文章编号:1001-1595(2011)02-0209-04

附不等式约束平差的一种简单迭代算法

朱建军,谢 建
中南大学 测绘与国土信息工程系,湖南 长沙 410083

A Simple Iterative Algorithm for Inequality Constrained Adjustment

ZHU Jianjun, XIE Jian
Department of Geomatics of Engineering, Central South University, Changsha 410083, China

Abstract: A new effective iterative algorithm that is similar to classical adjustment is proposed based on penalty functions and zero or infinite weight. Numerical simulation shows that this algorithm is simple and feasible and has good convergence. Then it is applied to a dam deformation monitoring control net, the inequality constraints of control points are established according to the terrain and it can be detected that the real displacement of the control points and it is more reasonable and reliable than that of unconstrained adjustment.

Key words: linear inequality constrained adjustment(LICA); active constraint; penalty function; virtual observation; deformation monitoring

摘 要:基于最优化计算理论中罚函数方法及传统测量平差中零权和无限权的思想,提出一种有效的迭代算法,算法过程与经典平差计算方法相同。数值实验表明,该算法简单、可行,并且具有很快的收敛速度。作者还将该模型用在大坝变形分析中,根据地形对控制点建立不等式约束,能够探测到更真实的点位位移,较之无约束平差更合理可靠。

关键词:不等式约束平差;有效约束;惩罚函数;虚拟观测;变形监测
中图分类号:P207 **文献标识码**:A
基金项目:国家自然科学基金(40974007, 40574003);湖南省博士生科研创新项目(CX2010B048)

1 引 言

在各种测量数据处理中,许多情况下可根据先验知识建立对参数的某种约束,如果所建立的约束是不等式形式,则形成了具有不等式约束的平差问题。具有不等式约束的平差问题的研究最早可追溯到 40 多年前,文献[1]首先研究了具有不等式约束的回归分析;文献[2]提出把具有约束的最小二乘问题转换成线性补问题,用线性规划中的线性补方法求解;文献[3]把文献[2]的方法引入大地测量领域,并研究其在大地控制网的优化、最佳 FIR 滤波器的设计及方差估计中的应用;文献[4]则研究了不等式约束在变形检验中的应用;文献[5]提出将不等式约束转换成椭圆约束,然后在极大极小准则下用岭估计进行计算;文献[6]将不等式约束引入 GPS 数据处理中,提出用高程(不等式)约束改善模糊度的初始化;文献[7]在有效约束的概念下,提出把具有约束的平差问题转换成一个最小距离问题,然后利用已有的距离规划程序求解的方法,并研究了这种方法在 GPS 导航中的应用;文献[8]研究过高程约束在改善 GPS 模糊度分解中的应用;文献[9]提出把不等式约束转换成先验信息,然后用 Bayes 方法求解;文献[10]通过罚函数的思想提出了集合约束法;文献[11]基于 Kuhn-Tucker 条件提出一种拉格朗日乘子迭代算法;文献[12]提出用遗传算法和 Matlab 的优化工具箱解决附不等式约束的计算问题;文献[13]将不等式约束最小二乘平差转换成凸二次规划问题,利用库恩-塔克条件进一步转化为线性互补问题求解。

针对解不等式约束平差模型提出了上述各种不同的算法,但附不等式约束的平差模型并没有得到广泛应用,究其原因主要是计算困难。因为所有的这些算法都不是基于传统的测量平差方法,不能用传统的平差方法和平差知识求解,不利于测量工作者的学习和掌握。

本文基于最优化计算理论中罚函数方法及传统测量平差中零权和无限权的思想,提出一种简单的迭代算法。该算法在迭代过程中自动区分有效约束和无效约束,并赋予相应的权,能以较快的速度收敛到最优解。

2 附不等式约束平差模型的解算

附不等式约束平差模型一般可表示为

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{L}+\boldsymbol{V}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\\&\boldsymbol{G}X\leqslant\boldsymbol{W}\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

式中，$\boldsymbol{A}$ 为 $n\times t$ 的系数阵；$\boldsymbol{L}$ 为 $n\times 1$ 的观测值；$\boldsymbol{V}$ 为 $n\times 1$ 观测改正数；$\boldsymbol{G}$ 为 $k\times t$ 的系数阵且 $\boldsymbol{G}$ 为行满秩矩阵；W 为 $k\times 1$ 的常量。按最小二乘原理，上述模型的解可以由下式求得

$$\left.\begin{aligned}&\Phi(X)=\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{V}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}-\boldsymbol{L})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}-\boldsymbol{L})=\min\\&\boldsymbol{G}\boldsymbol{X}\leqslant\boldsymbol{W}\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

