

# DES POINTS FIXES COMMUNS POUR DES DIFFÉOMORPHISMES DE $\mathbb{S}^2$ QUI COMMUTENT ET PRÉSERVENT UNE MESURE DE PROBABILITÉ

F. BÉGUIN, P. LE CALVEZ, S. FIRMO ET T. MIERNOWSKI

ABSTRACT. Nous montrons des résultats d'existence de points fixes communs pour des homéomorphismes du plan  $\mathbb{R}^2$  ou la sphère  $\mathbb{S}^2$ , qui commutent deux à deux et préservent une mesure de probabilité. Par exemple, nous montrons que des  $C^1$ -difféomorphismes  $f_1, \dots, f_n$  de  $\mathbb{S}^2$  suffisamment proches de l'identité, qui commutent deux à deux, et qui préservent une mesure de probabilité dont le support n'est pas réduit à un point, ont au moins deux points fixes communs.

## 1. INTRODUCTION

Le but de cet article est d'établir de nouveaux théorèmes d'existence de points fixes communs pour des homéomorphismes de surfaces qui commutent. En d'autres termes, on cherche des points fixes pour les actions continues de  $\mathbb{Z}^n$  sur les surfaces. Commençons par un bref historique des résultats de ce type.

**1.1. Résultats “à la Lefschetz”.** Le théorème de Poincaré-Lefschetz implique que tout homéomorphisme d'une surface de caractéristique d'Euler non-nulle, isotope à l'identité, admet un point fixe. Il est donc légitime de se demander si  $n$  homéomorphismes d'une surface de caractéristique d'Euler non-nulle, isotopes à l'identité, qui commutent deux à deux, ont toujours un point fixe commun. Autrement dit, une action de  $\mathbb{Z}^n$  sur une surface de caractéristique d'Euler non-nulle via des homéomorphismes isotopes à l'identité possède un point fixe global.

En 1964, E. Lima a montré que toute action continue de  $\mathbb{R}^n$  sur une surface fermée de caractéristique d'Euler non-nulle admet un point fixe ([17]). Ce résultat a été généralisé par J.-F. Plante aux actions continues de groupes de Lie nilpotents ([19]). L'existence de point fixe pour des actions de groupes discrets est bien sûr plus délicate à montrer. Le premier résultat concernant les actions de  $\mathbb{Z}^n$ , motivé par une question de théorie des feuilletages<sup>1</sup>, a été montré par C. Bonatti il y a une vingtaine d'années. Nous notons  $\text{Diff}^1(S)$  l'ensemble des  $C^1$ -difféomorphismes d'une surface  $S$ .

**Théorème 1.1** (Bonatti [1, 2]). *Pour toute surface fermée  $S$  de caractéristique d'Euler non-nulle, il existe un voisinage  $U$  de l'identité dans  $\text{Diff}^1(S)$  (muni de la topologie  $C^1$ ) avec la propriété suivante: des éléments  $f_1, \dots, f_n$  de  $U$  qui commutent deux à deux ont un point fixe commun.*

Le fait que, dans l'énoncé ci-dessus, le voisinage  $U$  ne dépend pas du nombre  $n$  de difféomorphismes considérés a été montré par S. Firmo dans [6]. Le résultat de Bonatti a été généralisé dans plusieurs directions. En particulier, dans le cas où la surface  $S$  est la sphère

---

*Date:* July 6, 2011.

*2010 Mathematics Subject Classification.* 37E30, 37E45.

*Key words and phrases.* point fixe, mesure invariante, homéomorphisme conservatif, récurrence, nombre de rotation, feuilletage topologique, nombre d'intersection.

Ce travail n'aurait sans doute pas été possible sans du soutien financier de l'accord de coopération France-Brésil, qui a financé les séjours de F. B., P. L. C. et T. M. à l'Universidade Federal Fluminense.

<sup>1</sup>Un feuilletage proche d'une fibration triviale en tores de dimension  $n$  au-dessus d'une surface fermée de caractéristique d'Euler non-nulle possède-t-il toujours une feuille compacte ?

$\mathbb{S}^2$  et où l'entier  $n$  est égal à 2, M. Handel a considérablement affaibli l'hypothèse de proximité à l'identité nécessaire pour assurer l'existence d'un point fixe commun. Si  $f_1, f_2$  sont deux homéomorphismes préservant l'orientation de la sphère  $\mathbb{S}^2$  qui commutent, Handel considère des isotopies  $(f_1^t)_{t \in [0,1]}$  et  $(f_2^t)_{t \in [0,1]}$  joignant l'identité respectivement à  $f_1$  et  $f_2$ , et note  $W(f_1, f_2)$  la classe du lacet  $t \mapsto [f_1^t, f_2^t]$  dans  $\pi_1(\text{Homeo}(\mathbb{S}^2), \text{Id}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . L'invariant  $W(f_1, f_2)$  est nul dès lors que  $f_1$  et  $f_2$  sont suffisamment proches de l'identité (en topologie  $C^0$ ). Handel montre alors :

**Théorème 1.2** (Handel, [12]). *Deux difféomorphismes  $f_1, f_2$  de la sphère  $\mathbb{S}^2$ , isotopes à l'identité, qui commutent, et qui satisfont  $W(f_1, f_2) = 0$ , ont un point fixe commun.*

On remarquera que le théorème d'Handel est faux sans l'hypothèse de nullité de l'invariant  $W(f_1, f_2)$  : deux rotations d'angle  $\pi$  et d'axes orthogonaux forment une paire de difféomorphismes de  $\mathbb{S}^2$  qui commutent mais n'ont pas de point fixe commun. On notera également que les arguments de Handel s'appliquent à des homéomorphismes, si l'on suppose *a priori* que ceux n'ont qu'un nombre fini de points fixes (ce qui, dans le contexte, est une hypothèse très forte).

Il a fallu attendre 2007 pour que le résultat de Handel soit généralisé à un nombre  $n$  arbitraire de difféomorphismes :

**Théorème 1.3** (Franks, Handel, Parwani, [8]). *Soient  $f_1, \dots, f_n$  des  $C^1$ -difféomorphismes de la sphère  $\mathbb{S}^2$ , isotopes à l'identité, qui commutent deux à deux, et  $G$  le sous-groupe de  $\text{Diff}^1(\mathbb{S}^2)$  engendré par ces difféomorphismes. Alors il existe un sous-groupe  $G'$  d'indice 2 dans  $G$ , tel que les éléments de  $G'$  ont un point fixe commun. Si l'invariant  $W(f_i, f_j)$  est nul pour  $1 \leq i, j \leq n$ , alors les difféomorphismes  $f_1, \dots, f_n$  ont un point fixe commun.*

Dans le cas d'une surface fermée de caractéristique d'Euler strictement négative, la situation est plus simple :

**Théorème 1.4** (Franks, Handel, Parwani, [9]). *Si  $S$  est une surface fermée de caractéristique d'Euler strictement négative, alors des  $C^1$ -difféomorphismes  $f_1, \dots, f_n$  de  $S$ , isotopes à l'identité, qui commutent deux à deux, ont un point fixe commun.*

**1.2. Un résultat "à la Brouwer".** Le théorème des translations planes de Brouwer affirme que "la dynamique d'un homéomorphisme de  $\mathbb{R}^2$ , qui préserve l'orientation et n'a pas de point fixe, ressemble localement à celle d'une translation" (voir [4] ou [11]). Par exemple, si  $f$  est un homéomorphisme de  $\mathbb{R}^2$ , qui préserve l'orientation et n'a pas de point fixe, alors l'orbite de tout point sous l'action de  $f$  tend vers l'infini. Un des outils principaux des preuves des théorèmes 1.3 et 1.4 est la généralisation partielle du théorème de Brouwer à l'action de  $n$  difféomorphismes qui commutent deux à deux :

**Théorème 1.5** (Franks, Handel, Parwani, [8]). *Soient  $f_1, \dots, f_n$  des  $C^1$ -difféomorphismes préservant l'orientation du plan  $\mathbb{R}^2$  qui commutent deux à deux. Si ces difféomorphismes laissent invariant un même sous-ensemble compact non-vide du plan, alors ils ont un point fixe commun.*

Le théorème des translations planes de Brouwer implique que tout homéomorphisme du plan  $\mathbb{R}^2$  qui préserve l'orientation et laisse invariante une mesure de probabilité admet un point fixe. Ce fait et le théorème 1.5 soulèvent naturellement la question suivante :

**Question 1.6.** *Des homéomorphismes  $f_1, \dots, f_n$  du plan  $\mathbb{R}^2$  qui préservent l'orientation, commutent deux à deux, et laissent invariante une mesure de probabilité, ont-ils un point fixe commun ?*

Le but de notre article est de répondre positivement à la question 1.6, lorsque le comportement à l'infini des homéomorphismes considérés est "suffisamment sympathique". On en déduira des

résultats d'existence de deux points fixes communs pour des  $C^1$ -difféomorphismes de la sphère qui commutent deux à deux, et laissent invariante une mesure de probabilité dont le support n'est pas réduit à un point.

**1.3. Énoncé de nos résultats.** Nous notons  $\text{Homeo}(\mathbb{R}^2)$  le groupe des homéomorphismes de  $\mathbb{R}^2$ , muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts, et  $\text{Homeo}^+(\mathbb{R}^2)$  le sous-groupe constitué des homéomorphismes préservant l'orientation. D'après le théorème de Kneser,  $\text{Homeo}^+(\mathbb{R}^2)$  se retracte sur  $\text{SO}(2)$  (voir [14] ou [16, théorème 2.9]). Ainsi, tout élément  $f$  de  $\text{Homeo}^+(\mathbb{R}^2)$  est isotope à l'identité dans  $\text{Homeo}^+(\mathbb{R}^2)$ . De plus, si  $I = (f_t)_{t \in [0,1]}$  est une isotopie de l'identité à  $f$ , alors toute autre isotopie est homotope à  $R^k I$  pour un certain  $k \in \mathbb{Z}$ , où  $R$  désigne le lacet dans  $\text{SO}(2)$  formé des rotations vectorielles d'angle  $2\pi t$  pour  $t$  allant de 0 à 1. Pour tout homéomorphisme  $f$ , nous notons  $\text{Fix}(f)$  l'ensemble de ses points fixes. Nous noterons  $d\theta = \frac{1}{2\pi} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$  la 1-forme d'angle polaire usuelle sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ .

Soit  $f$  un homéomorphisme du plan  $\mathbb{R}^2$  préservant l'orientation, et  $I = (f_t)_{t \in [0,1]}$  une isotopie joignant l'identité à  $f$ . Pour tout point  $z$  dans  $\mathbb{R}^2$ , notons  $\gamma_{I,z} : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  le chemin donné par  $\gamma_{I,z}(t) = f_t(z)$ . Il existe un voisinage  $W$  de l'infini dans  $\mathbb{R}^2$  tel que, pour  $z \in W$ , le chemin  $\gamma_{I,z}$  évite l'origine. On peut alors définir une application

$$\begin{aligned} \text{Tourne}_I : W &\longrightarrow \mathbb{R} \\ z &\longmapsto \int_{\gamma_{I,z}} d\theta . \end{aligned}$$

Si  $z$  et  $z'$  sont deux points distincts dans  $\mathbb{R}^2$ , notons  $\gamma_{I,z,z'} : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  le chemin donné par  $\gamma_{I,z,z'}(t) = f_t(z) - f_t(z')$ . Si  $\Delta$  désigne la diagonale de  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ , on peut définir une application

$$\begin{aligned} \text{Enlace}_I : (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2) \setminus \Delta &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (z, z') &\longmapsto \int_{\gamma_{I,z,z'}} d\theta . \end{aligned}$$

La fonction  $\text{Tourne}_I$  prend des valeurs entières sur les points fixes : si  $z \in \text{Fix}(f)$ , la quantité  $\text{Tourne}_I(z)$  est le nombre algébrique de tours que fait le point  $f_t(z)$  autour de 0 quand  $t$  varie de 0 à 1. De même, la fonction  $\text{Enlace}_I$  prend des valeurs entières sur les couples de points fixes distincts : si  $z, z' \in \text{Fix}(f)$ , la quantité  $\text{Enlace}_I(z, z')$  est le nombre algébrique de tours que fait le segment joignant  $f_t(z')$  à  $f_t(z)$  quand  $t$  varie de 0 à 1. Observons également que la fonction  $\text{Enlace}_I$  et le germe en l'infini de la fonction  $\text{Tourne}_I$  ne dépendent que de la classe d'homotopie de l'isotopie  $I$ . De plus, si  $I'$  est une autre isotopie joignant l'identité à  $f$ , homotope à  $R^k I$ , alors on a

$$\text{Enlace}_{I'} = \text{Enlace}_I + k \quad \text{sur } (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2) \setminus \Delta \quad (1)$$

$$\text{Tourne}_{I'} = \text{Tourne}_I + k \quad \text{sur un voisinage } W \text{ de l'infini.} \quad (2)$$

Nous introduisons maintenant deux propriétés qui joueront un rôle crucial dans notre article :

**(P1)** La fonction  $\text{Enlace}_I$  est bornée sur  $\text{Fix}(f) \times \text{Fix}(f) \setminus \Delta$ .

**(P2)** Il existe un voisinage  $W$  de l'infini tel que la fonction  $\text{Tourne}_I$  est constante sur  $\text{Fix}(f) \cap W$ .

Les formules (1) et (2) ci-dessus montrent que les propriétés (P1) et (P2) ne dépendent pas de l'isotopie  $I$  choisie, mais uniquement de l'homéomorphisme  $f$ . Ces deux propriétés sont évidemment vérifiées si l'ensemble des points fixes de  $f$  est fini ; il est beaucoup plus intéressant de noter qu'elles le sont aussi si  $f$  est "de classe  $C^1$  à l'infini" :

**Proposition 1.7.** *S'il existe une structure différentielle sur  $\mathbb{S}^2 = \mathbb{R}^2 \sqcup \{\infty\}$  tel que  $f$  s'étend en un  $C^1$ -difféomorphisme de  $\mathbb{S}^2$ , alors les propriétés (P1) et (P2) sont vérifiées.*

Dans l'appendice, nous décrivons quelques exemples d'homéomorphismes qui satisfont, ou ne satisfont pas, (P1) et/ou (P2). Nous donnerons également un exemple de  $C^1$ -difféomorphisme du plan qui satisfait (P1) et (P2), mais ne s'étend pas en un  $C^1$ -difféomorphisme de la sphère.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer notre résultat principal :

**Théorème 1.8.** *Soit  $f \in \text{Homeo}^+(\mathbb{R}^2)$  un homéomorphisme du plan qui préserve l'orientation. On suppose que  $f$  vérifie les propriétés (P1) et (P2), et laisse invariante une mesure de masse finie  $\mu$  dont le support n'est pas contenu dans  $\text{Fix}(f)$ . Alors :*

**1** - *il existe une partie compacte non-vide de  $\text{Fix}(f)$  qui est invariante par tout élément de  $\text{Homeo}(\mathbb{R}^2)$  qui commute avec  $f$  et qui laisse  $\mu$  invariante ;*

**2** - *si  $f$  s'étend en un  $C^1$ -difféomorphisme de  $\mathbb{S}^2 = \mathbb{R}^2 \sqcup \{\infty\}$ , il existe une partie compacte non-vide de  $\text{Fix}(f)$  qui est invariante par tout élément de  $\text{Homeo}(\mathbb{R}^2)$  qui commute avec  $f$ .*

*Remarque 1.9.* Dans l'appendice, nous décrivons un  $C^\infty$ -difféomorphisme  $f$  du plan  $\mathbb{R}^2$ , qui satisfait les propriétés (P1) et (P2) (mais ne s'étend pas en un  $C^1$ -difféomorphisme de  $\mathbb{S}^2$ ), qui laisse invariante une mesure de masse finie dont le support n'est pas contenu dans  $\text{Fix}(f)$ , et qui commute avec la translation  $(x, y) \mapsto (x + 1, y)$ . En particulier, si  $A$  est une partie non-vide de  $\text{Fix}(f)$  qui est invariante par tout élément de  $\text{Homeo}(\mathbb{R}^2)$  qui commute avec  $f$ , alors  $A$  n'est pas compacte. Cet exemple montre que l'hypothèse “ $f$  s'étend en un  $C^1$ -difféomorphisme de  $\mathbb{S}^2$ ” est nécessaire dans l'assertion 2 du théorème 1.8.

La combinaison de ce théorème avec ceux de Franks, Handel et Parwani précédemment cités fournit des nouveaux résultats d'existence de points fixes communs. Voici tout d'abord un résultat concernant les  $n$ -uplets de  $C^1$ -difféomorphismes du plan :

**Corollaire 1.10.** *Soient  $f_1, \dots, f_n$  des  $C^1$ -difféomorphismes du plan  $\mathbb{R}^2$ , qui préservent l'orientation, et commutent deux à deux. Si ces difféomorphismes satisfont les propriétés (P1) et (P2), et s'ils laissent invariante une mesure de probabilité, alors ils ont un point fixe commun.*

En effet : soit le support de  $\mu$  est contenu dans l'ensemble des points fixes communs de  $f_1, \dots, f_n$ , ce qui implique en particulier que les difféomorphismes  $f_1, \dots, f_n$  ont au moins un point fixe commun ; soit, il existe  $i \in \{1, \dots, n\}$  tel que le support de  $\mu$  n'est pas contenu dans l'ensemble des points fixes du difféomorphisme  $f_i$ , et on obtient l'existence d'un point fixe commun en mettant bout à bout le premier point du théorème 1.8 et théorème 1.5.

