

于锦海,万晓云. 引力梯度归算的模拟计算. 地球物理学报, 2011, **54**(5): 1182~1186, DOI: 10. 3969/j. issn. 0001-5733. 2011. 05. 006

Yu J H, Wan X Y. Reduction for gradiometry and corresponding imitation. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 2011, **54**(5): 1182~1186, DOI: 10. 3969/j. issn. 0001-5733. 2011. 05. 006

引力梯度归算的模拟计算

于锦海^{1,2}, 万晓云^{1,2}

1 中国科学院研究生院地球科学学院, 北京 100049

2 中国科学院计算地球动力学实验室, 北京 100049

摘 要 引入引力梯度不变量后可将 GOCE 卫星观测数据简化成扰动位的径向二阶导数边界条件, 由于卫星轨道不规则性给解算带来了很大的困难, 因此解算过程中需要将轨道上建立的边界条件延拓到如平均球面这样的规则曲面上来, 由此便需要对引力梯度的延拓或归算等问题展开研究. 本文依据 Taylor 展开讨论了引力梯度的归算方法, 并针对 EGM2008 模型进行了模拟计算, 结果表明本文给出的归算方法便于实施, 提高精度效果明显, 能有效地恢复引力场的位系数. 顾及到 GOCE 引力梯度数据的实际观测精度, 建议实施二次归算.

关键词 GOCE 卫星计划, 引力梯度不变量, 卫星轨道, 引力梯度归算

DOI: 10. 3969/j. issn. 0001-5733. 2011. 05. 006

中图分类号 P223

收稿日期 2010-05-19, 2011-04-26 收修定稿

Reduction for gradiometry and corresponding imitation

YU Jin-Hai^{1,2}, WAN Xiao-Yun^{1,2}

1 College of Earth Science, Graduate University of Chinese Academy Sciences, Beijing 100049, China

2 Laboratory of Computational Geodynamics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China

Abstract The boundary conditions for the second derivative of the disturbed potential along radial direction can be established on the satellite orbit from GOCE's gravitational gradient measurements after introducing the invariants of the gradient tensor. Because of the irregularity of the orbit surface, it is necessary to extend the boundary conditions on the orbit surface onto some regular surface such as the average sphere of the orbit. Some continuation methods of gradiometry are proposed with the help of Taylor expansion in the paper, and simulations are done for EGM2008 model. The computational results illustrate that the given continuation algorithm can efficiently correct the boundary values on the orbit surface and recover the spherical harmonic coefficients of the gravitational field. Considering applications in dealing with GOCE data, it is suggested to do twice gradiometry reductions consecutively.

Keywords GOCE mission, Invariants of gradiometry, Satellite orbit, Reduction for gradiometry

1 引 言

GOCE (Gravity field and steady-state Ocean

Circulation Explorer) 卫星计划主要目标之一就是利用引力梯度观测值去解算地球引力场(或重力场). 由于 GOCE 中出现了一类新型的观测量, 即: 引力梯度, 所以如何处理 GOCE 数据便成了当前地

基金项目 中国科学院资环局专项项目(XMXX280730)资助.

作者简介 于锦海, 男, 1961 年生, 理学博士, 现为中国科学院研究生院地球科学学院教授, 博士生导师. 主要从事大地测量与地球重力学等方面的教学和研究工作. E-mail: yujinhai@gucas. ac. cn

球引力场研究的热点工作之一. 对 GOCE 数据处理的研究工作可归纳为下列几个方面: GOCE 引力梯度数据预处理方法和精度分析^[1,2]; 计算 GOCE 卫星轨道的方法^[3,4]; 利用 GOCE 数据来确定引力场的方法以及相应的精度分析等^[5-8].

在利用 GOCE 数据去解算引力场位系数的方法中较为常见的途径是“法方程方法”, 其过程可归结为几个步骤^[9-13]: 首先是利用卫星姿态建立某已知坐标系与梯度仪坐标系 (GRF) 之间的转换关系; 其次是利用 GRF 中的引力梯度观测值建立关于地球引力场位系数的观测方程组; 最后是对方程组进行求解. 法方程方法中的核心技术是大型方程组的解算, 这显然是相当复杂的工作.