这是一个附不等式的二次最优化问题，按优化计算方法中的罚函数方法，上述问题可以转化为无约束最优化问题

$$\Phi(X)=\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{V}+P(x)=\min\tag{3}$$

式中，$P(x)$为惩罚函数，要求惩罚函数 $P(x)$在不等式约束的范围内取值为 0，而在不等式约束的范围之外，$P(x)$取很大的值，即对不等式约束的范围之外的点给予惩罚，这样保证最优解能满足不等式(落入不等式约束范围中)。在最优化计算中，惩罚函数具体形式一般由个人凭经验确定，也可采用先验信息的置信度决定。

对于附不等式约束的平差模型，令

$$\boldsymbol{V}'=\boldsymbol{G}\boldsymbol{X}-\boldsymbol{W}\tag{4}$$

就有 $\boldsymbol{V}'\leqslant 0$ 时不等式约束满足，$\boldsymbol{V}'>0$ 不等式约束不满足。这样对于模型(1)，可构成如下惩罚函数

$$P(x)=\boldsymbol{V}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}'\boldsymbol{V}'\tag{5}$$

式中，罚函数的权取值为

$$P'_i=\begin{cases}k & V'_i>0\\0 & V'_i\leqslant 0\end{cases}\tag{6}$$

即当不等式约束满足时，为无效约束，$P'_i=0$，从而 $P'_i(x)=0$，当不等式约束不满足时，为有效约束，$P'_i=k$ 取很大数值，从而 $P'_i(x)$也将取到很大数值。将式(5)代入式(3)，再顾及到式(4)，有

$$\Phi(X)=\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{V}+\boldsymbol{V}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}'\boldsymbol{V}'\tag{7}$$

即式(2)所表示的附不等式约束的二次最优化问题，通过罚函数式(5)变换成了式(7)表示的无约束的最优化问题。从平差的角度看，附不等式约束的平差模型(1)，通过式(4)、式(5)变换成了无约束的最小二乘平差。式(4)、式(5)的罚函数从平差的角度可以看成一组虚拟观测

$$\boldsymbol{V}'=\boldsymbol{G}\boldsymbol{X}-\boldsymbol{L}'\tag{8}$$

式中，$\boldsymbol{L}'=\boldsymbol{W}$，虚拟权表达式和式(6)相同。模型(1)中的不等式约束，通过罚函数转换成了式(8)所表示的虚拟观测。在式(8)中，如果 $\boldsymbol{V}'_i\leqslant 0$，则有 $\boldsymbol{G}_i\boldsymbol{X}-\boldsymbol{W}\leqslant 0$，不等式约束满足，这时取虚拟观测权 $\boldsymbol{P}'_i=0$，也就是说，这种情况下无效约束不计入平差计算。特别的，当 $\boldsymbol{P}'=0$ 时，$P'(x)=0$，所有的约束均为无效约束，退化成普通的无约束最小二乘。如果 $\boldsymbol{V}'_i>0$，则 $\boldsymbol{G}_i\boldsymbol{X}-\boldsymbol{W}>0$，不等式约束不满足，对应的虚拟观测权 $P'_i=k$，从而$P'_i(x)$也将取到很大数值，在无限权的作用下，实际上是将有效约束当做等式约束进行计算。这样附不等式的约束模型(1)，可以转换成为如下的无约束平差模型

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{V}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}-\boldsymbol{L},\quad \boldsymbol{P}\\&\boldsymbol{V}'=\boldsymbol{G}\boldsymbol{X}-\boldsymbol{L}',\quad \boldsymbol{P}'\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

按照广义最小二乘原理，式(9)的解为

$$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}'\boldsymbol{G})^{-1}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{L}+\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}'\boldsymbol{L}')\tag{10}$$

由于平差开始时并不知道哪些约束满足，哪些约束不满足，即不知道哪个 $\boldsymbol{V}'>0$，哪一个 $\boldsymbol{V}'<0$，平差必须迭代计算求解。一般来说，初次平差可以取 $\boldsymbol{P}'=0$，即不考虑约束的最小二乘。然后将最小二乘解代入虚拟观测方程，看哪些约束条件满足，根据式(6)定权，再按式(10)进行平差计算。如此反复迭代，直到虚拟误差式(4)都满足要求为止。按式(10)的平差计算过程与经典平差完全相同，计算过程简单而且容易理解。