Voici maintenant un résultat concernant les  $n$ -uplets de  $C^1$ -difféomorphismes de  $\mathbb{S}^2$ , qui découle immédiatement du second point du théorème 1.8 et du théorème 1.5 :

**Corollaire 1.11.** *Soient  $f_1, \dots, f_n$  des  $C^1$ -difféomorphismes de  $\mathbb{S}^2$ , qui préservent l'orientation, et commutent deux à deux. Si ces difféomorphismes ont un seul point fixe commun, alors, pour tout élément  $f$  du sous-groupe de  $\text{Diff}^1(\mathbb{S}^2)$  qu'ils engendrent, les seules mesures de probabilité  $f$ -invariantes sont celles dont le support est contenu dans l'ensemble des points fixes de  $f$ .*

Enfin, en mettant bout à bout le théorème 1.3, la proposition 1.7 et le corollaire 1.10, on obtient immédiatement le résultat suivant :

**Corollaire 1.12.** *Soient  $f_1, \dots, f_n$  des  $C^1$ -difféomorphismes de la sphère  $\mathbb{S}^2$  qui préservent l'orientation et commutent deux à deux, et  $G$  le sous-groupe de  $\text{Diff}^1(\mathbb{S}^2)$  engendré par ces difféomorphismes. On suppose que les difféomorphismes  $f_1, \dots, f_n$  laissent invariante une mesure de probabilité dont le support n'est pas réduit à un point. Alors il existe un sous-groupe  $G'$  d'indice 2 dans  $G$  tel que les éléments de  $G'$  ont deux points fixes communs. Si l'invariant  $W(f_i, f_j)$  est nul pour  $1 \leq i, j \leq n$ , alors les difféomorphismes  $f_1, \dots, f_n$  ont deux points fixes communs.*

On rappelle que l'invariant  $W(f_i, f_j)$  est nul dès lors que les difféomorphismes  $f_i$  et  $f_j$  sont suffisamment proches de l'identité en topologie  $C^0$ .

**1.4. Questions et problèmes.** Les résultats énoncés ci-dessus ne semblent pas optimaux de plusieurs points de vue.

**1 -** Notre preuve du théorème 1.8 repose fondamentalement sur le fait que l'homéomorphisme  $f$  a un comportement contrôlé à l'infini (*i.e.* qu'il satisfait (P1) et (P2), ou qu'il s'étend en un  $C^1$ -difféomorphisme de  $\mathbb{S}^2$ ). Rien n'indique cependant que les énoncés du théorème 1.8 et des corollaires 1.10, 1.11 et 1.12 deviennent faux si on ne fait aucune hypothèse de comportement à l'infini. Par exemple, rien n'interdit *a priori* que le corollaire 1.12 reste vrai si on travaille avec des homéomorphismes au lieu de  $C^1$ -difféomorphismes.

**2 -** Le théorème des translations planes de Brouwer implique que tout homéomorphisme du plan préservant l'orientation qui admet un point récurrent (ou même un point non-errant) fixe un point. Il n'est donc pas exclu que, dans les énoncés ci-dessus, on puisse remplacer l'existence d'une mesure de probabilité invariante par la simple existence d'un point récurrent ou d'un point non-errant. Par exemple, nous ne savons pas répondre à la question suivante : *Soient  $f_1, \dots, f_n$  des  $C^1$ -difféomorphismes du plan  $\mathbb{R}^2$  qui préservent l'orientation et commutent deux à deux. On suppose qu'un élément  $f$  du groupe engendré par  $f_1, \dots, f_n$  possède un point récurrent (ou non-errant) qui n'est pas fixe, et s'étend en un  $C^1$ -difféomorphisme de  $\mathbb{S}^2$ . Les difféomorphismes  $f_1, \dots, f_n$  ont-ils nécessairement un point fixe commun ?*

**3 -** S. Druck, F. Fang et S. Firmo ont montré que le théorème 1.1 de Bonatti se généralise aux cas d'un groupe nilpotent ([5]). Il est donc naturel de se demander si les corollaires 1.10, 1.11 et 1.12 se généralisent de même à ce cas. Dans un travail récent ([18]), K. Mann a montré l'existence de points fixes globaux pour des groupes (non-commutatifs) d'homéomorphismes du plan préservant l'aire, sous une hypothèse assez forte concernant le diamètre des orbites. On peut se demander s'il est possible de combiner les techniques de Mann et les nôtres afin d'obtenir d'autres résultats d'existences de points fixes.

**4 -** Le corollaire 1.12 implique en particulier le renforcement suivant du théorème de Bonatti : *si  $f_1, \dots, f_n$  sont des  $C^1$ -difféomorphismes de la sphère  $\mathbb{S}^2$  suffisamment  $C^1$ -proches de l'identité, qui commutent deux à deux, et qui laissent invariante une mesure de probabilité dont le support n'est pas réduit à un point, alors  $f_1, \dots, f_n$  ont deux points fixes communs.* Néanmoins, notre preuve du corollaire 1.12 utilise le théorème 1.5 de Franks, Handel et Parwani qui lui-même repose sur des techniques relativement sophistiquées de "théorie de Thurston non-compacte". Au contraire, la preuve de Bonatti du théorème 1.1 n'utilise que des arguments très élémentaires (essentiellement la définition de la topologie  $C^1$ , et le fait que l'existence d'une courbe d'indice 1 force l'existence d'un point fixe). Il est donc naturel de se demander si on peut montrer l'énoncé ci-dessus en n'utilisant que des techniques élémentaires "à la Bonatti". Nous savons le faire dans le cas particulier  $n = 2$ , mais pas lorsque  $n \geq 3$ .

**1.5. Plan de l'article.** Dans la section 2, nous ramenons le théorème 1.8 à un énoncé concernant les nombres de rotation des orbites autour des points fixes de  $f$ . La preuve de cet énoncé est l'objet de la section 5. Cette preuve utilise différentes caractérisations et propriétés du nombre de rotation d'une orbite autour d'un point fixe qui seront explicitées dans la section 3, ainsi que deux résultats importants de dynamique topologique sur les surfaces, qui seront rappelés dans la section 4. La proposition 1.7 sera démontrée dans la section 6. Enfin, dans l'appendice, nous décrirons quelques exemples d'homéomorphismes du plan qui satisfont, ou pas, les propriétés (P1) et/ou (P2).

## 2. UN ÉNONCÉ CONCERNANT LES NOMBRES DE ROTATION AUTOUR DES POINTS FIXES

Le but de cette section est de ramener notre théorème principal 1.8 à un énoncé technique concernant les nombres de rotation des orbites autour des points fixes.

Soit  $f$  un homéomorphisme du plan préservant l'orientation. Nous notons  $\text{Rec}^+(f)$  l'ensemble des points positivement récurrent sous l'action de  $f$ , c'est-à-dire l'ensemble des points  $z \in \mathbb{R}^2$  pour lesquels il existe une suite d'entiers strictement croissante  $(n_k)_{k \geq 0}$  telle que la suite de points  $f^{n_k}(z)$  tend vers  $z$ . Considérons maintenant  $I = (f_t)_{t \in [0,1]}$  une isotopie de l'identité à  $f$ , et  $z' \in \text{Fix}(f)$ . On dira que l'orbite d'un point  $z \in \text{Rec}^+(f)$  a un nombre de rotation  $\rho_{I,z'}(z)$  autour de  $z'$  si, pour toute suite d'entiers strictement croissante  $(n_k)_{k \geq 0}$  telle que la suite  $f^{n_k}(z)$  converge vers  $z$ , on a

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{n_k} \sum_{r=0}^{n_k-1} \text{Enlace}_I(f^r(z), z') = \rho_{I,z'}(z).$$

Le formule (1) dans l'introduction montre que l'existence du nombre de rotation  $\rho_{I,z'}(z)$  ne dépend pas de l'isotopie  $I$  choisie, et sa valeur ne dépend que de la classe d'homotopie de  $I$ .

Supposons maintenant que  $f$  vérifie la propriété (P2). La formule (2) montre que l'on peut alors trouver une isotopie  $I$  joignant l'identité à  $f$  telle que la fonction  $\text{Tourne}_I$  s'annule sur les points fixes de  $f$  proches de l'infini. Une telle isotopie  $I$  sera dite *adaptée*. Si on suppose de plus que  $\text{Fix}(f)$  n'est pas compact, alors il n'existe qu'une seule classe d'homotopie d'isotopies adaptées ; le nombre de rotation  $\rho_{I,z'}(z)$ , lorsqu'il est défini, ne dépend donc pas du choix de  $I$  parmi les isotopies adaptées ; on notera  $\rho_{z'}(z) := \rho_{I,z'}(z)$  où  $I$  est une isotopie adaptée.

Pour tout homéomorphisme  $f$  du plan  $\mathbb{R}^2$ , nous noterons  $\mathcal{M}(f)$  l'ensemble des mesures boréliennes de masses finies  $f$ -invariantes. La proposition suivante est la clé de la preuve de notre théorème principal 1.8.

**Proposition 2.1.** *Soit  $f$  un homéomorphisme du plan  $\mathbb{R}^2$ , qui préserve l'orientation, vérifie les propriétés (P1) et (P2), et tel que  $\text{Fix}(f)$  n'est pas compact.*

- (1) *Soit  $g$  un homéomorphisme du plan qui commute avec  $f$ . Si  $z' \in \text{Fix}(f)$ , si  $z \in \text{Rec}^+(f)$  et si  $\rho_{z'}(z)$  est défini, alors  $\rho_{g(z')}(g(z))$  est également défini, et on a  $\rho_{g(z')}(g(z)) = \rho_{z'}(z)$  ou  $\rho_{g(z')}(g(z)) = -\rho_{z'}(z)$  selon que  $g$  préserve ou renverse l'orientation.*
- (2) *Pour toute mesure  $\mu \in \mathcal{M}(f)$  et tout point  $z' \in \text{Fix}(f)$ , la fonction  $\rho_{z'}$  est définie  $\mu$ -presque partout sur  $\text{Rec}^+(f) \setminus \{z'\}$ .*
- (3) *Pour toute mesure  $\mu \in \mathcal{M}(f)$  et tout réel  $a > 0$ , on a*

$$\lim_{z' \rightarrow \infty, z' \in \text{Fix}(f)} \mu(\{z \in \text{Rec}^+(f), |\rho_{z'}(z)| \geq a\}) = 0.$$

- (4) *Supposons que  $f$  s'étend en un  $C^1$ -difféomorphisme de  $\mathbb{S}^2 = \mathbb{R}^2 \sqcup \{\infty\}$ . Alors pour tout  $a > 0$ , il existe un voisinage  $W$  de l'infini dans  $\mathbb{R}^2$  tel que, pour tout  $z' \in \text{Fix}(f) \cap W$  et tout  $z \in \text{Rec}^+(f)$ , on a  $|\rho_{z'}(z)| < a$  si  $\rho_{z'}(z)$  est défini.*
- (5) *Pour toute mesure  $\mu \in \mathcal{M}(f)$  dont le support n'est pas contenu dans  $\text{Fix}(f)$ , il existe un point  $z' \in \text{Fix}(f)$  tel que*

$$\mu(\{z \in \text{Rec}^+(f), \rho_{z'}(z) \neq 0\}) \neq 0.$$

Expliquons dès maintenant pourquoi le théorème 1.8 découle de cette proposition.

*Preuve du théorème 1.8 en admettant la proposition 2.1.* Soit  $f$  un homéomorphisme du plan préservant l'orientation. Supposons, comme dans l'énoncé du théorème 1.8 que  $f$  vérifie les propriétés (P1) et (P2), et laisse invariante une mesure de masse finie  $\mu$  dont le support n'est pas contenu dans  $\text{Fix}(f)$ . Rappelons que  $\text{Fix}(f)$  n'est pas vide. En effet, si  $\text{Fix}(f)$  était vide, alors, par le théorème des translations planes de Brouwer ([11]), toute orbite de  $f$  serait errante ; en particulier,  $f$  ne pourrait préserver aucune mesure de masse finie.

Le théorème 1.8 est trivial si  $\text{Fix}(f)$  est compact : en effet,  $\text{Fix}(f)$  est non-vide et invariant par tout homéomorphisme qui commute avec  $f$ . Nous supposons donc maintenant que  $\text{Fix}(f)$  n'est pas compact, ce qui nous permet d'appliquer la proposition 2.1.

Pour  $a > 0$ , considérons le sous-ensemble  $X_a$  de  $\text{Fix}(f)$  défini comme suit :

$$X_a = \{z' \in \text{Fix}(f), \mu(\{z \in \text{Rec}^+(f), |\rho_{z'}(z)| \geq a\}) \geq a\}.$$

L'assertion (5) de la proposition 2.1 nous dit que, pour  $a$  assez petit,  $X_a$  n'est pas vide. L'assertion (3) nous dit que cet ensemble est borné. Enfin, d'après l'assertion (1), l'ensemble  $X_a$  est invariant par tout homéomorphisme  $g$  qui préserve la mesure  $\mu$  et qui commute avec  $f$ . Pour montrer la première assertion du théorème 1.8, il suffit donc de considérer l'adhérence de  $X_a$ , pour  $a$  assez petit.

Supposons maintenant que  $f$  peut être étendu en un  $C^1$ -difféomorphisme de  $\mathbb{S}^2$ , et considérons, pour  $a > 0$ , le sous-ensemble  $Y_a$  de  $\text{Fix}(f)$  défini comme suit :

$$Y_a = \{z' \in \text{Fix}(f), \text{ il existe } z \in \text{Rec}^+(f) \text{ tel que } \rho_{z'}(z) \text{ existe et } |\rho_{z'}(z)| \geq a\}.$$

Là-encore, on sait grâce à l'assertion (5) de la proposition 2.1 que  $Y_a$  est non vide dès que  $a$  est assez petit. L'assertion (4) nous dit que cet ensemble est borné, et l'assertion (1) qu'il est invariant par tout homéomorphisme qui commute avec  $f$ . Pour montrer la seconde assertion du théorème 1.8, il suffit donc de considérer l'adhérence de  $Y_a$ , pour  $a$  assez petit.  $\square$

La preuve de la proposition 2.1 occupe presque toute la fin de notre article.

### 3. DÉFINITIONS ALTERNATIVES ET PROPRIÉTÉS DU NOMBRE DE ROTATION

Soit  $f$  un homéomorphisme du plan  $\mathbb{R}^2$  préservant l'orientation, et  $I = (f_t)_{t \in [0,1]}$  une isotopie joignant l'identité à  $f$ . Dans la section 2, nous avons défini le nombre de rotation  $\rho_{I,z'}(z)$  de l'orbite d'un point  $z \in \text{Rec}^+(f)$  autour d'un point  $z' \in \text{Fix}(f)$ , comme une moyenne de Birkhoff de la fonction  $z \mapsto \text{Enlace}_I(z, z')$  le long de l'orbite de  $z$ . Ce nombre de rotation admet cependant plusieurs définitions alternatives. Le but de cette section est de présenter certaines de ces définitions, qui interviendront au cours de notre preuve de la proposition 2.1. Ce sera également l'occasion d'introduire un certain nombre de notations, et de mettre en lumière quelques propriétés élémentaires de la quantité  $\rho_{I,z'}(z)$ .

Nous considérons d'abord le cas particulier où  $z$  est un point fixe de  $f$ . La définition du nombre de rotation  $\rho_{I,z'}(z)$  se simplifie radicalement dans ce cas particulier :

**Fait 3.1.** *Si  $z$  et  $z'$  sont deux points fixes distincts de  $f$ , alors  $\rho_{I,z'}(z)$  existe et est égal à  $\text{Enlace}_I(z, z')$ .*

Remarquons maintenant qu'étant donné un point  $z' \in \text{Fix}(f)$ , on peut toujours trouver une isotopie  $I' = (f'_t)_{t \in [0,1]}$  joignant l'identité à  $f$ , homotope à  $I$ , et qui fixe le point  $z'$  (*i.e.* telle que  $f'_t$  fixe  $z'$  pour tout  $t$ ) : il suffit par exemple de poser  $f'_t = \tau_t \circ f_t$  où  $\tau_t$  est l'unique translation de  $\mathbb{R}^2$  qui envoie  $f_t(z')$  sur  $z'$ . Comme  $I$  et  $I'$  sont homotopes, on a alors  $\text{Enlace}_I(z, z') = \text{Enlace}_{I'}(z, z')$ . Par ailleurs, la quantité  $\text{Enlace}_{I'}(z, z')$  est, par définition, le nombre de tours que fait le lacet  $t \mapsto f'_t(z) - f'_t(z')$  autour de 0. Comme  $f'_t(z') = z'$ , c'est aussi le nombre de tours que fait la trajectoire  $\gamma_{I',z} : t \mapsto f'_t(z)$  autour du point  $z'$ .

Expliquons maintenant comment interpréter  $\rho_{I,z'}(z)$  via un relèvement approprié de  $f$  au revêtement universel de l'anneau  $\mathbb{R}^2 \setminus \{z'\}$ . Pour  $z' \in \text{Fix}(f)$ , nous considérerons l'anneau  $A_{z'} = \mathbb{R}^2 \setminus \{z'\}$ . Nous noterons  $\pi_{z'} : \tilde{A}_{z'} \rightarrow A_{z'}$  le revêtement universel de l'anneau  $A_{z'}$ , et  $T_{z'} : \tilde{A}_{z'} \rightarrow \tilde{A}_{z'}$  le générateur du groupe des automorphismes de revêtement naturellement défini par le bord orienté d'un disque euclidien centré en  $z'$ . À l'isotopie  $I$  est naturellement associé un relèvement  $\tilde{f}_{I,z'}$  de  $f|_{A_{z'}}$  à  $\tilde{A}_{z'}$ . Pour construire ce relèvement, on choisit une isotopie  $I' = (f'_t)_{t \in [0,1]}$  homotope à  $I$  qui fixe le point  $z'$ , et on relève l'isotopie  $(f'_t|_{A_{z'}})_{t \in [0,1]}$  à  $\tilde{A}_{z'}$  en une isotopie partant de l'identité ; l'extrémité de cette isotopie est, par définition, l'homéomorphisme  $\tilde{f}_{I,z'}$ . On vérifie facilement que  $\tilde{f}_{I,z'}$  ne dépend pas du choix de l'isotopie  $I'$ , et ne dépend

d'ailleurs que de la classe d'homotopie de  $I$ . Le fait ci-dessous découle directement de la définition du relèvement  $\tilde{f}_{I,z'}$  et du fait que  $\text{Enlace}_I(z, z') = \text{Enlace}_{I'}(z, z')$  si  $I$  et  $I'$  sont homotopes.

