效应的工程特性,从弹性力学基本原理和梁体微段分析出发,引进微分算子级数解法对弹性地基梁进行摩阻效应分析,获得如下结论:(1)结合弹性地基梁的纵横向耦合变形特征,采用微分算子级数法,求得了考虑底面摩阻效应时地基梁的挠度及内力解,为复杂荷载和边界条件下地基梁计算提供了一种新的计算模式。(2)结合算例验证了微分算子级数解答的正确性和合理性,并深入分析了梁与地基地面的摩阻效应,综合分析了底面摩阻力对地基梁挠度、弯矩和剪力等的影响,对不同 $k_x$ 下地基梁切向相对位移、切向摩阻力和无量纲比值 $q_z/q_x$ 的变化规律进行了探讨,对于作用有倾斜横向荷载的地基梁计算具有重要工程意义。(3)弹性地基梁与地基之间的底面摩阻力是普遍存在的,其对地基梁挠度及内力的影响不容忽视。沿梁轴线切向摩阻力呈先增大后减小的非线性分布,且随着梁与地基地面粗糙程度的增加,底面摩阻力逐渐趋近静摩擦力形式。(4)微分算子级数法解答能有效地考虑弹性地基梁纵横向耦合变形及其底面摩阻效应,具有工程应用价值。不足之处在于未能考虑无拉力Winkler地基的脱离问题,有待补充和改进。

## 参 考 文 献:

- [ 1 ] Winkler E. Theory of elasticity and strength[M]. Prague: H. Dominicus, 1867.
- [ 2 ] Hetenyi M. Beams on elastic foundation[M]. Ann Arbor: University of Michigan Press, 1946.
- [ 3 ] Selvadurai A P S. Elastic Analysis of Soil-Foundation Interaction[M]. New York: Elsevier Scientific Publishing Company, 1979.
- [ 4 ] 龙驭球. 弹性地基梁的计算[M]. 北京: 人民教育出版社, 1981.
- [ 5 ] 中国船舶工业总公司第九设计研究院. 弹性地基梁计算图表及公式[M]. 北京: 国防工业出版社, 1982.
- [ 6 ] Chang New-chen. Solution of beam on elastic foundation by DQEM[J]. Journal of Engineering Mechanics, 1998, 124(12): 1381-1384.
- [ 7 ] 陈天愚, 张克绪, 胡庆立. 修正刚度矩阵法求解弹性地基梁板体系[J]. 哈尔滨建筑大学学报, 2001, 34(3): 40-44.
- [ 8 ] 龙述尧. 用无网格局部Petrov-Galerkin法分析弹性地基上的梁[J]. 湖南大学学报(自然科学版), 2001, 28(5): 11-15.
- [ 9 ] Metin Aydogan. Stiffness-matrix formulation of beams with shear effect on elastic foundation[J]. Journal of Structural Engineering, 1995, 121(9): 1265-1270.
- [ 10 ] 胡坚, 李永盛. 弹性地基上梁的非线性分析[J]. 土工基础, 1999, 13(4): 21-24.
- [ 11 ] 谈至明. 具有水平摩阻力的弹性地基上梁的解[J]. 力学与实践, 1997, 19(3): 33-35.
- [ 12 ] 马飞, 艾智勇. 考虑接触摩擦效应时的弹性地基杆系有限元法[J]. 岩土力学, 2002, 23(1): 93-96.
- [ 13 ] 周继凯, 杜钦庆. 考虑水平力作用的改进型文克勒地基模型[J]. 河海大学学报(自然科学版), 2004, 32(6): 669-673.
- [ 14 ] 赵明华, 张玲, 马宾辉. 基于文克尔假定的土工格室加筋体受力分析[J]. 水利学报, 2008, 39(6): 697-702.
- [ 15 ] 曾蜀良, 柯红路. 线性微分方程组的微分算子级数解法[J]. 重庆建筑大学学报, 1996, 18(3): 123-130.
- [ 16 ] 何芳社, 钟光路. 无拉力Winkler地基上梁的脱离问题[J]. 西安建筑科技大学学报(自然科学版), 2004, 36(1): 48-50.

## Differentiator series calculation method for beams on elastic foundation considering frictional effect of bottom surface

ZHAO Ming-hua, MA Bin-hui, LUO Song-nan

(Hunan University, Changsha 410082, China)

**Abstract:** The subgrade is assumed to be a hinge-spring system with tangential and normal reactions, considering the vertical-horizontal coupling distortion of beam on elastic foundation. Based on the principles of elasticity and analysis of micro-segment of beam, the differential equation of normal displacement and tangential displacement under the condition of small deformation is deduced, in which the combination of geometric equation and linear-elastic constitutive equation of beam are considered. The differential equation is solved by means of differentiator series calculation method, and the calculation formulas for normal deflection and tangential relative displacement are deduced considering vertical-horizontal coupling distortion and frictional effect of bottom surface. An example for beam on elastic foundation is analyzed and frictional resistance is discussed. The results show that the vertical-horizontal coupling distortion and effect of tangential frictional resistance can be considered effectively in the differentiator series calculation method.

**Key words:** beam on elastic foundation; vertical-horizontal coupling distortion; frictional effect of bottom surface; differential operator; differentiator series calculation method

(责任编辑: 李琳)