3 试验分析

3.1 数值试验

计算实例数据选自文献[14]，对于不等式约束的平差模型

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{V}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}-\boldsymbol{L}\\&\boldsymbol{G}\boldsymbol{X}\leqslant\boldsymbol{W}\end{aligned}\right\}$$

式中，$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0.25 & 1\\0.25 & 1\\0.5 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}0.5\\0.6\\0.7\\1.2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{W}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$

采用文献[14] 所提出的对偶互补算法，得到的结果为 $\hat{x}_{\mathrm{ICLS}}=[0.621\quad 0.379]^{\mathrm{T}}$。运用本文所提出的算法，有

(1) 设 $\boldsymbol{P}'_{(0)}=\mathrm{diag}([0,0])$，代入式(9)，得 $\hat{\boldsymbol{x}}_{(1)}=[0.8667,0.3167]^{\mathrm{T}}$；

(2) 将 $\hat{\boldsymbol{x}}_{(1)}$代入不等式约束 $\boldsymbol{G}\boldsymbol{X}\leqslant\boldsymbol{W}$，发现第一个约束条件满足而第二个不满足，于是令 $\boldsymbol{P}'_{(1)}=\mathrm{diag}([0,10\wedge 6])$，代入式(9)，得 $\hat{\boldsymbol{x}}_{(2)}=[0.6,0.4]^{\mathrm{T}}$；

(3) 将 $\hat{\boldsymbol{x}}_{(2)}$代入不等式约束 $\boldsymbol{G}\boldsymbol{X}\leqslant\boldsymbol{W}$，发现两

个约束条件都满足，并且第一个条件是无效约束而第二个条件是有效约束。迭代终止，得 $\hat{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{ICLS}}=[0.6\quad 0.4]^{\mathrm{T}}$。

在计算中得出了第二个条件是有效约束的结论，于是，将第二个条件看做等式约束，运用附加等式约束的间接平差法计算，得到了同样的结果。同时，再用 matlab 中二次规划的函数，计算得到的解与上述结果一致。可见，简单迭代法在较少的迭代次数下就能得到最优解。

3.2　不等式约束在大坝变形监测中的应用

图 1 所示为湖南某水电站大坝变形监测网。其中 5、7 两点位于拦河大坝两端山体的基岩上，认为它相对稳定没有位移。点 2、3 位于大坝下游的一个山坡上，大坝建成后在该山坡坡脚处进行船滑道的施工，破坏了改山坡受力结构，精密水准测量显示点 3 产生了明显的下沉，点 2 的下沉不明显。点 4 位于大坝左端的山坡上，在该点的上方仍存在一个滑体，视准线观测结果表明，该滑体仍在活动。

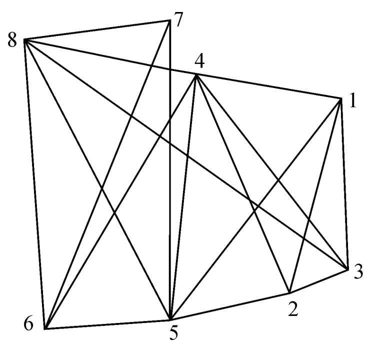

图 1　某大坝变形监测网

Fig. 1　Deformation monitoring network of a dam

对大坝进行两期角度的监测，观测方案完全相同。变形网两期观测分别为 $\boldsymbol{L}_{\mathrm{I}}$、$\boldsymbol{L}_{\mathrm{II}}$，两期观测的坐标方向平差方程分别为

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{L}_{\mathrm{I}}+\boldsymbol{V}_{\mathrm{I}}&=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_{\mathrm{I}}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{I}}\\ \boldsymbol{L}_{\mathrm{II}}+\boldsymbol{V}_{\mathrm{II}}&=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_{\mathrm{II}}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{II}}\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

因为两期观测方案完全相同，并且在列立两期误差方程时采用同样的近似值，所以有相同的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{X}_{\mathrm{I}}$、$\boldsymbol{X}_{\mathrm{II}}$ 分别表示两期 8 个监测点的坐标改正数和定向角改正数。采用史籁伯法则消去定向角改正数 δ，可以得到

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{L}'_{\mathrm{I}}+\boldsymbol{V}'_{\mathrm{I}}&=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}'_{\mathrm{I}}\\ \boldsymbol{L}'_{\mathrm{II}}+\boldsymbol{V}'_{\mathrm{II}}&=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}'_{\mathrm{II}}\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