**Fait 3.2.** *Si  $z$  et  $z'$  sont deux points fixes distincts de  $f$ , il existe un unique entier  $p$  tel que  $\tilde{f}_{I,z'}(\tilde{z}) = T_{z'}^p(\tilde{z})$  pour tout relevé  $\tilde{z}$  de  $z$  dans  $\tilde{A}_{z'}$ . Cet entier  $p$  n'est autre que le nombre de rotation  $\rho_{I,z'}(z) = \text{Enlace}_I(z, z')$ .*

Considérons maintenant trois points fixes distincts  $z, z'_1, z'_2$  de  $f$ . D'après la formule (1), la quantité  $\rho_{I,z'_1}(z) - \rho_{I,z'_2}(z) = \text{Enlace}_I(z, z'_1) - \text{Enlace}_I(z, z'_2)$  ne dépend pas de l'isotopie  $I$ .

Rappelons que  $\mathbb{S}^2$  est vu comme le compactifié  $\mathbb{R}^2 \sqcup \{\infty\}$ . Étant donnés deux points distincts  $z'_1, z'_2 \in \text{Fix}(f)$ , nous considérerons l'anneau  $A_{z'_1, z'_2} := \mathbb{S}^2 \setminus \{z'_1, z'_2\}$ . Nous noterons  $\pi_{z'_1, z'_2} : \tilde{A}_{z'_1, z'_2} \rightarrow A_{z'_1, z'_2}$  le revêtement universel de l'anneau  $A_{z'_1, z'_2}$ , et  $T_{z'_1, z'_2} : \tilde{A}_{z'_1, z'_2} \rightarrow \tilde{A}_{z'_1, z'_2}$  l'automorphisme de revêtement naturellement défini par le bord orienté d'un petit disque euclidien centré en  $z'_1$ . Nous noterons  $\tilde{f}_{z'_1, z'_2}$  le relèvement de  $\bar{f}|_{A_{z'_1, z'_2}}$  qui fixe les relevés de  $\infty$ , où  $\bar{f}$  est l'extension de  $f$  à la sphère  $\mathbb{S}^2 = \mathbb{R}^2 \sqcup \{\infty\}$ . Si  $I' = (f'_t)_{t \in [0,1]}$  est une isotopie joignant l'identité à  $f$  et qui fixe les points  $z'_1$  et  $z'_2$ , alors l'extension de cette isotopie à  $\mathbb{S}^2$  nous donne une isotopie dans  $\text{Homeo}(\mathbb{S}^2)$  joignant l'identité à  $\bar{f}$ , qui fixe  $z'_1, z'_2$  et  $\infty$ . Si on restreint cette isotopie à  $A_{z'_1, z'_2}$ , puis qu'on relève au revêtement universel  $\tilde{A}_{z'_1, z'_2}$ , on obtient une isotopie joignant l'identité à  $\tilde{f}_{z'_1, z'_2}$ . Ceci montre le fait suivant :

**Fait 3.3.** *Si  $z, z'_1$  et  $z'_2$  sont trois points fixes distincts de  $f$ , alors il existe un entier  $p \in \mathbb{Z}$  tel que  $\tilde{f}_{z'_1, z'_2}(\tilde{z}) = T_{z'_1, z'_2}^p(\tilde{z})$  pour tout relevé  $\tilde{z}$  de  $z$  à  $\tilde{A}_{z'_1, z'_2}$  ; cet entier  $p$  n'est autre que la différence des nombres de rotations  $\rho_{I, z'_1}(z) - \rho_{I, z'_2}(z)$ .*

Avant de passer au cas où  $z$  n'est pas un point fixe, relierons le nombre de rotation  $\rho_{I,z'}(z)$  à la quantité  $\text{Tourne}_I(z)$ .

**Fait 3.4.** *Étant donné  $z' \in \text{Fix}(f)$ , il existe un voisinage  $W$  de l'infini tel que, pour tout  $z \in W \cap \text{Fix}(f)$ , le nombre de rotation  $\rho_{I,z'}(z)$  est égal à la quantité  $\text{Tourne}_I(z)$ .*

En particulier, si  $I$  est une isotopie adaptée, alors, pour tout  $z' \in \text{Fix}(f)$ , il existe un voisinage  $W$  de l'infini tel que, si  $z \in \text{Fix}(f) \cap W$ , alors  $\rho_{z'}(z) = 0$ .

*Preuve du fait 3.4.* Soit  $B$  une boule euclidienne de  $\mathbb{R}^2$  centrée à l'origine tel que le lacet  $\gamma_{I,z'} : t \mapsto f_t(z')$  soit contenu dans  $B$ . Soit  $W$  un voisinage de l'infini dans  $\mathbb{R}^2$  tel que, si  $z \in \text{Fix}(f) \cap W$ , alors le lacet  $\gamma_{I,z} : t \mapsto f_t(z)$  est disjoint de  $B$ . Alors, pour tout  $z \in \text{Fix}(f) \cap W$ , les lacets  $\gamma_{I,z,z'} : t \mapsto f_t(z) - f_t(z')$  et  $\gamma_{I,z} : t \mapsto f_t(z)$  sont homotopes dans  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , et on a donc

$$\rho_{I,z'}(z) = \text{Enlace}_I(z, z') = \int_{\gamma_{I,z,z'}} d\theta = \int_{\gamma_{I,z}} d\theta = \text{Tourne}_I(z). \quad \square$$

*Remarque 3.5.* Soit  $z'$  un point fixe de  $f$ . Les faits 3.2 et 3.4 montrent que l'isotopie  $I$  est adaptée si et seulement si il existe un voisinage  $W$  de l'infini tel que le relèvement  $\tilde{f}_{I,z'} : \tilde{A}_{z'} \rightarrow \tilde{A}_{z'}$  fixe les relevés des points de  $W \cap \text{Fix}(f)$ .

Passons maintenant au cas où  $z$  n'est pas un point fixe. Le fait suivant généralise le fait 3.2 et découle directement des définitions du nombre de rotation  $\rho_{I,z'}(z)$  et du relèvement  $\tilde{f}_{I,z'}$ .

**Fait 3.6.** *Soit  $z' \in \text{Fix}(f)$ , soit  $z \in \text{Rec}^+(f)$ , et  $\tilde{z}$  un relevé de  $z$  dans  $\tilde{A}_{z'}$ . Pour toute suite strictement croissante d'entiers  $(n_k)_{k \geq 0}$  telle que  $f^{n_k}(z)$  tend vers  $z$ , il existe une suite d'entiers  $(p_k)_{k \geq 0}$  telle que  $T_{z'}^{-p_k} \circ \tilde{f}_{I,z'}^{n_k}(\tilde{z})$  converge vers  $\tilde{z}$ . Dire que l'orbite du point  $z$  a un nombre de rotation  $\rho_{I,z'}(z)$  autour de  $z'$ , c'est dire que le quotient  $p_k/n_k$  tend vers  $\rho_{I,z'}(z)$  quand  $k \rightarrow \infty$ , quelle que soit la suite d'entiers  $(n_k)$ .*

Passons maintenant à la généralisation du fait 3.3.

**Fait 3.7.** Soient  $z'_1$  et  $z'_2$  deux points fixes distincts de  $f$ . Soit  $z \in \text{Rec}^+(f)$  tel que les nombres de rotation  $\rho_{I,z'_1}(z)$  et  $\rho_{I,z'_2}(z)$  existent tous les deux, et soit  $\tilde{z}$  un relevé de  $z$  dans  $\tilde{A}_{z'_1,z'_2}$ . Pour toute suite strictement croissante d'entiers  $(n_k)_{k \geq 0}$  telle que  $f^{n_k}(z)$  tend vers  $z$ , il existe une suite d'entiers  $(p_k)_{k \geq 0}$  telle que  $T_{z'_1,z'_2}^{-p_k} \circ \tilde{f}_{z'_1,z'_2}^{n_k}(\tilde{z})$  converge vers  $\tilde{z}$ . La suite  $(p_k/n_k)_{k \geq 0}$  converge vers  $\rho_{I,z'_1}(z) - \rho_{I,z'_2}(z)$ .

#### 4. DEUX OUTILS

Dans cette section, nous présentons deux résultats, concernant la dynamique des homéomorphismes de surfaces, qui seront des outils importants dans notre preuve de la proposition 2.1.

Commençons par rappeler un résultat, dû à J. Franks, qui constitue une des étapes principales de la preuve du théorème des translations planes de Brouwer. Notons

$$\begin{aligned} \pi : \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{A} \\ (x, y) &\mapsto (x + \mathbb{Z}, y) \end{aligned}$$

le revêtement universel de l'anneau ouvert  $\mathbb{A} = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ , et

$$\begin{aligned} T : \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x + 1, y) \end{aligned}$$

l'automorphisme fondamental de revêtement. Nous appellerons *disque ouvert*  $U$  d'une surface  $M$  toute partie ouverte de  $M$  homéomorphe à  $\mathbb{R}^2$ .

**Théorème 4.1** (Lemme de Franks, [7]). Soit  $g$  un homéomorphisme de  $\mathbb{A}$  isotope à l'identité et  $\tilde{g}$  un relèvement de  $g$  à  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $U$  un disque ouvert de  $\mathbb{A}$  et  $\tilde{U}$  une composante connexe de  $\pi^{-1}(U)$ . On suppose que

- (1)  $\tilde{g}(\tilde{U}) \cap \tilde{U} = \emptyset$ ,
- (2) il existe  $q > 0$  et  $p \geq 0$  tel que  $\tilde{g}^q(\tilde{U}) \cap T^p(\tilde{U}) \neq \emptyset$ ,
- (3) il existe  $q' > 0$  et  $p' \leq 0$  tel que  $\tilde{g}^{q'}(\tilde{U}) \cap T^{p'}(\tilde{U}) \neq \emptyset$ .

Alors  $\tilde{g}$  a au moins un point fixe.

Énonçons maintenant un résultat plus récent dû à O. Jaulent.

**Théorème 4.2** (Jaulent, [13]). Soit  $M$  une surface orientée,  $g$  un homéomorphisme de  $M$  isotope à l'identité, et  $I = (g_t)_{t \in [0,1]}$  une isotopie joignant l'identité à  $g$  dans  $\text{Homeo}(M)$ . Il existe alors une partie fermée  $X \subset \text{Fix}(g)$ , et une isotopie  $I' = (g'_t)_{t \in [0,1]}$  joignant l'identité à  $g|_{M \setminus X}$  dans  $\text{Homeo}(M \setminus X)$  tels que

- (1) Pour tout  $z \in X$ , le lacet  $\gamma_{I,z} : t \mapsto g_t(z)$  est homotope à zéro dans  $M$ .
- (2) Pour tout  $z \in \text{Fix}(g) \setminus X$ , le lacet  $\gamma_{I',z} : t \mapsto g'_t(z)$  n'est pas homotope à zéro dans  $M \setminus X$ .
- (3) Pour tout  $z \in M \setminus X$ , les trajectoires  $\gamma_{I,z}$  et  $\gamma_{I',z}$  sont homotopes (à extrémités fixées) dans  $M$ .
- (4) Il existe un feuilletage topologique orienté  $\mathcal{F}$  sur  $M \setminus X$  tel que, pour tout  $z \in M \setminus X$ , la trajectoire  $\gamma_{I',z}$  est homotope dans  $M \setminus X$  à un chemin positivement transverse à  $\mathcal{F}$ .

De plus, l'isotopie  $I' = (g'_t)_{t \in [0,1]}$  satisfait la propriété suivante :

- (5) Pour toute partie finie  $Y \subset X$ , il existe une isotopie  $I'_Y = (g'_{Y,t})_{t \in [0,1]}$  joignant l'identité à  $g$  parmi les homéomorphismes de  $M$  qui fixent les points de  $Y$ , et telle que, si  $z \in M \setminus X$ , les chemins  $t \mapsto g'_t(z)$  et  $t \mapsto g'_{Y,t}(z)$  sont homotopes dans  $M \setminus Y$ .

L'assertion (4) signifie que la trajectoire  $\gamma_{I',z} : t \mapsto g'_t(z)$  est homotope à un chemin  $\gamma_z : [0, 1] \rightarrow M \setminus X$  vérifiant la propriété suivante. Pour tout  $t_0 \in [0, 1]$ , il existe un voisinage  $\iota \subset [0, 1]$  de  $t_0$ , un voisinage  $U \subset M \setminus X$  de  $\gamma_z(t_0)$  et un homéomorphisme  $\Phi : U \rightarrow ]0, 1[^2$  transportant l'orientation de  $M$  sur l'orientation usuelle de  $\mathbb{R}^2$ , envoyant le feuilletage  $\mathcal{F}|_U$  sur le feuilletage en horizontales dirigées suivant les  $x$  croissants et tel que  $p_2 \circ \Phi \circ \gamma_z$  soit croissant sur  $\iota$ , où  $p_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est la deuxième projection.

Étant donné un homéomorphisme  $g$  d'une surface  $M$ , et une isotopie  $I$  joignant l'identité à  $g$ , un point fixe  $z \in \text{Fix}(g)$  est dit *contractile* pour l'isotopie  $I$  si le lacet  $\gamma_{I,z} : t \mapsto g_t(z)$  est contractile dans  $M$ . L'assertion (1) du théorème ci-dessus affirme donc que les points de  $X$  sont des points fixes contractiles pour l'isotopie  $I$ . L'assertion (2) dit que  $I'$  n'a aucun point fixe contractile. L'assertion (4) n'est autre que la version feuilletée équivariante du théorème des translations planes de Brouwer, due à P. Le Calvez ([15]), appliquée à l'isotopie  $I'$  sur  $M \setminus X$ . Très grossièrement, le théorème de Jaulent affirme donc que, quitte à ôter à  $M$  un ensemble de points fixes contractiles  $X$  pour  $I$ , et quitte à remplacer  $I$  par une isotopie  $I'$  tel que les chemins  $\gamma_{I,z}$  et  $\gamma_{I',z}$  sont homotopes dans  $M$ , il n'existe plus aucun point fixe contractile. On peut donc appliquer le théorème des translations planes feuilletée équivariant de Le Calvez.

On ne sait pas s'il est possible de prolonger l'isotopie  $I' = (g'_t)_{t \in [0,1]}$  donnée par le théorème 4.2 en une isotopie joignant l'identité à  $g$  dans  $\text{Homeo}(M)$  qui fixe les points de  $X$  (sauf dans certains cas particuliers, par exemple si  $X$  est totalement discontinu). À défaut, l'assertion (5) du théorème 4.2 garantit une propriété plus faible, mais suffisante pour la plupart des applications.

## 5. PREUVE DE LA PROPOSITION 2.1

Dans toute cette partie, nous considérons un homéomorphisme  $f$  du plan  $\mathbb{R}^2$  qui préserve l'orientation, qui vérifie les propriétés (P1) et (P2), et dont l'ensemble des points fixes n'est pas compact. Nous fixons également une isotopie  $I = (f_t)_{t \in [0,1]}$  adaptée à  $f$ . On aura donc  $\rho_{z'}(z) = \rho_{I,z'}(z)$  dès que ces quantités seront définies. Nous utiliserons les notations définies dans la partie 3. En particulier, nous rappelons que, pour tout point  $z' \in \mathbb{R}^2$ , nous notons  $A_{z'}$  l'anneau  $\mathbb{R}^2 \setminus \{z'\}$ , nous notons  $\pi_{z'} : \tilde{A}_{z'} \rightarrow A_{z'}$  le revêtement universel de cet anneau, et  $\tilde{f}_{I,z'}$  le relèvement de  $f|_{A_{z'}}$  à  $\tilde{A}_{z'}$  associé à l'isotopie  $I$ .

*Preuve de l'assertion (1).* Considérons un homéomorphisme  $g$  du plan qui commute avec  $f$ , un point  $z' \in \text{Fix}(f)$  et un point  $z \in \text{Rec}^+(f)$ , distinct de  $z'$ , tels que le nombre de rotation  $\rho_{z'}(z)$  existe. Supposons, pour fixer les idées, que  $g$  préserve l'orientation. Choisissons un relèvement  $\tilde{g} : \tilde{A}_{z'} \rightarrow \tilde{A}_{g(z')}$  de l'homéomorphisme  $g|_{A_{z'}} : A_{z'} \rightarrow A_{g(z')}$ .

Nous affirmons que les deux égalités suivantes ont lieu :

$$\tilde{g} \circ T_{z'} = T_{g(z')} \circ \tilde{g} \quad \tilde{g} \circ \tilde{f}_{I,z'} = \tilde{f}_{I,g(z')} \circ \tilde{g}. \quad (3)$$

L'égalité de gauche découle directement des définitions des automorphismes de revêtement  $T_{z'}$  et  $T_{g(z')}$ , et du fait que  $g$  préserve l'orientation. Pour montrer l'égalité de droite, rappelons que  $\tilde{f}_{I,z'}$  est le relèvement de  $f|_{A_{z'}}$  à  $\tilde{A}_{z'}$  qui fixe les relevés des points de  $\text{Fix}(f)$  suffisamment proches de l'infini (voir la remarque 3.5). Si  $z$  est un point de  $\text{Fix}(f)$  proche de l'infini, alors  $g^{-1}(z)$  est aussi un point de  $\text{Fix}(f)$  proche de l'infini. Par suite, si  $\tilde{z}$  est un relevé de  $z$  dans  $\tilde{A}_{g(z')}$ , alors  $\tilde{f}_{I,z'}$  fixe  $\tilde{g}^{-1}(\tilde{z})$ , et on a donc  $\tilde{g} \circ \tilde{f}_{I,z'} \circ \tilde{g}^{-1}(\tilde{z}) = \tilde{z}$ . Ceci montre que  $\tilde{g} \circ \tilde{f}_{I,z'} \circ \tilde{g}^{-1}$  est le relèvement de  $f|_{A_{g(z')}}$  à  $\tilde{A}_{g(z')}$  qui fixe les relevés des points de  $\text{Fix}(f)$  suffisamment proches de l'infini. D'après la remarque 3.5, ce relèvement coïncide donc avec  $\tilde{f}_{I,g(z')}$ . Ceci montre l'égalité de droite.