近来出现了利用引力梯度张量的不变量建立观测方程的方法^[14,15], 此时得到的观测方程是扰动位在轨道上的二阶径向导数边界条件, 该边界条件的形式简单, 适合于利用边值问题的途径来解算引力场的位系数. 但由于边值问题应用的前提是边界面应该是球面, 因此需要将卫星轨道面上建立的边界条件延拓到相应的平均球面上来, 这就产生了引力梯度的归算问题.

为了便于叙述引力梯度归算的重要性, 现列举不变量方法的主要结论如下^[14]: 记 v 是地球引力位, V 是正常引力位 (是 v 足够好的近似, 例如: V 可取为 EGM2008 引力场模型等), $T = v - V$ 是扰动位, S 表示 GOCE 卫星的轨道面, 通过引入引力梯度不变量后, 可以在轨道 S 上得到

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \right|_S = f, \quad (1)$$

这里 f 是与 V 和 v 在卫星轨道上梯度值相关的不变量函数 (简称为不变量扰动, 公式 (1) 的具体证明见文 [14] 中公式 (8) 和 (9)).

公式 (1) 是利用不变量方法导出的观测方程, 也可以理解成是轨道上关于扰动位的边界条件. 对于如何从公式 (1) 去求解扰动位 T , 显然边值问题的途径要比针对位系数的大型方程组的解算更为有效. 由于利用球谐调和解析时要求边界面是球面, 所以本文的工作就是研究如何将 GOCE 卫星轨道 S 上的边界条件 (1) 延拓到轨道的平均球面上以及对延拓的精度作出客观的评价, 其结论对于实际处理 GOCE 数据有着直接的作用.

2 延拓方法

由于 GOCE 卫星的轨道是近圆周的 (扁心率约

为 10^{-3}), 所以 S 的形状是接近于球面的. 取 Σ 是与 S 在某种意义上最吻合的球面, 例如: 可以将 S 上每点至地心的距离的平均值取为 Σ 的半径, 这样便能得到所需的球面 Σ . 记 P 是 S 上任意一点, 而 Q 是 Σ 上沿半径方向与 P 的对应点, $r_{QP} = r_P - r_Q$ (这里 r_P 和 r_Q 分别是 P 和 Q 到地心的距离), 则利用 Taylor 展开定理, 便有

$$\frac{\partial^2 T(P)}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 T(Q)}{\partial r^2} + \frac{\partial^3 T(Q)}{\partial r^3} r_{QP}, \quad (2)$$

这里仅保留了 r_{QP} 的一次项 (如果需要的话, 可保留至 r_{QP} 的二次或更高次项). 代入公式 (1) 后便得

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \right|_{\Sigma} = f - \frac{\partial^3 T(Q)}{\partial r^3} r_{QP}, \quad (3)$$

公式 (3) 是球面 Σ 上的边界条件, 该公式是基于 Taylor 展开而导出的延拓方法.

由于扰动位 T 是待求的量, 因此在实际计算过程必须消除公式 (3) 中右边显含 T 的项. 下面介绍两种基于公式 (3) 的实用算法.

2.1 基于扰动位的迭代方法

该算法的基本形式是: 取 $T_0 = 0$, 以及 $j > 1$ 时

$$\begin{cases} \Delta T_j = 0, \\ \left. \frac{\partial^2 T_j}{\partial r^2} \right|_{\Sigma} = f - \frac{\partial^3 T_{j-1}}{\partial r^3} r_{QP}. \end{cases} \quad (4)$$

由此便能逐步解出扰动位.

2.2 基于正常引力位的迭代方法

一般而言, 正常引力位 V 的选取原则是尽可能地逼近实际地球的引力位 v . 若第 j 次迭代时正常引力位是 V_j , 可以认为 V_j 是 v 足够好的近似, 此时按照正常引力位 V_j 和 v 的梯度计算出不变量扰动 f_j , 便得关于扰动位的边值问题:

$$\begin{cases} \Delta T^{(j)} = 0, \\ \left. \frac{\partial^2 T^{(j)}}{\partial r^2} \right|_{\Sigma} = f_j. \end{cases} \quad (5)$$

求解问题 (5), 可得 $T^{(j)}$. 接着继续迭代的形式是: 令 $V_{j+1} = V_j + T^{(j)}$, 然后重复进行即可.