则 $\boldsymbol{X}'_{\mathrm{I}}$、$\boldsymbol{X}'_{\mathrm{II}}$ 只包含坐标改正数。对上述两观测方程相减，并令 $\boldsymbol{L}=(\boldsymbol{L}'_{\mathrm{II}}-\boldsymbol{L}'_{\mathrm{I}})$，$\boldsymbol{V}=(\boldsymbol{V}'_{\mathrm{II}}-\boldsymbol{V}'_{\mathrm{I}})$，$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{X}'_{\mathrm{II}}-\boldsymbol{X}'_{\mathrm{I}}$，有

$$\boldsymbol{L}+\boldsymbol{V}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{d}\tag{13}$$

这里 $\boldsymbol{d}$ 实际为两期观测之间各个点的移动变形，$\boldsymbol{d}=[\Delta x_1\quad \Delta y_1\quad \cdots\quad \Delta x_8\quad \Delta y_8]$。

将 1，5，6，7，8 相对稳定的点作为拟稳点，根据式(13)平差，可得两期移动量为

$$\boldsymbol{d}=[0.07\quad 0.12\quad -2.39\quad 2.39\quad -2.49\quad 5.37\quad 0.40\quad -1.40\quad -0.12\quad 0.27\quad 0.33\quad -0.33\quad 0.01\quad -0.05\quad -0.29\quad -0.01]^{\mathrm{T}}$$

根据对实地地形的考察，发现所有控制点都位于酉水两边的山坡上，坡度线与河岸大致平行。点的位移将会垂直于坡度线指向河面。根据这个移动方向，可以列立相应的不等式约束条件。

由于控制点移动方向上的单位矢量和位移改正量的点积大于等于零，根据坡度方向和控制点大致移动方向可以列立下列不等式约束条件

$$(\cos 269°,\sin 269°)(\Delta x_1,\Delta y_1)\geqslant 0$$
$$(\cos 69°,\sin 69°)(\Delta x_2,\Delta y_2)\geqslant 0$$
$$(\cos 89°,\sin 89°)(\Delta x_3,\Delta y_3)\geqslant 0$$
$$(\cos 278°,\sin 278°)(\Delta x_4,\Delta y_4)\geqslant 0$$
$$(\cos 88°,\sin 88°)(\Delta x_6,\Delta y_6)\geqslant 0$$
$$(\cos 225°,\sin 225°)(\Delta x_8,\Delta y_8)\geqslant 0$$

写成矩阵形式为

$$\boldsymbol{G}\boldsymbol{X}\leqslant\boldsymbol{W}\tag{14}$$

加入以上的不等式约束和式(13)联立进行平差，结果如下

$$\boldsymbol{d}=[-0.38,0\quad -1.97\quad 2.12\quad -2.37\quad 5.09\quad 1.37\quad -0.20\quad 0.61\quad 0.31\quad 0.57\quad -0.02\quad 0.27\quad -0.57\quad -0.64\quad -0.01]^{\mathrm{T}}$$

从上面的计算可以看出，在不加入约束，和加入不等式约束两种情况下，都可以探测到 2、3、4 点发生了较大的变形。但是，对两期的移动加入不等式约束后，控制点只能垂直于坡度线，沿着山坡向下移动，这样更加贴合实际，也避免了无约束平差时两期移动量可以朝着任意方向移动的可能性。事实上，无约束平差的结果是不满足添加的移动方向的约束的，也就是说，无约束下变形可能朝着坡面向上移动，由滑坡的变形机制知道，这种可能性是没有的。结果表明，添加不等式约束的平差模型在探测出变形量较大的是 2，3，4 点的同时，变形的大小发生了细微的变化，并且其他各点的变形大小和方向也有了变化。增加的约束使位移的方向符合自然条件和变形机制的实际情况，其结果将更加可靠。

4 结 论

(1) 基于最优化计算理论中罚函数方法及传统测量平差中迭代权的思想提出的这种附不等式约束平差模型的解算方法是可行的。这种方法的计算过程与经典最小二乘完全相同,只是增加了一个对迭代解验证是否满足不等式约束和选权的过程,对无效约束施加零权,而对有效约束施加无限权。

(2) 计算分析表明,对于有效约束,当选取合适的权因子(算例中均取 $P'_i=10^\wedge 6$)时,选权虚拟观测算法均收敛,并且具有很快的收敛速度。最终结果与 matlab 优化工具箱结果一致。

(3) 在大坝的变形监测中,可根据控制点所处的位置,附加合适的不等式约束进行平差计算。结果表明,附不等式约束的最小二乘平差能够探测到发生明显移动的点位,由于添加了约束,结果更接近真实情况。这对于能够获取先验不等式约束信息的大坝变形网来说,具有实际意义,能够更真实地得到变形结果。

参考文献:

[1] JUDGE G G, TAKAYAMA T. Inequality Restrictions in Regression Analysis [J]. American Economic Review, 1966, 66(313): 166-181.