Considérons alors une suite d'entiers strictement croissante  $(n_k)_{k \geq 0}$ . Puisque  $g$  commute avec  $f$ , si la suite de points  $(f^{n_k}(g(z)))_{k \geq 0}$  converge vers  $g(z)$ , alors la suite de points  $(f^{n_k}(z))_{k \geq 0}$  converge vers  $z$ . Puisque  $\tilde{g}$  est un relèvement de  $g$ , si le point  $\tilde{g}(\tilde{z}) \in \tilde{A}_{g(z')}$  est un relevé du

point  $g(z) \in A_{g(z')}$ , alors le point  $\tilde{z} \in \tilde{A}_{z'}$  est un relevé du point  $z \in A_{z'}$ . Enfin, d'après les égalités (3), si  $(p_k)_{k \geq 0}$  est la suite d'entiers telle que  $T_{g(z')}^{-p_k} \circ \tilde{f}_{I,g(z')}^{n_k}(\tilde{g}(\tilde{z}))$  converge vers  $\tilde{g}(\tilde{z})$ , alors la suite  $T_{z'}^{-p_k} \circ \tilde{f}_{I,z'}^{n_k}(\tilde{z})$  converge vers  $\tilde{z}$ . D'après le fait 3.6, ceci montre que le nombre de rotation  $\rho_{g(z')}(g(z))$  est bien défini, et est égal à  $\rho_{z'}(z)$ .

Le cas où  $g$  renverse l'orientation se traite de même. Les seules différences sont que l'on a alors  $\tilde{g} \circ T_{z'} = T_{g(z')}^{-1} \circ \tilde{g}$  et que c'est donc la suite  $T_{z'}^{p_k} \circ \tilde{f}_{I,z'}^{n_k}(\tilde{z})$  qui converge vers  $\tilde{z}$ .  $\square$

*Preuve de l'assertion (2).* Ce résultat découle de la propriété (P1), du lemme de Franks 4.1, et du théorème ergodique de Birkhoff. Le point important de la preuve est le suivant : étant donné  $z' \in \text{Fix}(f)$ , le lemme de Franks permet de passer d'une propriété concernant les nombres de rotation des points fixes de  $f$  autour de  $z'$  (la fonction  $z \mapsto \text{Enlace}_I(z, z')$  est bornée sur  $\text{Fix}(f) \setminus \{z'\}$ ) à une propriété concernant les nombres de rotation de toutes les orbites autour de  $z'$  (la fonction  $z \mapsto \text{Enlace}_I(z, z')$  est intégrable sur  $\text{Rec}^+(f) \setminus \{z'\}$ ).

Fixons une mesure de probabilité  $\mu \in \mathcal{M}(f)$  et un point  $z' \in \text{Fix}(f)$ . Nous appellerons *disque libre* tout disque topologique ouvert disjoint de son image par  $f$ . La fonction  $\rho_{z'}$  est bien évidemment définie sur  $\text{Fix}(f) \setminus \{z'\}$  (voir le fait 3.1). Il reste à prouver qu'elle est définie  $\mu$ -presque sûrement sur  $\text{Rec}^+(f) \setminus \text{Fix}(f)$ . Comme  $\mathbb{R}^2 \setminus \text{Fix}(f)$  est recouvert par les disques libres, il suffit de prouver que, si  $U$  est un disque libre, alors  $\rho_{z'}$  est définie  $\mu$ -presque partout sur  $\text{Rec}^+(f) \cap U$ .

Fixons donc un disque libre  $U$ . Puisque  $U$  est ouvert, on peut considérer le temps de premier retour  $\tau_U(z)$  dans  $U$  de tout point  $z \in \text{Rec}^+(f) \cap U$  et définir une application de premier retour

$$F_U : \text{Rec}^+(f) \cap U \rightarrow \text{Rec}^+(f) \cap U \\ z \mapsto f^{\tau_U(z)}(z).$$

Pour tout  $z \in \text{Rec}^+(f) \cap U$ , on peut alors définir la quantité

$$\alpha_{U,z'}(z) = \sum_{0 \leq \ell < \tau_U(z)} \text{Enlace}_I(f^\ell(z), z') + \int_{\gamma_{U,z,z'}} d\theta,$$

où on choisit un chemin  $\gamma_{U,z}$  dans  $U$  qui joint  $F_U(z)$  à  $z$  et où on pose  $\gamma_{U,z,z'}(t) = \gamma_{U,z}(t) - z'$ . Puisque  $U$  est simplement connexe, la quantité précédente ne dépend pas du choix de l'arc  $\gamma_{U,z}$ .

*Remarque 5.1.* Pour tout couple de points distincts  $w, w'$ , notons comme dans l'introduction  $\gamma_{I,w,w'} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  le chemin défini par  $\gamma_{I,w,w'}(t) := f_t(w) - f_t(w')$ . En mettant bout à bout les définitions des quantités  $\alpha_{U,z'}(z)$  et  $\text{Enlace}_I(w, z')$ , on voit alors que  $\alpha_{U,z'}(z)$  est égal à l'intégrale de la 1-forme d'angle polaire  $d\theta$  le long du lacet

$$\Gamma_{I,U,z,z'} := \gamma_{I,z,z'} \cdot \gamma_{I,f(z),z'} \cdot \cdots \cdot \gamma_{I,f^{\tau_U(z)-1}(z),z'} \cdot \gamma_{U,z,z'}.$$

Ceci montre en particulier que  $\alpha_{U,z'}(z)$  est un entier. On peut également interpréter la quantité  $\alpha_{U,z'}(z)$  de la façon suivante. Fixons une composante connexe  $\tilde{U}$  de  $\pi_{z'}^{-1}(U)$ . Il s'agit d'un disque topologique ouvert. Tout point  $z \in U$  a un unique relevé  $\tilde{z} \in \tilde{U}$ . Si  $z$  appartient à  $\text{Rec}^+(f) \cap U$ , alors  $\alpha_{U,z'}(z)$  est l'entier  $p$  tel que  $(\tilde{f}_{I,z'})^{\tau_U(z)}(\tilde{z}) \in T_{z'}^p(\tilde{U})$ .

Puisque  $f$  vérifie la propriété (P1), il existe un entier  $M$  tel que  $|\text{Enlace}_I(z, z')| \leq M$  pour tout  $(z, z') \in (\text{Fix}(f) \times \text{Fix}(f)) \setminus \Delta$ . On a alors le lemme suivant :

**Lemme 5.2.** *L'image de la fonction  $\alpha_{U,z'}/\tau_U$ , définie sur  $\text{Rec}^+(f) \cap U$ , est contenue dans un intervalle de longueur  $2M + 4$ .*

*Preuve du lemme.* Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe  $z^-$  et  $z^+$  dans  $\text{Rec}^+(f) \cap U$ , tels que

$$\frac{\alpha_{U,z'}(z^+)}{\tau_U(z^+)} - \frac{\alpha_{U,z'}(z^-)}{\tau_U(z^-)} > 2M + 4.$$

Il existe alors au moins  $2M + 2$  entiers  $k$  vérifiant

$$\frac{\alpha_{U,z'}(z^-)}{\tau_U(z^-)} \leq k \leq \frac{\alpha_{U,z'}(z^+)}{\tau_U(z^+)}. \quad (4)$$

Soit  $\tilde{U}$  une composante connexe de  $\pi_z^{-1}(U)$ . Notons  $\tilde{z}^-$  et  $\tilde{z}^+$  les relèvements de  $z^-$  et  $z^+$  situés dans  $\tilde{U}$ . Par ailleurs définition des fonctions  $\tau_U(z^+)$  et  $\alpha_{U,z'}$ , on a alors

$$\left(\tilde{f}_{I,z'}\right)^{\tau_U(z^-)}(\tilde{z}^-) \in T_{z'}^{\alpha_{U,z'}(z^-)}(\tilde{U}) \quad \text{et} \quad \left(\tilde{f}_{I,z'}\right)^{\tau_U(z^+)}(\tilde{z}^+) \in T_{z'}^{\alpha_{U,z'}(z^+)}(\tilde{U}).$$

En particulier

$$\left(\tilde{f}_{I,z'}\right)^{\tau_U(z^-)}(\tilde{U}) \cap T_{z'}^{\alpha_{U,z'}(z^-)}(\tilde{U}) \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \left(\tilde{f}_{I,z'}\right)^{\tau_U(z^+)}(\tilde{U}) \cap T_{z'}^{\alpha_{U,z'}(z^+)}(\tilde{U}) \neq \emptyset.$$

Si  $k$  vérifie la double inégalité (4), on peut appliquer le lemme de Franks au relèvement  $\tilde{f}_{I,z'} \circ T_{z'}^{-k}$  de  $f|_{A_{z'}}$  et montrer l'existence d'un point fixe de  $\tilde{f}_{I,z'} \circ T_{z'}^{-k}$ , c'est-à-dire l'existence d'un point fixe  $z \in \text{Fix}(f) \setminus \{z'\}$  tel que  $\text{Enlace}_I(z, z') = k$ . Or par hypothèse, il y a au moins  $2M + 2$  valeurs de  $k$  qui vérifient la double inégalité (4). Ceci est en contradiction avec l'inégalité  $|\text{Enlace}_I(z, z')| \leq M$ .  $\square$

D'après le lemme de Kac, la fonction temps de premier retour  $\tau_U$  est intégrable sur  $U$ . On vient de prouver que la fonction  $\alpha_{U,z'}/\tau_U$  est bornée sur  $U$ . On en déduit que  $\alpha_{U,z'}$  est également intégrable sur  $U$ . Le théorème ergodique de Birkhoff nous dit que les moyennes de Birkhoff

$$\frac{1}{m} \sum_{\ell=0}^{m-1} \tau_U(F_U^\ell(z)) \quad \text{et} \quad \frac{1}{m} \sum_{\ell=0}^{m-1} \alpha_{U,z'}(F_U^\ell(z))$$

convergent pour  $\mu$ -presque tout point  $z$  de  $U$ . Nous noterons  $\tau_U^*(z)$  et  $\alpha_{U,z'}^*(z)$  les limites de ces sommes de Birkhoff lorsqu'elles existent.

Pour terminer la preuve, considérons un point  $z \in \text{Rec}^+(f) \cap U$ . Si  $(n_k)_{k \geq 0}$  est une suite d'entiers telle que  $f^{n_k}(z)$  tend vers  $z$ , alors, pour tout  $k$  assez grand, le point  $f^{n_k}(z)$  est dans le disque  $U$ , et il existe donc un entier  $m_k$  tel que

$$n_k = \sum_{\ell=0}^{m_k-1} \tau_U(F_U^\ell(z)) \quad \text{et} \quad \sum_{r=0}^{n_k-1} \text{Enlace}(f^r(z), z') = \sum_{\ell=0}^{m_k-1} \alpha_{U,z'}(F_U^\ell(z)).$$

Ceci montre que le nombre de rotation  $\rho_{z'}(z)$  est bien défini dès que les limites  $\tau_U^*(z)$  et  $\alpha_{U,z'}^*(z)$  existent, et qu'on a alors  $\rho_{z'}(z) = \tau_U^*(z)/\alpha_{U,z'}^*(z)$ . Nous avons ainsi montré que le nombre de rotation  $\rho_{z'}(z)$  est bien défini pour  $\mu$ -presque tout  $z$  dans  $U$ . Comme expliqué plus haut, ceci suffit à prouver que  $\rho_{z'}(z)$  est bien défini pour  $\mu$ -presque tout  $z$  dans  $\mathbb{R}^2$  : l'assertion (2) de la proposition 2.1 est démontrée.  $\square$

*Remarque 5.3.* Les arguments ci-dessus montrent que, pour tout point  $z' \in \text{Fix}(f)$ , la fonction  $z \mapsto \rho_{z'}(z)$  est bornée sur  $\text{Fix}(f) \setminus \{z'\}$  et localement bornée sur  $\text{Rec}^+(f) \setminus \text{Fix}(f)$ . Dans l'appendice, nous construirons un exemple d'homéomorphisme pour lequel la fonction  $z \mapsto \rho_{z'}(z)$  n'est pas globalement bornée sur  $\text{Rec}^+(f)$ .

*Preuve de l'assertion (3).* On garde les mêmes notations que dans la preuve de l'assertion (2). En particulier, si  $U$  est un disque libre, et  $z'$  un point fixe de  $f$ , on utilisera les fonctions  $\tau_U$ ,  $F_U$  et  $\alpha_{U,z'}$  définies ci-dessus. On utilisera également la fonction

$$\widehat{\alpha}_{U,R} := \sup_{z' \in \text{Fix}(f), \|z'\| \geq R} |\alpha_{U,z'}|$$

définie pour tout  $R > 0$ . Le cœur de la preuve de l'assertion (3) consiste à montrer que, pour tout disque libre  $U$  et toute mesure  $\nu \in \mathcal{M}(f)$ , on a

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_U \widehat{\alpha}_{U,R}(z) d\nu(z) = 0.$$

Nous en déduisons facilement l'assertion (3), en utilisant le théorème ergodique de Birkhoff et un petit raisonnement par l'absurde. La limite ci-dessus sera obtenue grâce au théorème de convergence dominée : la propriété (P2) nous permettra de montrer que  $\widehat{\alpha}_{U,R}(z)$  tend vers 0, à  $z$  fixé, quand  $R$  tend vers l'infini ; ce fait et le lemme 5.2 nous fourniront une domination de la fonction  $z \mapsto \widehat{\alpha}_{U,R}(z)$  par une fonction intégrable.

**Lemme 5.4.** *Pour toute mesure  $\nu \in \mathcal{M}(f)$ , et tout disque libre  $U$ , on a*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_U \widehat{\alpha}_{U,R}(z) d\nu(z) = 0.$$

*Preuve du lemme.* On se donne un disque libre  $U$ , et une mesure  $\nu \in \mathcal{M}(f)$ .

Commençons par montrer que, pour tout  $z \in \text{Rec}^+(f) \cap U$  fixé, la fonction  $z' \mapsto \alpha_{U,z'}(z)$  est localement constante sur  $\text{Fix}(f)$ . Fixons un point  $z \in \text{Rec}^+(f) \cap U$ , un chemin  $\gamma_{U,z}$  joignant  $F_U(z)$  à  $z$  dans  $U$ , et un point  $z' \in \text{Fix}(f)$ . Si  $z'' \in \text{Fix}(f)$  est assez proche de  $z'$ , alors on a

$$\left| \sum_{0 \leq l < \tau_U(z)} \text{Enlace}_I(f^l(z), z') - \sum_{0 \leq l < \tau_U(z)} \text{Enlace}_I(f^l(z), z'') \right| < \frac{1}{2}$$

et

$$\left| \int_{\gamma_{U,z,z'}} d\theta - \int_{\gamma_{U,z,z''}} d\theta \right| < \frac{1}{2}.$$

Ces deux inégalités impliquent  $|\alpha_{U,z'}(z) - \alpha_{U,z''}(z)| < 1$ , et donc  $\alpha_{U,z'}(z) = \alpha_{U,z''}(z)$  puisque  $\alpha_{U,z'}(z)$  et  $\alpha_{U,z''}(z)$  sont des entiers. Nous avons donc bien prouvé que la fonction  $z' \mapsto \alpha_{U,z'}(z)$  est localement constante.

Montrons maintenant que, pour tout  $z \in \text{Rec}^+(f) \cap U$  fixé, la fonction  $z' \mapsto \alpha_{U,z'}(z)$  s'annule au voisinage de l'infini (*i.e.* s'annule sur  $\text{Fix}(f) \cap W$ , où  $W$  est un voisinage de l'infini). Rappelons que, pour tout point  $w \in \mathbb{R}^2$ , nous notons  $\gamma_{I,w} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  le chemin défini par  $\gamma_{I,w}(t) = f_t(w)$ , et pour tout couple de points distincts  $w, w' \in \mathbb{R}^2$ , nous notons  $\gamma_{I,w,w'} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  le chemin défini par  $\gamma_{I,w,w'}(t) = f_t(w) - f_t(w')$ . Fixons un point  $z \in \text{Rec}^+(f) \cap U$ , ainsi qu'un chemin  $\gamma_{U,z} : [0, 1] \rightarrow U$  joignant  $F_U(z)$  à  $z$  dans  $U$ . Pour tout  $z' \in \mathbb{R}^2$ , notons  $\gamma_{U,z,z'} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  le chemin défini par  $\gamma_{U,z,z'}(t) := \gamma_{U,z}(t) - z'$ . Pour tout  $z' \in \text{Fix}(f)$ , l'entier  $\alpha_{U,z'}(z)$  est l'intégrale de la 1-forme d'angle polaire  $d\theta$  le long du lacet

$$\Gamma_{I,U,z,z'} = \gamma_{I,z,z'} \cdot \gamma_{I,f(z),z'} \cdot \cdots \cdot \gamma_{I,f^{\tau_U(z)-1}(z),z'} \cdot \gamma_{U,z,z'}$$

(voir la remarque 5.1). Si  $z' \in \text{Fix}(f)$  est suffisamment proche de l'infini, le lacet  $\Gamma_{I,U,z,z'}$  est librement homotope dans  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  au lacet  $(\gamma_{I,z'})^{\tau_U(z)}$ . Pour le démontrer, il suffit par exemple, de considérer une boule euclidienne  $B \subset \mathbb{R}^2$  centrée à l'origine, telle que le lacet  $\Gamma_{I,U,z,z'}$  est contenu dans  $B$ , et de prendre  $z' \in \text{Fix}(f)$  suffisamment proche de l'infini pour que le lacet  $\gamma_{I,z'}$  soit contenu dans le complémentaire de  $B$ . Ainsi pour  $z' \in \text{Fix}(f)$  suffisamment proche de l'infini, l'entier  $\alpha_{U,z'}(z)$  est alors égal à l'intégrale de  $d\theta$  le long de  $(\gamma_{I,z'})^{\tau_U(z)}$ . Mais cette dernière

intégrale est par définition égale à  $\tau_U(z) \cdot \text{Tourne}_I(z')$ . Et l'entier  $\text{Tourne}_I(z')$  est nul pour tout  $z' \in \text{Fix}(f)$  suffisamment proche de l'infini, puisque  $f$  vérifie (P2) et  $I$  est adaptée. Ceci prouve que, pour tout  $z \in \text{Rec}^+(f) \cap U$  fixé, la fonction  $z' \mapsto \alpha_{U,z'}(z)$  s'annule au voisinage de l'infini. Autrement dit, pour tout  $z \in \text{Rec}^+(f) \cap U$  fixé, la quantité  $\widehat{\alpha}_{U,R}(z) = \sup_{z' \in \text{Fix}(f), \|z'\| \geq R} |\alpha_{U,z'}(z)|$  est nulle pour  $R$  suffisamment grand.