需要说明的是: 基于正常引力位的迭代方法的本质是将地球引力位 v 从 S 延拓到 Σ 时所需计算的三阶导数值等同于正常引力位对应的三阶导数值. 这样处理的理由是 v 为待求的量, 从而其三阶导数值是未知的, 所以延拓过程中必须用某个已知的值替代, 自然逐步逼近的正常引力位对应的三阶导数值就成为了选择. 另外, 对于给出的两种迭代方法, 尽管其形式不同, 但原理是一致的, 这是因为本质上它们都是基于 Taylor 展开式 (3) 而产生的.

在完成了将轨道面 S 上的引力梯度不变量扰

动延拓至相应的平均球面上后,可以运用典型的球谐调和解析的方法计算出地球引力场 v 的位系数,从而完成利用 GOCE 观测数据解算地球引力场或者重力场的工作.

3 算 例

本节将采用模拟的方法研究引力梯度延拓以及恢复引力场位系数的精度.

3.1 Legendre 函数及导数的计算

无论是开展 GOCE 数据的实际处理、还是进行模拟计算,都会涉及到 Legendre 函数及其导数的计算问题.事实上,引力梯度的计算与 Legendre 函数的二阶导数有关,而梯度的延拓则需要进行 Legendre 函数三阶导数(甚至四阶)的计算.本文中引用的延拓是基于公式(2)的,因此需要研究 Legendre 函数以及一阶、二阶和三阶导数的计算方法.

本文中对于 Legendre 函数的计算采用标准的向前迭代法,即:

$$\bar{P}_{nm} = \begin{cases} W_m \sin\theta \bar{P}_{n-1,n-1}, & m = n \\ W_{nm} \cos\theta \bar{P}_{n-1,n-1}, & m = n-1 \\ W_{nm} [\cos\theta \bar{P}_{n-1,m} - W_{n-1,m}^{-1} \bar{P}_{n-2,m}(\cos\theta)], & m \leq n-2 \end{cases} \quad (6)$$

这里 $\bar{P}_{nm}(t)$ 是规则化后的 Legendre 函数, $0 \leq \theta \leq \pi$ 是余纬,记号 $\bar{P}_{nm} = \bar{P}_{nm}(\cos\theta)$,

$$\bar{P}_{nm}(t) = \sqrt{(2 - \delta_{0,m})(2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} \times (1-t^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(t)}{dt^m}, \quad (7)$$

以及

$$W_{nm} = \begin{cases} \sqrt{\frac{2n+1}{2n}}, & n = m \\ \sqrt{\frac{(2n-1)(2n+1)}{(n-m)(n+m)}}, & n \neq m \end{cases} \quad (8)$$

而 $P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n [(t^2-1)^n]}{dt^n}$ 是 n 阶 Legendre 多项式.

Legendre 函数导数的计算将采用下列公式:

$$\frac{dP_{nm}(\cos\theta)}{d\theta} = -\frac{1}{2} P_{n,m+1}(\cos\theta) + \frac{1}{2} (n+m) \times (n-m+1) P_{n,m-1}(\cos\theta). \quad (9)$$

这里 $P_{nm}(t) = (1-t^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(t)}{dt^m}$ 是 n 阶 m 次

Legendre 函数.若对公式(9)中的 Legendre 函数 $P_{nm}(t)$ 进行规则化,则得

$$\frac{d\bar{P}_{nm}}{d\theta} = \begin{cases} -\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} \bar{P}_{n,1}, & m = 0 \\ \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} \bar{P}_{n,0} - \sqrt{\frac{(n-1)(n+2)}{2}} \bar{P}_{n,2}, & m = 1 \\ \frac{\sqrt{(n+m)(n-m+1)} \bar{P}_{n,m-1} - \sqrt{(n-m)(n+m+1)} \times \bar{P}_{n,m+1}, & 1 < m < n \\ \sqrt{\frac{n}{2}} \bar{P}_{n,n-1}. & m = n \end{cases} \quad (10)$$

公式(10)便是 Legendre 函数导数的计算公式,循环使用能够计算 Legendre 函数的高阶导数.利用公式(10)计算 Legendre 函数各阶导数的优点在于能有效地避免地球两极附近的奇异性,从而提高 Legendre 函数导数的计算精度^[16].