[2] LIEW C K. Inequality Constrained Least-squares Estimation[J]. Journal of American Statistical Association, 1976, 71(355): 746-751.

[3] SCHAFFRIN B. Ausgleichung mit Bedingungs-ungleichungen[J]. AVN, 1981, 88(6): 227-238.

[4] KOCH K R, RIESMEIER K. Bayesian Inference for the Derivation of Less Sensitive Hypothesis Tests[J]. Journal of Geodesy, 1985, 59(2): 167-179.

[5] RAO C R, TOUTENBURG H. Linear Models: Least Squares and Alternatives[M]. New York: Springer-Verlag, 1999.

[6] REMONDI B W. Real-time Centimeter-accuracy GPS: Initializing While in Motion (Warm Start Versus Cold Start)[J]. Navigation, 1993, 40(2): 199-208.

[7] LU G, KRAKIWSKY E J, LACHAPELLE G. Application of Inequality Constraint Least Squares to GPS Navigation under Selective Availability[J]. Manuscripta Geodaetica, 1993, 18: 124-130.

[8] UENO M, SANTERRE R, LANGELIER D, et al. Improvement of GPS Ambiguity Resolution Using Height Constraint for the Support of Bathymetric Surveys[C]//Proceedings of the IAIN/ION Conference. San Diego: [s. n.], 2000: 842-850.

[9] ZHU J J, SANTERRE R, CHANG Xiao-wen. A Bayesian Method for Linear Inequality Constrained Adjustment and Its Application to GPS Positioning[J]. Journal of Geodesy, 2005, 78(9): 528-534.

[10] PENG J H, ZHANG H P, SHONG S L, et al. An Aggregate Constraint Method for Inequality-constrained Least Squares Problem[J]. Journal of Geodesy, 2006, 79(12): 705-713.

[11] FENG Guangcai, ZHU Jianjun. A New Approach to Inequality Constrained Least-squares Adjustment [J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2007, 36(2): 119-122.(冯光财,朱建军.基于有效约束的附不等式约束平差的一种新算法[J].测绘学报,2007,36(2):119-122.)

[12] ZHU jianjun, OUYANG Wensen, WEN Xiaoyue. Solving the LICA Problem by GA Method [J]. Journal of Geotechnical Investigation & Surveying, 2006(3): 61-64.(朱建军,欧阳文森,文小岳.基于遗传算法解决附有不等式约束的最小二乘平差问题的研究[J].工程勘察,2006(3):61-64.)

[13] SONG Yingchun, ZUO Tingying, ZHU Jianjun. Research on Algorithm of Adjustment Model with Linear Inequality Constrained Parameters [J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2008, 37(4): 433-437.(宋迎春,左廷英,朱建军.带有线性不等式约束平差模型的算法研究[J].测绘学报,2008,37(4):433-437.)

[14] BJÖRCK Å. Numerical Methods for Least Squares Problems[M]. Philadelphia: SIAM. 1996: 306-309.

[15] DAI Wujiao, ZHU Jianjun. Single Epoch Ambiguity Resolution in Structure Monitoring Using GPS [J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2007, 32(3): 234-237.(戴吾蛟,朱建军.GPS建筑物震动变形监测中的单历元算法[J].武汉大学学报:信息科学版,2007,32(3):234-237.)

[16] ZHU jianjun. The Bayes Method of Deformation Examination[J]. Reconnaissance Science and Technology, 1995(6): 44-47.(朱建军.变形检验的 Bayes 方法[J].勘测科学与技术,1995(6):44-47.)

[17] CHEN Baoling. Theory and Algorithm of Optimization[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2005.(陈宝林.最优化理论与算法[M].北京:清华大学出版社,2005.)

[18] XU P, CANNON E, LACHAPELLE G. Stabilizing Illconditioned Linear Complementarity Problems [J]. Journal of Geodesy, 1999, 73: 204-213.

(责任编辑:丛树平)

收稿日期:2010-06-02

修回日期:2010-09-27

第一作者简介:朱建军(1962—),男,博士,教授,博士生导师,研究方向为测量平差与数据处理。

First author: ZHU Jianjun (1962—), male, PhD, professor, PhD supervisor, majors in surveying adjustment and data processing.

E-mail: zjj@mail.csu.edu.cn