Fixons  $z_0 \in \text{Rec}^+(f) \cap U$ . Nous avons montré ci-dessus que la fonction  $z' \mapsto \alpha_{U,z'}(z_0)$  est localement constante sur  $\text{Fix}(f)$  et nulle en dehors d'un compact ; cette fonction est donc bornée. Soit  $M_0$  tel que pour tout  $z' \in \text{Fix}(f)$ , on a

$$\frac{|\alpha_{U,z'}(z_0)|}{\tau_U(z_0)} \leq M_0.$$

D'après le lemme 5.2, on en déduit que pour tout  $z \in \text{Rec}^+(f) \cap U$  et tout  $z' \in \text{Fix}(f)$ , on a

$$\frac{|\alpha_{U,z'}(z)|}{\tau_U(z)} \leq M_0 + 2M + 4.$$

Par conséquent, pour tout  $z' \in \text{Fix}(f)$ , la fonction  $z \mapsto |\alpha_{U,z'}(z)|$  est dominée par la fonction intégrable  $z \mapsto (M_0 + 2M + 4)\tau_U(z)$ . Il en suit immédiatement que, pour tout  $R > 0$ , la fonction  $z \mapsto \widehat{\alpha}_{U,R}(z)$  est dominée par la fonction intégrable  $z \mapsto (M_0 + 2M + 4)\tau_U(z)$ .

Nous avons montré d'une part que, pour tout  $z \in \text{Rec}^+(f) \cap U$ , la quantité  $\widehat{\alpha}_{U,R}(z)$  est nulle pour  $R$  suffisamment grand, et d'autre part que, pour tout  $R > 0$ , la fonction positive  $z \mapsto \widehat{\alpha}_{U,R}(z)$  est dominée par une fonction intégrable indépendante de  $R$ . Nous pouvons donc appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue et obtenir la limite annoncée.  $\square$

**Lemme 5.5.** *Pour toute mesure  $\nu \in \mathcal{M}(f)$ , tout disque libre  $U$ , et tout point  $z' \in \text{Fix}(f)$ , on a*

$$\int_{\bigcup_{k \geq 0} f^k(U)} \rho_{z'}(z) d\nu(z) = \int_U \alpha_{U,z'}(z) d\nu(z).$$

*Preuve du lemme.* On a

$$\int_{\bigcup_{k \geq 0} f^k(U)} \rho_{z'} d\nu = \int_U \tau_U \rho_{z'} d\nu = \int_U \tau_U^* \rho_{z'} d\nu = \int_U \alpha_{U,z'}^* d\nu = \int_U \alpha_{U,z'} d\nu$$

où  $\tau_U^*$  et  $\alpha_{U,z'}^*$  sont les limites des moyennes de Birkhoff des fonctions  $\tau_U$  et  $\alpha_{U,z'}$  (on rappelle que ces limites existent pour  $\nu$  presque partout sur  $U$  ; voir la preuve de l'assertion (2)). La première égalité ci-dessus découle de l'invariance de la mesure  $\nu$  et de la fonction  $\rho_{z'}$  sous l'action de  $f$ . La deuxième et la dernière découlent du théorème ergodique de Birkhoff. Enfin, la troisième est une conséquence de l'égalité  $\rho_{z'}(z) = \alpha_{U,z'}^*(z)/\tau_U^*(z)$ , que nous avons montrée à la fin de la preuve de l'assertion (2).  $\square$

**Lemme 5.6.** *Soit  $(z'_n)$  est une suite de points dans  $\text{Fix}(f)$ . Supposons que  $\|z'_n\| \geq R$  pour tout  $n \geq n_0$ . Alors, pour toute mesure  $\nu \in \mathcal{M}(f)$ , tout disque libre  $U$ , on a*

$$\int_{\bigcup_{k \geq 0} f^k(U)} \sup_{n \geq n_0} |\rho_{z'_n}(z)| d\nu(z) \leq \int_U \widehat{\alpha}_{U,R}(z) d\nu(z).$$

*Preuve du lemme.* La preuve est similaire à celle du lemme précédent. On a

$$\begin{aligned} \int_{\bigcup_{k \geq 0} f^k(U)} \sup_{n \geq n_0} |\rho_{z'_n}| d\nu &\stackrel{(a)}{=} \int_U \tau_U \sup_{n \geq n_0} |\rho_{z'_n}| d\nu \stackrel{(b)}{=} \int_U \tau_U^* \sup_{n \geq n_0} |\rho_{z'_n}| d\nu \stackrel{(c)}{=} \int_U \sup_{n \geq n_0} |\alpha_{U,z'_n}^*| d\nu \\ &\stackrel{(d)}{\leq} \int_U \left( \sup_{n \geq n_0} |\alpha_{U,z'_n}| \right)^* d\nu \stackrel{(e)}{\leq} \int_U \widehat{\alpha}_{U,R}^* d\nu \stackrel{(f)}{=} \int_U \widehat{\alpha}_{U,R} d\nu \end{aligned}$$

où  $\phi^*$  désigne la limite des moyennes de Birkhoff d'une fonction intégrable  $\phi$ . L'égalité (a) ci-dessus découle de l'invariance de la mesure  $\nu$  et de la fonction  $\rho_{z'}$  sous l'action de  $f$ . Les

égalités (b) et (f) découlent du théorème ergodique de Birkhoff. L'égalité (c) est une conséquence de l'égalité  $\rho_{z'}(z) = \alpha_{U,z'}^*(z)/\tau_U^*(z)$ . L'inégalité (d) exprime le fait qu'une moyenne de Birkhoff du supremum d'une famille de fonction est supérieure au supremum des moyennes de Birkhoff de ces fonctions. Enfin, l'inégalité (e) découle de la définition de la fonction  $\hat{\alpha}_{U,R}$ .  $\square$

Pour terminer la preuve de l'assertion (3) de la proposition 2.1, nous raisonnons maintenant par l'absurde. Supposons que l'assertion (3) est fautive. Il existe alors deux constantes  $a > 0$  et  $b > 0$ , ainsi qu'une suite de points  $(z'_n)_{n \geq 0}$  dans  $\text{Fix}(f)$  qui tend vers l'infini telles que, si on note

$$A_n = \{z \in \text{Rec}^+(f), |\rho_{z'_n}(z)| \geq a\},$$

alors  $\mu(A_n) \geq b$  pour tout  $n$ . L'ensemble  $A = \bigcap_{n_0 \geq 0} (\bigcup_{n \geq n_0} A_n)$  est alors invariant par  $f$ , et vérifie  $\mu(A) \geq b$ . De plus, pour tout  $z \in A$  et tout  $n_0 \geq 0$ , on a  $\sup_{n \geq n_0} |\rho_{z'_n}(z)| \geq a$ . Posons  $\nu = \mu|_A$ . Puisque  $I$  est adaptée, pour tout point fixe  $z$ , on a  $\text{Enlace}_I(z, z'_n) = 0$ , si  $n$  est assez grand. Ainsi  $A$  ne contient aucun point fixe. Il existe donc un disque libre  $U$  tel que  $\nu(U) > 0$  et

$$\int_{\bigcup_{k \geq 0} f^k(U)} \sup_{n \geq n_0} |\rho_{z'_n}| d\nu \geq a\nu \left( \bigcup_{k \geq 0} f^k(U) \right) \geq a\nu(U)$$

pour tout  $n_0$ . Cette inégalité, le lemme 5.6, et le fait que la suite  $(z'_n)$  tend vers l'infini, montrent que, pour tout  $R \geq 0$ , on a

$$\int_U \hat{\alpha}_{U,R} d\nu \geq a\nu(U).$$

Ceci contredit le lemme 5.4. Cette contradiction achève la preuve de l'assertion (3).  $\square$

*Preuve de l'assertion (4).* Le point clé de la preuve est le lemme suivant.

**Lemme 5.7.** *Notons  $\mathbb{S}^2$  la sphère unité de  $\mathbb{R}^3$ , et considérons un  $C^1$ -difféomorphisme  $g$  de  $\mathbb{S}^2$ , qui fixe un point noté  $\infty$ . Pour tout point  $z \in \mathbb{S}^2$ , distinct de  $\infty$  et de son point antipodal, notons  $\gamma_z$  l'unique grand cercle qui passe par  $\infty$  et  $z$ , et notons  $\gamma_z^-$  (respectivement  $\gamma_z^+$ ) le petit (respectivement grand) arc de  $\gamma_z$  joignant  $\infty$  à  $z$ . Alors, il existe un voisinage pointé  $W$  de  $\infty$  dans  $\mathbb{S}^2$ , tel que pour tout point fixe  $z \in W$  on a  $g(\gamma_z^-) \cap \gamma_z^+ = \{z, \infty\}$ .*

*Preuve du lemme.* Raisonnons par l'absurde. Dire que la conclusion n'est pas vérifiée signifie qu'il existe une suite de points fixes  $(z_n)_{n \geq 0}$  tous distincts de  $\infty$  qui converge vers  $\infty$  et une suite de points  $(z'_n)_{n \geq 0}$  tels que  $z'_n \in \gamma_{z_n}^- \setminus \{z_n, \infty\}$  et  $g(z'_n) \in \gamma_{z_n}^+$ .

Notons  $Dg(z)$  la différentielle de  $g$  en un point  $z \in \mathbb{S}^2$ . Notons  $v_n \in T_\infty \mathbb{S}^2$  le vecteur unitaire tangent à l'arc  $\gamma_{z_n}^-$  au point  $\infty$  qui pointe vers  $z_n$ . Quitte à extraire une sous-suite, on peut toujours supposer que la suite  $(v_n)_{n \geq 0}$  est convergente ; on note  $v$  sa limite. L'application  $g$  est différentiable au point  $\infty$ , et la quantité  $\|Dg(\infty).v_n - v_n\|$  doit tendre vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini, puisque les deux extrémités  $\infty$  et  $z_n$  de l'arc  $\gamma_{z_n}^-$  sont des points fixes de  $g$ , et puisque la longueur de l'arc  $\gamma_{z_n}^-$  tend vers 0. Par suite, le vecteur  $v$  est dans l'espace propre associé à la valeur propre 1 de la différentielle de  $g$  au point  $\infty$ .

Notons maintenant  $u_n \in T_{z_n} \mathbb{S}^2$  le vecteur unitaire tangent à l'arc  $\gamma_{z_n}^-$  au point  $z_n$  qui pointe vers  $z'_n$ . On remarque que la suite  $(z_n, u_n)$  converge vers  $(\infty, -v)$  dans  $T\mathbb{S}^2$ . On distingue alors deux cas :

*Premier cas.* Quitte à extraire une sous-suite, la longueur du sous-arc de  $\gamma_{z_n}^+$  joignant  $\infty$  à  $g(z'_n)$  tend vers 0.

*Second cas.* Quitte à extraire une sous-suite, la longueur du sous-arc de  $\gamma_{z_n}^+$  joignant  $z_n$  à  $g(z'_n)$  tend vers 0.

Soit  $D$  un disque dans  $\mathbb{S}^2$  centré en  $\infty$ . Dans le premier cas, comme les points  $z'_n$  et  $g(z'_n)$  sont situés de part et d'autre du point  $\infty$  sur  $\gamma_{z_n} \cap D$ , on voit que l'angle entre  $v_n$  et  $Dg(\infty).v_n$  doit tendre vers  $\pi$  quand  $n \rightarrow \infty$ . Par conséquent, le vecteur  $-v$  doit être dans l'espace propre associé à une valeur propre négative ou nulle de la différentielle de  $g$  au point  $\infty$ . Dans le second cas, comme les points  $z'_n$  et  $g(z'_n)$  sont situés de part et d'autre du point  $z_n$  sur  $\gamma_{z_n} \cap D$ , on voit que l'angle entre  $u_n$  et  $Dg(z_n).u_n$  doit tendre vers  $\pi$  quand  $n$  tend vers l'infini. Comme la différentielle de  $g$  est continue, ceci implique à nouveau que le vecteur  $v$  doit être dans l'espace propre associé à une valeur propre négative ou nulle de la différentielle de  $g$  au point  $\infty$ .

Nous avons ainsi montré que le vecteur  $v$  est à la fois dans l'espace propre associé à la valeur propre 1 et dans un espace propre associé à une valeur propre négative ou nulle de la différentielle de  $g$  au point  $\infty$ , ce qui constitue la contradiction recherchée.  $\square$

Supposons donc que  $f$  s'étend en un  $C^1$ -difféomorphisme  $\bar{f}$  de  $\mathbb{S}^2 \simeq \mathbb{R}^2 \sqcup \{\infty\}$ . Fixons  $q \geq 1$ , et appliquons le lemme 5.7 au difféomorphisme  $\bar{f}^q$ . Si  $z'$  est un point fixe de  $\bar{f}^q$  suffisamment proche de  $\infty$ , le lemme nous fournit deux arcs  $\gamma^-$  et  $\gamma^+$  dans l'anneau  $A_{z'} = \mathbb{S}^2 \setminus \{\infty, z'\}$ , joignant un bout à l'autre de l'anneau, disjoints, et tels que  $\bar{f}^q(\gamma^-) \cap \gamma^+ = \emptyset$ . Rappelons que  $\pi_{z'} : \tilde{A}_{z'} \rightarrow A_{z'}$  désigne le revêtement universel de l'anneau  $A_{z'}$ , que  $\tilde{f}_{I,z'}$  désigne le relevé de  $f|_{A_{z'}}$  à  $\tilde{A}_{z'}$  tel que  $I$  se relève en une isotopie de l'identité à  $\tilde{f}_{I,z'}$ , et que  $T_{z'}$  désigne le générateur du groupe des automorphismes du revêtement  $\pi_{z'} : \tilde{A}_{z'} \rightarrow A_{z'}$  naturellement défini par l'orientation du bord d'un disque centré en  $z'$ . Choisissons un relevé  $\tilde{\gamma}^-$  de l'arc  $\gamma^-$  dans  $\tilde{A}_{z'}$  (autrement dit,  $\tilde{\gamma}^-$  est une composante connexe de  $\pi_{z'}^{-1}(\gamma^-)$ ). Alors l'arc  $\tilde{f}_{I,z'}^q(\tilde{\gamma}^-)$  ne rencontre aucune composante connexe de  $\pi_{z'}^{-1}(\gamma^+)$ , et d'autre part, il rencontre au plus un translaté  $T_{z'}^k(\tilde{\gamma}^-)$  de  $\tilde{\gamma}^-$ . Puisque  $\tilde{f}_{I,z'}$  a des points fixes (les relevés des points fixes proches de l'infini), l'arc  $\tilde{f}_{I,z'}^q(\tilde{\gamma}^-)$  ne peut pas être à droite de l'arc  $T_{z'}(\tilde{\gamma}^-)$ . Il est donc situé à gauche de l'arc  $T_{z'}^2(\tilde{\gamma}^-)$ . De même il est situé à droite de l'arc  $T_{z'}^{-2}(\tilde{\gamma}^-)$ . Comme  $\tilde{f}_{I,z'}^q$  et  $T_{z'}$  commutent, ceci implique évidemment que l'arc  $\tilde{f}_{I,z'}^q(T_{z'}(\tilde{\gamma}^-))$  est à gauche de l'arc  $T_{z'}^3(\tilde{\gamma}^-)$  et à droite de l'arc  $T_{z'}^{-1}(\tilde{\gamma}^-)$ . Considérons maintenant un point  $z \in \text{Rec}^+(f) \setminus \{z'\}$  tel que le nombre de rotation  $\rho_{z'}(z)$  est bien défini. Il existe un (unique) relevé  $\tilde{z}$  de ce point dans  $\tilde{A}_{z'}$  qui est situé entre les arcs  $\tilde{\gamma}^-$  et  $T_{z'}(\tilde{\gamma}^-)$ . De ce qui précède, on déduit donc que le point  $\tilde{f}_{I,z'}^q(\tilde{z})$  est situé entre  $T_{z'}^{-2}(\tilde{\gamma}^-)$  et  $T_{z'}^3(\tilde{\gamma}^-)$ . Par récurrence, on en déduit que le point  $\tilde{f}_{I,z'}^{nq}(\tilde{z})$  est situé entre  $T_{z'}^{-2n}(\tilde{\gamma}^-)$  et  $T_{z'}^{3n}(\tilde{\gamma}^-)$  pour tout  $n \geq 0$ . En utilisant la caractérisation du nombre de rotation  $\rho_{z'}(z)$  via le relevé  $\tilde{f}_{I,z'}$  (fait 3.6), on en déduit que  $|\rho_{z'}(z)| \leq 3/q$ . Comme on peut choisir l'entier  $q$  aussi grand que l'on veut, ceci démontre l'assertion (4).  $\square$

*Preuve de l'assertion (5).* Soit  $\mu$  une mesure borélienne finie sur  $\mathbb{R}^2$ , invariante par  $f$ , dont le support n'est pas contenu dans l'ensemble des points fixes de  $f$ .

La preuve de l'assertion (5) repose sur le théorème 4.2. Ce théorème fournira un feuilletage singulier orienté  $\mathcal{F}$  sur  $\mathbb{S}^2$  tel que, pour tout  $z \in \mathbb{S}^2$  qui n'est pas une singularité de  $\mathcal{F}$ , le chemin  $\gamma_{I,z} : t \mapsto f_t(z)$  est homotope à un chemin positivement transverse à  $\mathcal{F}$ . De manière informelle, l'existence d'un tel feuilletage signifie que, pour toute singularité  $z'$  de  $\mathcal{F}$ , le chemin  $\gamma_{I,z}$  tourne autour de  $z'$ , et le sens de rotation ne dépend pas du point  $z$ . Ceci nous permettra de trouver un point  $z' \in \text{Fix}(f)$ , et un disque libre  $V$  tel que  $\mu(V) > 0$  et tel que  $\alpha_{V,z'}(z)$  est strictement positif pour tout point  $z \in (V \cap \text{Rec}^+(f)) \setminus X$ , ou strictement négatif pour tout  $z \in (V \cap \text{Rec}^-(f)) \setminus X$ . Nous concluons alors via le lemme 5.5.

Dans les faits, la démonstration sera assez technique, et cela pour deux raisons au moins. La première est que nous n'avons fait pratiquement aucune hypothèse sur la mesure  $\mu$ . La seule

chose que nous savons, c'est que le support de  $\mu$  n'est pas contenu dans l'ensemble des points fixes de  $\mathcal{F}$ . La preuve aurait été nettement simplifiée si nous avions supposé par exemple que  $\mu$  chargeait tous les ouverts de  $\mathbb{S}^2$ , ou que  $\mu$  était ergodique. La seconde est que le théorème 4.2, que nous appliquerons sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{z'\}$  pour un certain  $z' \in \text{Fix}(f)$ , va nous fournir une isotopie de l'identité à  $f$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus (\{z'\} \cup X)$  où  $X$  est un fermé de  $\text{Fix}(f) \setminus \{z'\}$  dont nous ne savons rien. Il se pourrait par exemple que  $X$  disconnecte  $\mathbb{R}^2 \setminus \{z'\}$ , ce qui nous causera quelques difficultés.

Avant de commencer la preuve de l'assertion (5) proprement dite, nous avons besoin de faire quelques rappels sur les feuilletages de la sphère  $\mathbb{S}^2$ . Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage singulier orienté de la sphère  $\mathbb{S}^2$ . Comme  $\mathcal{F}$  est orienté, on peut parler des ensembles  $\alpha$ -limite et  $\omega$ -limite d'une feuille  $\lambda$  ; nous noterons  $\alpha(\lambda)$  et  $\omega(\lambda)$  ces ensembles. Considérons une feuille  $\lambda$  de  $\mathcal{F}$  qui n'est pas fermée. Alors  $\omega(\lambda)$  est une partie de  $\mathbb{S}^2$  non-vide, fermée, connexe, disjointe de  $\lambda$ , et saturée par  $\mathcal{F}$  (ceci signifie que toute feuille de  $\mathcal{F}$  qui rencontre  $\omega(\lambda)$  est contenue dans  $\omega(\lambda)$ ). Nous noterons  $\widehat{\omega}(\lambda)$  le complémentaire de la composante connexe de  $\mathbb{S}^2 \setminus \omega(\lambda)$  qui contient  $\lambda$ . Les arguments de la preuve du théorème de Poincaré-Bendixon montrent qu'on a les propriétés suivantes :

**(F1)** L'ensemble  $\widehat{\omega}(\lambda)$  est une partie de  $\mathbb{S}^2$  compacte, connexe, pleine (c'est-à-dire de complémentaire connexe), saturée par  $\mathcal{F}$ , qui contient au moins une singularité de  $\mathcal{F}$ . La feuille  $\lambda$  s'accumule sur chaque point de la frontière de  $\widehat{\omega}(\lambda)$ .

**(F2)** Si  $\widehat{\omega}(\lambda)$  n'est pas réduit à une singularité de  $\mathcal{F}$ , alors on a l'alternative suivante : soit tout arc positivement transverse à  $\mathcal{F}$  issu d'un point de  $\widehat{\omega}(\lambda)$  est inclus dans  $\widehat{\omega}(\lambda)$ , soit tout arc positivement transverse à  $\mathcal{F}$  aboutissant à un point de  $\widehat{\omega}(\lambda)$  est inclus dans  $\widehat{\omega}(\lambda)$ .

Supposons maintenant que les singularités de  $\mathcal{F}$  sont des points fixes de  $f$  et que, pour tout point  $z \in \mathbb{S}^2 \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})$ , le chemin  $\gamma_{I,z} : t \mapsto f_t(z)$  soit homotope, à extrémités fixées, relativement aux singularités de  $\mathcal{F}$ , à un arc positivement transverse à  $\mathcal{F}$ . De la propriété (F2), on déduit :

**(F3)** L'ensemble  $\widehat{\omega}(\lambda)$  est positivement ou négativement invariant par  $f$ .

On définit l'ensemble  $\widehat{\alpha}(\lambda)$  de façon similaire à  $\widehat{\omega}(\lambda)$ , et les propriétés (F1), (F2), (F3) restent bien sûr valables si on y remplace  $\widehat{\omega}(\lambda)$  par  $\widehat{\alpha}(\lambda)$ .

Nous débutons maintenant la preuve de l'assertion (5). Le support de la mesure  $\mu$  n'est pas inclus dans l'ensemble des points fixes de  $f$ . Comme  $\mu$  presque tout point est positivement récurrent pour  $f$ , on peut donc trouver un point  $z_0 \in (\text{Supp}(\mu) \cap \text{Rec}^+(f)) \setminus \text{Fix}(f)$ . Considérons un point  $z' \in \text{Fix}(f)$ . Quitte à remplacer  $I$  par une autre isotopie adaptée, nous pouvons supposer que  $I$  fixe le point  $z'$ . Appliquons alors le théorème 4.2 à l'anneau  $M := A_{z'} = \mathbb{R}^2 \setminus \{z'\}$  et à l'isotopie  $I|_{A_{z'}}$ . Ce théorème nous fournit une partie fermée  $X$  de  $\text{Fix}(f) \setminus \{z'\}$ , une isotopie  $I' = (f'_t)_{t \in [0,1]}$  joignant l'identité à  $f|_{A_{z'} \setminus X}$  dans  $\text{Homeo}(A_{z'} \setminus X)$  et un feuilletage (non-singulier)  $\mathcal{F}$  sur  $A_{z'} \setminus X$ . On posera alors  $\widehat{X} = X \cup \{z', \infty\}$ , et on verra  $\mathcal{F}$  comme un feuilletage singulier sur  $\mathbb{S}^2 = A_{z'} \sqcup \{z', \infty\}$ , ayant  $\widehat{X}$  comme ensemble de singularités. Remarquons que  $\infty$  n'est pas un point isolé de  $\widehat{X}$ . En effet, dans le cas contraire, la trajectoire  $\gamma_{I',z}$  d'un point fixe proche de l'infini serait homotope à zéro dans  $A_{z'} \setminus X$ .

Le point  $z_0$  n'appartient pas à  $\widehat{X}$ , puisqu'il n'est pas dans  $\text{Fix}(f)$ . Comme  $z_0$  est positivement récurrent pour  $f$ , il appartient à un lacet<sup>2</sup> qui est positivement transverse à  $\mathcal{F}$ . On en déduit d'une part que la feuille  $\lambda_0$  de  $\mathcal{F}$  qui contient  $z_0$  n'est pas fermée mais également que  $\widehat{\alpha}(\lambda_0)$  et  $\widehat{\omega}(\lambda_0)$  sont disjoints. Notons  $A = \mathbb{S}^2 \setminus (\widehat{\alpha}(\lambda_0) \sqcup \widehat{\omega}(\lambda_0))$ . La propriété (F1) montre que  $A$  est un anneau ouvert, et  $\lambda_0$  va d'un bout à l'autre de cet anneau. Puisque  $\widehat{\alpha}(\lambda_0)$  et  $\widehat{\omega}(\lambda_0)$  sont

<sup>2</sup>Ce lacet est obtenu en choisissant un entier  $q$  tel que  $f^q(z_0)$  est très proche de  $z_0$ , et en perturbant le lacet obtenu en concaténant des chemins positivement transverses à  $\mathcal{F}$  homotopes à  $\gamma_{I,z_0}, \gamma_{I,f(z_0)}, \dots, \gamma_{I,f^{q-1}(z_0)}$  et un petit arc joignant  $f^q(z_0)$  à  $z_0$ . Voir [15] pour les détails.

positivement ou négativement invariants par  $f$  (propriété (F3)), on sait que la mesure  $\nu := \mu|_A$  est invariante par  $f$ . Nous allons envisager cinq cas suivant la position des points  $\infty$  et  $z'$  :

1.  $\infty \in \widehat{\omega}(\lambda_0)$  et  $z' \in \widehat{\alpha}(\lambda_0)$  ;    1bis.  $\infty \in \widehat{\alpha}(\lambda_0)$  et  $z' \in \widehat{\omega}(\lambda_0)$  ;
2.  $\infty \in \widehat{\omega}(\lambda_0)$  et  $z' \notin \widehat{\alpha}(\lambda_0)$  ;    2bis.  $\infty \in \widehat{\alpha}(\lambda_0)$  et  $z' \notin \widehat{\omega}(\lambda_0)$  ;
3.  $\infty \notin (\widehat{\alpha}(\lambda_0) \sqcup \widehat{\omega}(\lambda_0))$ .

Commençons par le cas le plus simple : celui où  $\infty \in \widehat{\omega}(\lambda_0)$  et  $z' \in \widehat{\alpha}(\lambda_0)$ . Nous allons construire un disque libre  $V$  tel que  $\mu(V) > 0$  et tel que  $\alpha_{V,z'}(z) > 0$  pour tout  $z \in V$ .

Rappelons que  $\pi_{z'} : \widetilde{A}_{z'} \rightarrow A_{z'}$  désigne le revêtement universel de l'anneau  $A_{z'} = \mathbb{S}^2 \setminus \{\infty, z'\}$ . Notons  $\widetilde{\mathcal{F}}$  le feuilletage singulier orienté de  $\widetilde{A}_{z'}$  obtenu en relevant  $\mathcal{F}$ . Remarquons que  $A$  est un sous-anneau essentiel de l'anneau  $A_{z'}$  ; par suite,  $\widetilde{A} := \pi_{z'}^{-1}(A)$  est une bande dans  $\widetilde{A}_{z'}$ . Fixons alors un relevé  $\widetilde{z}_0$  de  $z_0$  dans  $\widetilde{A}_{z'}$ , et notons  $\widetilde{\lambda}_0$  la feuille de  $\widetilde{\mathcal{F}}$  passant par  $\widetilde{z}_0$ . Remarquons que  $\widetilde{\lambda}_0$  est une droite topologique orientée proprement plongée dans la bande  $\widetilde{A}$ . En effet, c'est un relevé de la feuille  $\lambda_0$  de  $\mathcal{F}$  dont on sait qu'elle va d'un bout à l'autre de l'anneau  $A$ . Cela a un sens de dire qu'un point  $\widetilde{z} \in \widetilde{A}$  est situé à *gauche* (respectivement à *droite*) de  $\widetilde{\lambda}_0$ . Rappelons maintenant que  $\widetilde{f}_{I,z'}$  désigne le relèvement de  $f$  à  $\widetilde{A}_{z'}$  associé à l'isotopie  $I$ . Ici, comme  $I$  fixe  $z'$ , elle se relève en une isotopie qui joint  $\text{Id}|_{\widetilde{A}_{z'}}$  à  $\widetilde{f}_{I,z'}$ .

**Lemme 5.8.** *Considérons un point  $z \in A \setminus X$  et un relevé  $\widetilde{z}$  de  $z$  dans  $\widetilde{A}$ . Si  $z$  est positivement récurrent pour  $f$ , alors le point  $f(z)$  est aussi dans  $A$ . Si, de plus,  $\widetilde{z}$  est à droite au sens large de la feuille  $\widetilde{\lambda}_0$ , alors son image  $\widetilde{f}_{I,z'}(\widetilde{z})$  est à droite au sens strict de  $\widetilde{\lambda}_0$ .*

*Preuve du lemme.* Les propriétés d'invariance des ensembles  $\widehat{\alpha}(\lambda_0)$  et  $\widehat{\omega}(\lambda_0)$  (propriété (F3) et son analogue pour  $\widehat{\alpha}(\lambda_0)$ ) montrent que, si  $z$  est positivement récurrent pour  $f$ , alors l'orbite de  $f$  doit être contenue dans  $A$ . Ceci montre la première affirmation du lemme.

Passons à la preuve de la seconde affirmation. D'après les assertions (3) et (4) du théorème 4.2, le chemin  $\gamma_{I,z}$  est homotope dans  $A_{z'}$  à un chemin  $\gamma_z$  positivement transverse au feuilletage  $\mathcal{F}$  et contenue dans  $A$  car  $\lambda_0$  s'accumule sur tous les points de la frontière de  $\widehat{\alpha}(\lambda_0)$  et  $\widehat{\omega}(\lambda_0)$ . Par ailleurs, l'isotopie  $I$  se relève dans  $\text{Homeo}(\widetilde{A}_{z'})$  en une isotopie qui joint l'identité à  $\widetilde{f}_{I,z'}$  (par définition de  $\widetilde{f}_{I,z'}$  et parce que  $I$  fixe  $z'$ ). Ainsi, le chemin  $\gamma_{I,z}$  se relève en un chemin joignant  $\widetilde{z}$  à  $\widetilde{f}_{I,z'}(\widetilde{z})$ . Le chemin  $\gamma_z$  étant homotope à  $\gamma_{I,z}$ , il se relève également en un chemin  $\widetilde{\gamma}_z$  joignant  $\widetilde{z}$  à  $\widetilde{f}_{I,z'}(\widetilde{z})$ . Bien sûr, ce chemin est positivement transverse au feuilletage  $\widetilde{\mathcal{F}}$  et il est contenu dans  $\widetilde{A}$ . En particulier, il ne peut rencontrer la feuille  $\widetilde{\lambda}_0$  qu'en la traversant de la gauche vers la droite ce qui termine la preuve de la seconde affirmation du lemme.  $\square$

Comme le point  $\widetilde{z}_0$  est situé sur la feuille  $\widetilde{\lambda}_0$ , le lemme 5.8 implique que le point  $\widetilde{f}_{I,z'}(\widetilde{z}_0)$  est situé strictement à droite de  $\widetilde{\lambda}_0$ , et que le point  $\widetilde{f}_{I,z'}^{-1}(\widetilde{z}_0)$  est situé strictement à gauche de  $\widetilde{\lambda}_0$ . Considérons un disque topologique ouvert  $\widetilde{U} \subset \widetilde{A}_{z'}$  contenant le point  $\widetilde{z}_0$ . Quitte à choisir  $\widetilde{U}$  suffisamment petit, nous supposons que  $U := \pi_{z'}(\widetilde{U})$  est un disque libre, que les disques topologiques  $U$ ,  $f(U)$  et  $f^{-1}(U)$  sont tous les trois contenus dans  $A$ , que le disque  $\widetilde{U}$  est situé à droite au sens strict de la feuille  $T_{z'}^{-1}(\widetilde{\lambda}_0)$  et à gauche au sens strict de la feuille  $T_{z'}(\widetilde{\lambda}_0)$ , que le disque ouvert  $\widetilde{f}_{I,z'}(\widetilde{U})$  est situé à droite au sens strict de la feuille  $\widetilde{\lambda}_0$ , et que le disque ouvert  $\widetilde{f}_{I,z'}^{-1}(\widetilde{U})$  est situé à gauche au sens strict de  $\widetilde{\lambda}_0$ .

Nous allons montrer que la fonction  $\alpha_{U,z'}$  est strictement positive sur  $U$ . Pour ce faire, nous divisons  $U$  en deux parties : soit  $\widetilde{U}_G$  (respectivement  $\widetilde{U}_D$ ) l'ensemble des points de  $\widetilde{U}$  situés à gauche (respectivement à droite) au sens large de la feuille  $\widetilde{\lambda}_0$ . Nous notons  $U_G := \pi_{z'}(\widetilde{U}_G)$  et  $U_D := \pi_{z'}(\widetilde{U}_D)$ . Considérons un point  $z \in \text{Rec}^+(f) \cap U$ , et notons  $\widetilde{z}$  le relevé de  $z$  situé dans  $\widetilde{U}$ . Pour simplifier les notations, posons  $q := \tau_U(z) > 1$ . Il existe alors un unique entier  $p \in \mathbb{Z}$ , tel

que  $\tilde{f}_{I,z'}^q(\tilde{z}) \in T_{z'}^p(\tilde{U})$ . D'après la remarque 5.1, on a  $\alpha_{U,z'}(z) = p$ . Nous devons donc montrer que l'entier  $p$  est strictement positif. Nous distinguons deux cas :

*Cas A.* Le point  $\tilde{f}_{I,z'}^q(\tilde{z})$  est dans  $T_{z'}^p(\tilde{U}_G)$ . Par construction,  $\tilde{U}_G$  est situé à gauche de  $\tilde{\lambda}_0$ , donc  $T_{z'}^k(\tilde{U}_G)$  est situé à gauche de  $\tilde{\lambda}_0$  pour tout  $k \leq 0$ . Mais  $\tilde{f}_{I,z'}(\tilde{U})$  est à droite au sens strict de  $\tilde{\lambda}_0$ , ce qui implique, en utilisant le lemme 5.8, que le point  $\tilde{f}_{I,z'}^\ell(\tilde{z})$  est à droite au sens strict de  $\tilde{\lambda}_0$  pour tout  $\ell \geq 1$ . En particulier,  $\tilde{f}_{I,z'}^q(\tilde{z})$  est à droite au sens strict de  $\tilde{\lambda}_0$ . Par conséquent, l'entier  $p = \alpha_{U,z'}(z)$  doit être strictement positif.

*Cas B.* Le point  $\tilde{f}_{I,z'}^q(\tilde{z})$  est dans  $T_{z'}^p(\tilde{U}_D)$ . Par construction,  $\tilde{U}_D$  est situé à gauche de  $T_{z'}(\tilde{\lambda}_0)$ , donc  $T_{z'}^k(\tilde{U}_D)$  est situé à gauche de  $\tilde{\lambda}_0$  pour tout  $k < 0$ . Mais, comme dans le premier cas, le point  $\tilde{f}_{I,z'}^\ell(\tilde{z})$  est à droite au sens strict de  $\tilde{\lambda}_0$  pour tout  $\ell \geq 1$ . Par conséquent, l'entier  $p$  doit être positif ou nul. Supposons maintenant que  $p$  soit nul. Alors  $\tilde{f}_{I,z'}^q(\tilde{z}) \in \tilde{U}_D$ , et donc  $\tilde{f}_{I,z'}^{q-1}(\tilde{z}) \in \tilde{f}_{I,z'}^{-1}(\tilde{U}_D)$ . Ceci est absurde car le disque  $\tilde{f}_{I,z'}^{-1}(\tilde{U}_D)$  est à gauche au sens strict de  $\tilde{\lambda}_0$  par construction de  $U$ , et  $\tilde{f}_{I,z'}^{q-1}(\tilde{z})$  est à droite au sens strict de  $\tilde{\lambda}_0$ . Par conséquent, l'entier  $p = \alpha_{U,z'}(z)$  doit être strictement positif.

Nous avons ainsi montré que l'entier  $\alpha_{U,z'}(z)$  est strictement positif pour tout point  $z \in \text{Rec}^+(f) \cap U$ . Par ailleurs, le point  $z_0$  est dans le support de  $\mu$ , donc  $\mu$  charge le disque  $U$ . En utilisant le lemme 5.5, on en déduit  $\mu(\{z \in \mathbb{R}^2, \rho_{z'}(z) > 0\}) > 0$ , ce qui montre l'assertion (5) dans le cas considéré.

Le cas où  $\infty \in \hat{\alpha}(\lambda_0)$  et  $z' \in \hat{\omega}(\lambda_0)$  se traite évidemment de manière similaire. Dans ce cas, on trouve un disque libre  $V$  tel que  $\mu(V) > 0$  et  $\alpha_{V,z'}(z) < 0$  pour tout point  $z \in V \cap \text{Rec}^+(f)$ . On en déduit que  $\mu(\{z \in \mathbb{R}^2, \rho_{z'}(z) < 0\}) > 0$ .

Dans le cas où  $\infty \in \hat{\omega}(\lambda_0)$  et  $z' \notin \hat{\alpha}(\lambda_0)$ , on choisit un point fixe  $z'' \in \hat{\alpha}(\lambda_0) \cap X$ , on reprend la preuve du premier cas, en y remplaçant  $z'$  par  $z''$ , et on obtient que  $\mu(\{z \in \mathbb{R}^2, \rho_{z''}(z) > 0\}) > 0$ . Le seul point à modifier est la preuve de la seconde affirmation du lemme 5.8. Notons que les arguments utilisés dans le premier cas ne s'appliquent pas ici, car l'isotopie  $I$  ne fixe pas le point  $z''$ , et les chemins  $\gamma_{I,z}$  et  $\gamma_{I',z}$  ne sont pas homotopes dans l'anneau  $A_{z''}$ . On raisonne comme suit. Soit  $z$  un point de  $A \setminus X$ , et  $\tilde{z}$  un relevé de  $z$  dans  $\tilde{A}_{z''}$ . On sait que le chemin  $\gamma_{I',z}$  ne passe pas par le point  $z''$  (puisque  $z'' \in X$ ). On considère alors le relèvement  $\tilde{f}'$  de  $f|_{A_{z''}}$  à  $\tilde{A}_{z''}$  tel que le chemin  $\gamma_{I',z} : t \mapsto f'_t(z)$  se relève dans  $\tilde{A}_{z''}$  en un chemin joignant  $\tilde{z}$  à  $\tilde{f}'(\tilde{z})$ . D'après l'assertion (5) du théorème 4.2, il existe une isotopie  $I'' = (f''_t)_{t \in [0,1]}$  joignant l'identité à  $f$  dans  $\text{Homeo}(\mathbb{R}^2)$ , qui fixe les points  $z'$  et  $z''$ , et telle que les chemins  $\gamma_{I',z}$  et  $\gamma_{I'',z}$  sont homotopes dans  $\mathbb{R}^2 \setminus \{z', z''\}$ . Il en résulte que le relèvement  $\tilde{f}'$  coïncide avec le relèvement  $\tilde{f}_{I'',z''}$ . D'autre part, l'assertion (1) du théorème 4.2 nous dit que le lacet  $\gamma_{I,z''}$  est homotope à un point dans  $A_{z'}$ . Ceci implique que  $I$  est homotope à une isotopie qui fixe les points  $\infty$ ,  $z'$  et  $z''$ , et donc est homotope à  $I''$ . Par suite, les relèvements  $\tilde{f}_{I,z''}$  et  $\tilde{f}_{I'',z''}$  coïncident. Enfin, l'assertion (4) du théorème 4.2 affirme que le chemin  $\gamma_{I',z}$  est homotope dans  $A_{z'} \setminus X$  à un chemin  $\gamma_z$  positivement transverse au feuilletage  $\mathcal{F}$ . Puisque le chemin  $\gamma_z$  est homotope à  $\gamma_{I',z}$  dans  $A_{z'} \setminus X$ , donc dans  $A_{z''}$ , il se relève dans  $\tilde{A}_{z''}$  en un chemin  $\tilde{\gamma}_z$  joignant  $\tilde{z}$  à  $\tilde{f}'(\tilde{z}) = \tilde{f}_{I'',z''}(\tilde{z}) = \tilde{f}_{I,z''}(\tilde{z})$ . Ainsi nous avons montré l'existence d'un chemin positivement transverse au feuilletage  $\tilde{\mathcal{F}}$  joignant  $\tilde{z}$  à  $\tilde{f}_{I,z''}(\tilde{z})$  dans  $\tilde{A}_{z''}$ . Ce fait étant établi, on peut terminer la preuve du lemme 5.8 et la preuve de l'assertion (5) exactement comme dans le premier cas.

Le cas où  $\infty \in \hat{\alpha}(\lambda_0)$  et  $z' \notin \hat{\alpha}(\lambda_0)$  se traite évidemment de manière similaire : on choisit un point  $z'' \in \hat{\omega}(\lambda_0) \cap X$  et on montre que  $\mu(\{z \in \mathbb{R}^2, \rho_{z''}(z) < 0\}) > 0$ .

Il reste à étudier le cas où  $\infty \in A = \mathbb{S}^2 \setminus (\widehat{\alpha}(\lambda_0) \sqcup \widehat{\omega}(\lambda_0))$ . Dans ce cas, on fixe  $z'' \in \widehat{\alpha}(\lambda_0) \cap X$  et  $z''' \in \widehat{\omega}(\lambda_0) \cap X$ . On rappelle que la notation  $A_{z'', z'''}$  désigne l'anneau  $\mathbb{S}^2 \setminus \{z'', z'''\}$ , et que  $\widetilde{f}_{z'', z'''}$  désigne le relèvement de  $f|_{A_{z'', z'''}}$  à  $\widetilde{A}_{z'', z'''}$  qui fixe les relevés de  $\infty$ . On reprend la preuve du premier cas, en remplaçant l'anneau  $A_{z'}$  par l'anneau  $A_{z'', z'''}$ , et le relèvement  $\widetilde{f}_{I, z'}$  par le relèvement  $\widetilde{f}_{z'', z'''}$ . À nouveau, le seul point à modifier est la preuve de la seconde affirmation du lemme 5.8. On raisonne comme suit. Soit  $z$  un point de  $A \setminus X$ , et  $\widetilde{z}$  un relevé de  $z$  dans  $\widetilde{A}_{z'', z'''}$ . On considère le relèvement  $\widetilde{f}'$  de  $f|_{A_{z'', z'''}}$  à  $\widetilde{A}_{z'', z'''}$  tel que le chemin  $\gamma_{I', z}$  se relève en un chemin de  $\widetilde{z}$  à  $\widetilde{f}'(\widetilde{z})$ . En utilisant l'assertion (5) du théorème 4.2 comme dans le cas où  $\infty \in \widehat{\omega}(\lambda_0)$  et  $z' \notin \widehat{\alpha}(\lambda_0)$ , on voit que  $\widetilde{f}'$  coïncide avec le relèvement canonique  $\widetilde{f}_{z'', z'''}$  (rappelons que ce dernier est le relèvement de  $f|_{A_{z'', z'''}}$  qui fixe les relevés du point  $\infty$ ). L'assertion (4) du théorème 4.2 assure alors l'existence d'un chemin  $\widetilde{\gamma}_z$  joignant  $\widetilde{z}$  à  $\widetilde{f}'(\widetilde{z}) = \widetilde{f}_{z'', z'''}(z)$  dans  $\widetilde{A}_{z'', z'''}$ , positivement transverse au relevé  $\widetilde{\mathcal{F}}$  du feuilletage  $\mathcal{F}$ . On peut dès lors reprendre la fin de la preuve du premier cas (en remplaçant l'anneau  $A_{z'}$  par l'anneau  $A_{z'', z'''}$ , et le relèvement  $\widetilde{f}_{I, z'}$  par le relèvement  $\widetilde{f}_{z'', z'''}$ ). En utilisant le fait 3.7, on en déduit que  $\mu(\{z \in \mathbb{R}^2, \rho_{z''}(z) - \rho_{z'''}(z) > 0\}) > 0$ . On a donc  $\mu(\{z \in \mathbb{R}^2, \rho_{z''}(z) > 0\}) > 0$  ou  $\mu(\{z \in \mathbb{R}^2, \rho_{z'''}(z) < 0\}) > 0$ . Ceci termine la preuve de l'assertion (5), et donc aussi de la proposition 2.1.  $\square$

*Remarque 5.9.* Soit  $\mathbb{D}^{2n}$  le disque unité de  $\mathbb{R}^{2n}$ . C. Viterbo a montré que tout difféomorphisme hamiltonien de  $\mathbb{D}^{2n}$ , qui vaut l'identité au bord, admet un point fixe d'action symplectique non-nulle ([20, proposition 4.2]). Pour  $n = 1$ , les difféomorphismes hamiltoniens du disque sont simplement ceux qui préservent l'aire euclidienne usuelle et l'action symplectique n'est autre que l'intégrale du nombre de rotation. Le résultat de Viterbo se traduit donc de la manière suivante. Pour tout difféomorphisme  $f$  du disque  $\mathbb{D}^2$  qui vaut l'identité au bord et qui préserve l'aire euclidienne usuelle, si  $I$  est une isotopie joignant l'identité à  $f$ , il existe un point  $z' \in \text{Fix}(f)$  tel que l'intégrale de la fonction nombre de rotation  $z \mapsto \rho_{I, z'}(z)$  par rapport à l'aire euclidienne est non-nulle. Ainsi le résultat de Viterbo fournit donc une preuve de l'assertion (5) de notre proposition 2.1, dans le cas où l'homéomorphisme  $f$  se prolonge en un  $C^1$ -difféomorphisme de la sphère  $\mathbb{S}^2$  et où la mesure  $\mu$  est donnée par une forme volume. On se ramène au disque  $\mathbb{D}^2$  en éclatant le point  $\infty$ .

## 6. LES PROPRIÉTÉS (P1), (P2) ET LES $C^1$ -DIFFÉOMORPHISMES DE LA SPHÈRE

Le but de cette partie est de montrer, comme annoncé dans la proposition 1.7, que les propriétés (P1) et (P2) sont vérifiées par tout homéomorphisme du plan qui s'étend en un  $C^1$ -difféomorphisme de la sphère.

*Preuve de la proposition 1.7.* Supposons donc que  $f$  admet une extension de classe  $C^1$  à  $\mathbb{S}^2$  et commençons par montrer que  $f$  vérifie (P2). Nous n'avons besoin que de la différentiabilité de  $f$  en  $\infty$  et plus précisément de l'existence d'une compactification  $\overline{\mathbb{R}^2}$  de  $\mathbb{R}^2$  par ajout d'un cercle  $\Sigma$  à l'infini tel que  $f$  se prolonge en un homéomorphisme de  $\overline{\mathbb{R}^2}$ . Fixons  $z' \in \text{Fix}(f)$ . L'homéomorphisme  $f|_{A_{z'}}$  se prolonge en un homéomorphisme de  $A_{z'} \sqcup \Sigma$ . Le revêtement universel de  $A_{z'} \sqcup \Sigma$  s'écrit  $\widetilde{A}_{z'} \sqcup \widetilde{\Sigma}$ , où  $\widetilde{\Sigma}$  est le revêtement universel de  $\Sigma$  et  $\widetilde{f}_{I, z'}$  se prolonge en un homéomorphisme  $\widetilde{f}_{I, z'}$  de  $\widetilde{A}_{z'} \sqcup \widetilde{\Sigma}$ . Si  $\text{Fix}(f)$  est compact, la propriété (P2) est évidemment vérifiée. Sinon il y a des points fixes de l'extension de  $f|_{A_{z'}}$  sur  $\Sigma$  et il existe donc un entier  $p$  tel que  $\widetilde{f}_{I, z'}(\widetilde{z}) = \overline{T_{z'}^p}(\widetilde{z})$  pour tout relevé  $\widetilde{z}$  d'un point fixe appartenant à  $\Sigma$ . On a donc également  $\widetilde{f}_{I, z'}(\widetilde{z}) = T_z^p(\widetilde{z})$  pour tout relevé  $\widetilde{z}$  d'un point fixe proche de  $\Sigma$ , ce qui n'est rien d'autre que la propriété (P2).

Montrons maintenant que (P1) est vérifiée. La fonction  $\text{Enlace}_I$ , restreinte à l'ensemble des couples de points fixes distincts, étant localement constante, il suffit de démontrer les deux assertions suivantes :

- (i) Il existe un voisinage  $W$  de  $\infty$  et une constante  $M$  telle que  $|\text{Enlace}_I(z, z')| \leq M$  pour tout  $z \in \text{Fix}(f)$  et tout  $z' \in \text{Fix}(f) \cap W$  distincts.
- (ii) Pour tout  $z'' \in \text{Fix}(f)$  il existe un voisinage pointé  $W$  de  $z''$  et une constante  $M$  telle que  $|\text{Enlace}_I(z, z')| \leq M$  pour tous  $z, z' \in \text{Fix}(f) \cap W$  distincts.

Remarquons tout d'abord qu'en vertu de la formule (2) dans l'introduction, les assertions (i) et (ii) ne dépendent pas du choix de l'isotopie  $I$ . On pourra donc supposer que  $I$  est une isotopie adaptée. La propriété (i) est alors un cas particulier de l'assertion (4) de la proposition 2.1 : on rappelle en effet que, si  $z$  et  $z'$  sont deux points fixes de  $f$ , alors  $\rho_{z'}(z) = \text{Enlace}_I(z, z')$ .

Montrons maintenant (ii) en donnant à  $z''$  le rôle pris auparavant par  $\infty$ . On peut toujours supposer que l'isotopie  $I$  fixe  $z''$ . Puisque  $f$  est différentiable en  $z''$ , on peut compactifier l'anneau  $A_{z''}$  par ajout d'un cercle au bout correspondant à  $z''$  de telle façon que  $f_{z''}$  se prolonge en un homéomorphisme. Les arguments utilisés dans la vérification de la propriété (P1) nous permettent de supposer, quitte à changer d'isotopie, que pour tout point fixe  $z \neq z''$  proche de  $z''$ , on a  $\text{Enlace}_I(z, z'') = 0$ . Le preuve de (i) nous permet quant à elle de dire que, si  $z' \neq z''$  est proche de  $z''$ , alors, pour tout point fixe  $z \notin \{z', z''\}$ , on a  $|\rho_{z'}(z) - \rho_{z''}(z)| = |\text{Enlace}_I(z, z') - \text{Enlace}_I(z, z'')| \leq M$ . On en déduit que  $|\text{Enlace}_I(z, z')| \leq M$  si  $z$  et  $z'$  sont tous deux proches de  $z''$ .  $\square$

*Remarque 6.1.* La fonction  $(z, z') \mapsto \text{Enlace}_I(z, z')$  est l'un des objets utilisés par J.-M. Gambaudo et É. Ghys dans [10] pour construire des quasi-morphismes sur le groupe des difféomorphismes d'une surface préservant l'aire. On notera que les arguments de la preuve du lemme 4.1 de [10] fournissent une preuve (différente de celle proposée ci-dessus) du fait que tout homéomorphisme du plan qui se prolonge en un  $C^1$ -difféomorphisme de  $\mathbb{S}^2$  vérifie la propriété (P1).

#### APPENDICE. QUELQUES EXEMPLES D'HOMÉOMORPHISMES DU PLAN QUI VÉRIFIENT, OU PAS, LES PROPRIÉTÉS (P1) ET (P2)

Le but de cet appendice est de tenter d'éclairer le sens des propriétés (P1) et (P2), en décrivant quelques exemples d'homéomorphismes du plan qui satisfont, ou ne satisfont pas, l'une et/ou l'autre de ces propriétés. Nous identifions  $\mathbb{R}^2$  à  $\mathbb{C}$ , afin de pouvoir utiliser les notations complexes. Dans les exemples suivants, nous notons  $z_n$  le point d'abscisse  $n$  sur l'axe réel, et  $B_n$  la boule euclidienne de centre  $z_n$  de rayon  $\frac{1}{4}$ .

**Exemple 1. Un homéomorphisme qui ne satisfait ni (P1), ni (P2).** Considérons le difféomorphisme  $f \in \text{Diff}_+^\infty(\mathbb{R}^2)$  défini (dans une coordonnée complexe) par la formule

$$f\left(re^{2i\pi\theta}\right) = re^{2i\pi(\theta+r)}.$$

On construit facilement une isotopie  $I = (f_t)_{t \in [0,1]}$  joignant l'identité à  $f$  : le difféomorphisme  $f_t$  est obtenu en remplaçant  $\theta + r$  par  $\theta + tr$  dans la formule ci-dessus. Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , le point  $z_n$  est fixe par  $f$ , et on a  $\text{Enlace}_I(0, z_n) = \text{Tourne}_I(z_n) = n$ . Par conséquent,  $f$  ne satisfait ni (P1) ni (P2).

**Exemple 2. Un homéomorphisme qui satisfait (P1), mais pas (P2).** Considérons maintenant le difféomorphisme  $f \in \text{Diff}_+^\infty(\mathbb{R}^2)$  défini par la formule

$$f\left(re^{2i\pi\theta}\right) = re^{2i\pi\left(\theta + \sin\left(\pi r + \frac{\pi}{2}\right)\right)}.$$

On construit une isotopie  $I = (f_t)_{t \in [0,1]}$  joignant l'identité à  $f$ , comme dans l'exemple précédent : le difféomorphisme  $f_t$  est obtenu en remplaçant  $\sin(\pi r + \frac{\pi}{2})$  par  $t \sin(\pi r + \frac{\pi}{2})$  dans la formule définissant  $f$ . Si  $z$  et  $z'$  sont deux points distincts du plan, on vérifie facilement que

$$\text{Enlace}_I(z, z') = \sin\left(\pi r + \frac{\pi}{2}\right)$$

où  $r = \max(|z|, |z'|)$ . En particulier,  $f$  vérifie (P1). Rappelons que la notation  $z_n$  désigne le point d'abscisse  $n$  sur l'axe réel. Pour montrer que  $f$  ne vérifie pas (P2), il suffit de remarquer que  $z_n$  est fixe par  $f$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , et que

$$\text{Tourne}_I(z_n) = \sin\left(\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

**Exemple 3. Un homéomorphisme qui satisfait (P2), mais pas (P1).** Pour chaque entier  $n$ , considérons une fonction  $\alpha_n : [0, 1/4] \rightarrow \mathbb{R}$ , lisse, qui s'annule au voisinage de 0 et 1/4, et qui vaut  $n$  en 1/8. Rappelons que  $z_n$  désigne le point d'abscisse  $n$  sur l'axe réel, et  $B_n$  la boule euclidienne fermée de centre  $z_n$  et de rayon 1/4. Considérons alors le difféomorphisme  $f \in \text{Diff}_+^\infty(\mathbb{R}^2)$  qui est défini sur la boule  $B_n$  par la formule

$$f\left(z_n + re^{2i\pi\theta}\right) = z_n + re^{2i\pi(\theta + \alpha_n(r))},$$

et qui coïncide avec l'identité sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} B_n$ . On construit une isotopie  $I = (f_t)_{t \in [0,1]}$  joignant l'identité à  $f$  comme dans les exemples précédents : le difféomorphisme  $f_t$  est obtenu en remplaçant  $\alpha_n(r)$  par  $t \alpha_n(r)$  dans la formule définissant  $f$ . Quel que soit  $n \in \mathbb{Z}$ , si on note  $z'_n := z_n + \frac{1}{8}$ , alors  $z'_n$  est un point fixe de  $f$ , et on a

$$\text{Enlace}_I(z_n, z'_n) = n.$$

En particulier,  $f$  ne vérifie pas (P1). Par ailleurs,  $f_t$  coïncide avec l'identité sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} B_n$ , et tout lacet contenu dans  $\bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} B_n$  qui fait le tour de l'origine est en fait contenu dans la boule  $B_0$ . Ceci montre que  $\text{Tourne}_I(z) = 0$  pour tout point  $z \in \text{Fix}(f)$  situé hors de  $B_0$ . En particulier,  $f$  vérifie (P2).

**Exemple 4. Un homéomorphisme qui satisfait (P1) et (P2), mais ne s'étend pas en un  $C^1$ -difféomorphisme de la sphère.** Fixons  $\theta_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ , et considérons une fonction lisse  $\alpha : [0, 1/4] \rightarrow \mathbb{R}$  qui vaut  $\theta_0$  au voisinage de 0, et qui s'annule au voisinage de 1/4. Considérons alors le difféomorphisme  $f \in \text{Diff}_+^\infty(\mathbb{R}^2)$ , défini par la formule

$$f\left(z_n + re^{2i\pi\theta}\right) = z_n + re^{2i\pi(\theta + \alpha(r))}$$

sur la boule  $B_n$ , et qui coïncide avec l'identité sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} B_n$ . On construit une isotopie  $I = (f_t)_{t \in [0,1]}$  joignant l'identité à  $f$  en remplaçant  $\alpha(r)$  par  $t \alpha(r)$  dans la formule définissant  $f$ . Le même argument que dans l'exemple 3 montre que  $f$  vérifie (P2). Si  $z, z'$  sont deux points distincts du plan, on a

$$\text{Enlace}_I(z, z') = \begin{cases} \alpha(\max(|z - z_n|, |z' - z_n|)) & \text{si } z \in B_n \text{ et } z' \in B_n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Par conséquent,  $f$  vérifie (P1). Notons maintenant  $\bar{f}$  l'extension de  $f$  à  $\mathbb{S}^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$  obtenue en posant  $f(\infty) = \infty$ . Alors  $\bar{f}$  est un difféomorphisme de  $\mathbb{S}^2$  pour la structure différentielle usuelle, mais la différentielle de  $\bar{f}$  n'est pas continue en  $\infty$  : en effet, la différentielle de  $\bar{f}$  en  $\infty$  est l'identité, mais la différentielle en  $z_n$  est la rotation d'angle  $2\pi\theta_0$  pour tout  $n$ .

*Remarque 6.2.* Le difféomorphisme  $f$  construit ci-dessus commute avec la translation  $z \mapsto z + 1$ . Ainsi, aucune partie compacte non-vide de  $\mathbb{R}^2$  n'est invariante par tout élément de  $\text{Homeo}(\mathbb{R}^2)$  qui commute avec  $f$ . Notons également que la restriction de la mesure de Lebesgue à la boule  $B_n$  est une mesure de masse finie  $f$ -invariante, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ . Ceci montre que l'hypothèse

“ $f$  s'étend en un  $C^1$ -difféomorphisme de  $\mathbb{S}^2$ ” est nécessaire dans l'assertion 2 du théorème 1.8, comme nous l'avons annoncé dans la remarque 1.9.

**Exemple 5. Un homéomorphisme qui satisfait (P1) et (P2), pour lequel il existe un point  $z' \in \text{Fix}(f)$  tel que la fonction  $z \mapsto \rho_{z'}(z)$  n'est pas bornée.** Nous avons montré dans la remarque 5.3 que, pour tout homéomorphisme  $f$  du plan préservant l'orientation et vérifiant les propriétés (P1) et (P2), et tout point  $z' \in \text{Fix}(f)$ , la fonction  $z \mapsto \rho_{z'}(z)$  est bornée sur tout disque libre pour  $f$ . Cette fonction n'est cependant pas globalement bornée en général comme le montre l'exemple très simple suivant. Considérons un  $C^\infty$ -difféomorphisme  $\rho$  de la demi-droite  $[0, +\infty[$  qui fixe chaque entier, et tel que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , et tout  $r \in ]n, n+1[$ , on a  $\rho^k(r) \rightarrow n$  quand  $k \rightarrow -\infty$  et  $\rho^k(r) \rightarrow n+1$  quand  $k \rightarrow +\infty$ . Considérons alors le difféomorphisme  $f \in \text{Diffeo}_+^\infty(\mathbb{R}^2)$  défini par la formule

$$f\left(re^{2i\pi\theta}\right) = \rho(r)e^{2i\pi(\theta+r+\frac{1}{2})}.$$

On construit facilement une isotopie  $I = (f_t)_{t \in [0,1]}$  joignant l'identité à  $f$  : le difféomorphisme  $f_t$  est obtenu en remplaçant  $\theta + r$  par  $\theta + tr$ , et  $\rho(r)$  par  $(1-t)r + t\rho(r)$  dans la formule ci-dessus. Notons  $C_n$  le cercle centré à l'origine de rayon  $n$ . Pour tout point  $z$  tel que  $n < |z| < n+1$ , l' $\alpha$ -limite de l'orbite pour  $f$  du point  $z$  est le cercle  $C_n$ , et l' $\omega$ -limite de cette orbite est le cercle  $C_{n+1}$ . Par ailleurs, la restriction de  $f$  au cercle  $C_n$  est une rotation d'angle  $2\pi(n+1/2)$ . En particulier,  $f$  n'a aucun point fixe sur  $C_n$ . Ceci montre que l'origine est le seul point fixe de  $f$ , ce qui prouve que  $f$  vérifie les propriétés (P1) et (P2). Ceci montre également que, pour tout point  $z$  tel que  $|z| = n$ , on a  $\rho_0(z) = n+1/2$ . En particulier, la fonction  $z \mapsto \rho_0(z)$  n'est pas bornée. Remarquons qu'on peut également exhiber une mesure  $\mu$ , de masse finie,  $f$ -invariante, telle que la fonction  $z \mapsto \rho_0(z)$  n'est pas bornée sur le support de  $\mu$  : il suffit de prendre par exemple  $\mu := \sum_{n>0} 2^{-n} \mu_n$  où  $\mu_n$  est la mesure de Lebesgue (normalisée pour avoir une masse totale égale à 1) sur le cercle  $C_n$ .

**Exemple 5bis. Un homéomorphisme qui satisfait (P1) et (P2), pour lequel il existe  $z' \in \text{Fix}(f)$  tel que la fonction  $z \mapsto \rho_{z'}(z)$  n'est pas bornée sur les compacts de  $\mathbb{R}^2$ .** Dans l'exemple 5 ci-dessus, la fonction  $z \mapsto \rho_0(z)$  est bornée sur tout compact de  $\mathbb{R}^2$ . Il est cependant facile de modifier cet exemple, pour que ce ne soit plus le cas. Il suffit de prendre maintenant un homéomorphisme  $\rho$  de la demi-droite  $[0, +\infty[$  qui fixe le point  $1/n$  pour tout  $n > 0$ , et tel que, pour tout  $r \in ]1/(n+1), 1/n[$ , on a  $\rho^k(r) \rightarrow 1/n$  quand  $k \rightarrow -\infty$  et  $\rho^k(r) \rightarrow 1/(n+1)$  quand  $k \rightarrow +\infty$ , puis de considérer l'homéomorphisme  $f$  défini par la même formule que dans l'exemple 5. L'homéomorphisme ainsi obtenu n'est pas différentiable à l'origine, mais vérifie les propriétés (P1) et (P2) pour la même raison que dans l'exemple 5 : l'origine est le seul point fixe de  $f$ . D'autre part, pour tout  $z$  tel que  $|z| = 1/n$ , on a  $\rho_0(z) = n+1/2$ , ce qui implique que la fonction  $z \mapsto \rho_0(z)$  n'est pas bornée au voisinage de l'origine.

**Exemple 6. Un homéomorphisme qui satisfait (P1) et (P2), tel que la fonction  $z \mapsto \rho_{z'}(z)$  est bornée pour tout  $z' \in \text{Fix}(f)$ , mais tel que la fonction  $(z, z') \mapsto \rho_{z'}(z)$  n'est pas bornée.** Nous avons montré au cours de la preuve de l'assertion (3) de la proposition 2.1 que, pour tout homéomorphisme qui vérifie les propriétés (P1) et (P2), la fonction  $(z, z') \mapsto \rho_{z'}(z)$  est localement bornée sur  $(\mathbb{R}^2 \setminus \text{Fix}(f)) \times \text{Fix}(f)$ . Les deux exemples précédents montrent, qu'à  $z'$  fixé, la fonction  $z \mapsto \rho_{z'}(z)$  n'est pas globalement bornée en général. Nous allons maintenant décrire un exemple tel que la fonction  $z \mapsto \rho_{z'}(z)$  est bornée sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{z'\}$  pour tout  $z' \in \text{Fix}(f)$ , mais tel que la fonction  $(z, z') \mapsto \rho_{z'}(z)$  n'est pas globalement bornée sur  $(\mathbb{R}^2 \setminus \text{Fix}(f)) \times \text{Fix}(f)$ .

Comme dans l'exemple 4,  $z_n$  désigne le point d'abscisse  $n$  sur l'axe réel, et  $B_n$  la boule euclidienne fermée de centre  $z_n$  et de rayon  $1/4$ , pour  $n \in \mathbb{Z}$ . Considérons un homéomorphisme  $\rho$  de l'intervalle  $[0, 1/4]$ , qui fixe les points  $0$ ,  $1/8$  et  $1/4$ , et tel que l'orbite future pour  $\rho$  de tout point de  $]0, 1/4[$  tend vers le point  $1/8$ . Pour tout  $n$ , considérons une fonction lisse  $\alpha_n$  :

$[0, 1/4] \rightarrow \mathbb{R}$  qui s'annule au voisinage de 0 et au voisinage de  $1/4$ , et telle que  $\alpha_n(1/8) = n + 1/2$ . Considérons alors le difféomorphisme  $f \in \text{Diff}_+^\infty(\mathbb{R}^2)$ , défini par la formule

$$f\left(z_n + re^{2i\pi\theta}\right) = z_n + \rho(r)e^{2i\pi(\theta + \alpha_n(r))}$$

sur la boule  $B_n$ , et qui coïncide avec l'identité sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} B_n$ . On construit une isotopie  $I = (f_t)_{t \in [0,1]}$  joignant l'identité à  $f$  en remplaçant  $\alpha_n(r)$  par  $t\alpha_n(r)$ , et  $\rho(r)$  par  $(1-t)r + t\rho(r)$ , dans la formule définissant  $f$ . Le choix de l'homéomorphisme  $\rho$  implique que, quel que soit  $n \in \mathbb{Z}$ , l'orbite future pour  $f$  de tout point  $z \in B_n \setminus \{z_n\}$  va s'accumuler sur le cercle de centre  $z_n$  et de rayon  $1/8$ . Sur ce cercle,  $f$  agit comme une rotation d'angle  $2\pi(n + 1/2)$ . En particulier,  $f$  n'a pas de point fixe sur ce cercle. Ainsi, les seuls points fixes de  $f$  sont les points  $z_n$ , et les points de  $\mathbb{R}^2 \setminus \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} B_n$ . On en déduit facilement que, pour tout couple de points distincts  $z, z' \in \text{Fix}(f)$ , on a  $\text{Enlace}_I(z, z') = 0$ . En particulier,  $f$  vérifie la propriété (P1). Les mêmes arguments que dans l'exemple 4 montrent que  $f$  vérifie également la propriété (P2). Par contre, la fonction  $(z, z') \mapsto \rho_{z'}(z)$  n'est pas bornée : en effet, si  $w_n$  est un point du cercle de centre  $z_n$  et de rayon  $1/8$ , alors on a clairement  $\rho_{z_n}(w_n) = n + 1/2$ .

#### REFERENCES

- [1] Bonatti, Christian. Un point fixe commun pour des difféomorphismes commutants de  $S^2$ . *Ann. of Math. (2)* **129** (1989), no. 1, 61–69.
- [2] Bonatti, Christian. Difféomorphismes commutants des surfaces et stabilité des fibrations en tores. *Topology* **29** (1990), no. 1, 101–126.
- [3] Brown, Morton and Kister, James M. Invariance of complementary domains of a fixed point set. *Proc. Amer. Math. Soc.* **91** (1984), no. 3, 503–504.
- [4] Brouwer, Luitzen E. J. Beweis des ebenen Translationsatzes. *Math. Ann.* **72** (1912), 37–54.
- [5] Druck, Suely; Fang, Fuquan; Firmo, Sebastião. Fixed points of discrete nilpotent group actions on  $S^2$ . *Ann. Inst. Fourier* **52** (2002), no. 4, 1075–1091.
- [6] Firmo, Sebastião. A note on commuting diffeomorphisms on surfaces. *Nonlinearity* **18** (2005), no. 4, 1511–1526.
- [7] Franks, John. Generalizations of the Poincaré-Birkhoff theorem. *Ann. of Math. (2)* **128** (1988), no. 1, 139–151.
- [8] Franks, John ; Handel, Michael ; Parwani, Kamlesh. Fixed points of abelian actions on  $S^2$ . *Ergodic Theory Dynam. Systems* **27** (2007), no. 5, 1557–1581.
- [9] Franks, John; Handel, Michael; Parwani, Kamlesh. Fixed points of abelian actions. *J. Mod. Dyn.* **1** (2007), no. 3, 443–464.
- [10] Gambaudo, Jean-Marc ; Ghys, Étienne. Commutators and diffeomorphisms of surfaces. *Ergodic Theory Dynam. Systems* **24** (2004), no. 5, 1591–1617.
- [11] Guillou, Lucien. Théorème de translation plane de Brouwer et généralisations du théorème de Poincaré-Birkhoff. *Topology* **33** (1994), no. 2, 331–351.
- [12] Handel, Michael. Commuting homeomorphisms of  $S^2$ . *Topology* **31** (1992), no. 2, 293–303.
- [13] Jaulent, Olivier. *Existence d'un feuilletage positivement transverse à un homéomorphisme de surface*. En préparation.
- [14] Kneser, Hellmuth. Die Deformationssätze der einfach zusammenhängenden Flächen. *Math. Z.* **25** (1926), no. 1, 362–372.
- [15] Le Calvez, Patrice. Une version feuilletée équivariante du théorème de translation de Brouwer. *Publ. Math. Inst. Hautes études Sci.* **102** (2005), 1–98.
- [16] Le Roux, Frédéric. Étude topologique de l'espace des homéomorphismes de Brouwer. I. *Topology* **40** (2001), no. 5, 1051–1087.
- [17] Lima, Elon L. Commuting vector fields on  $S^2$ . *Proc. Amer. Math. Soc.* **15** (1964), 138–141.
- [18] Mann, Kathryn. *Bounded orbits and global fixed points for groups acting on the plane*. [arXiv:1103.5060](https://arxiv.org/abs/1103.5060).
- [19] Plante, Joseph F. Fixed points of Lie group actions on surfaces. *Ergodic Theory Dynam. Systems* **6** (1986), no. 1, 149–161.
- [20] Viterbo, Claude. Symplectic topology as the geometry of generating functions. *Math. Ann.* **292** (1992), no. 4, 685–710.

P. LE CALVEZ, UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE, FRANCE

S. FIRMO, UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE, BRÉSIL

T. MIERNOWSKI, UNIVERSITÉ DE AIX-MARSEILLE II, FRANCE