3.2 算例与精度评估

本文将对边界条件(1)进行模拟延拓计算.模拟对象取为 EGM2008 引力场模型的前 300 完整阶次,即:

$$v = \frac{GM}{r} \left[1 + \sum_{n=2}^{300} \left(\frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (A_{nm}^{(08)} \cos m\lambda + B_{nm}^{(08)} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos\theta) \right]. \quad (11)$$

这里 GM 是地球的万有引力质量常数, a 是赤道半径, λ 是经度,而 $A_{nm}^{(08)}$ 和 $B_{nm}^{(08)}$ 是 EGM2008 模型中给出的位系数.因为 GOCE 卫星轨道的高度大约离地面 250 km,扁心率约为 10^{-3} ,考虑到轨道的不规则的特点,所以将卫星轨道的径向摆动适当放大,即假设轨道面 S 是下列椭球面:

$$S: \frac{x_1^2 + x_2^2}{a_0^2} + \frac{x_3^2}{b_0^2} = 1. \quad (12)$$

这里, $a_0 = 6620.0$ km, $b_0 = \sqrt{1-\epsilon^2} a_0$, $\epsilon = 3 \times 10^{-3}$,即:轨道 S 相对于平均球面的摆动比实际 GOCE 卫星轨道增加了 3 倍.由此可知,轨道面 S 对应的平均球面是 $\Sigma = \{r = R_0\}$,其中 $R_0 = \sqrt[3]{1-\epsilon^2} a_0$.对轨道面 S 按经纬度 $30' \times 30'$ 进行格网化,然后利用前面给出的关于 Legendre 函数及导数的算法在格网交叉点上计算 v 的二阶导数与引力梯度不变量^[7].

将 EGM96 模型的前 60 完整阶次取为正常引力位 V ,即:

$$V = \frac{GM}{r} \left[1 + \sum_{n=2}^{60} \left(\frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (A_{nm}^{(96)} \cos m\lambda + B_{nm}^{(96)} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos\theta) \right]. \quad (13)$$

同样在上述格网上计算对应于 V 的梯度值, 是在 S 上便有不变量扰动 f 以及边界条件(1). 注意此时的边界条件(1)是在卫星轨道面 S 的 $30' \times 30'$ 格网上得到的, 而 S 不是球面, 因此通常的球谐分析方法不能使用. 若要使用球谐分析从条件(1)来解算扰动位, 就必须将边界条件(1)归算到球面 Σ 上.

为了能够反映出归算的实际精度, 令 $T = v - V$ 是扰动位, 并在球面 Σ 对应的 $30' \times 30'$ 格网上计算 $\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \Big|_{\Sigma}$ 的真值, 记为 F , 即: $F = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \Big|_{\Sigma}$. 本文采用基于正常引力位的迭代方法对边界条件(1)在球面 Σ 对应的 $30' \times 30'$ 格网上进行了归算. 记第 j 次归算后的结果为 $\frac{\partial^2 T^{(j)}}{\partial r^2} \Big|_{\Sigma}$, 令

$$\delta_j = \left| F - \frac{\partial^2 T^{(j)}}{\partial r^2} \Big|_{\Sigma} \right|, \quad (14)$$

则 δ_j 表示了进行 j 次引力梯度归算后的精度, 特别 $j=1$ 时

$$\delta_1 = |F - f|_{\Sigma} = \left| F + \frac{1}{3} \frac{r^3}{(GM)} \Delta B \right|, \quad (15)$$

其表示的含义是引力梯度没有进行归算时产生的误差. 利用 S 的 $30' \times 30'$ 格网上不变量 f 的值, 在 Σ 的 $5^\circ \times 5^\circ$ 格网点上分别计算了 δ_1, δ_2 和 δ_3 的值, 其主要统计指标列在表 1 中.

从表 1 中的主要统计结果可知, 依据 Taylor 公式给出的归算方法(3)能有效地提高轨道平均球面上的引力梯度归算值的精度, 每次归算大致能提高一个量级的精度. 事实上, 归算过程中收敛的程度与轨道至平均球面的距离有关, 即: 若在轨卫星的位置与轨道平均球面相距越远, 则归算收敛就越慢; 反之, 相距越近, 则归算收敛就越快. 就 GOCE 卫星计划而言, 根据其轨道设计的特点, 预计至多进行 2 次归算便能达到梯度观测精度 3mE 的要求 ($1 \text{ mE} = 10^{-12} \text{ s}^{-2}$).

表 1 归算后引力梯度误差的主要统计值 (单位: $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$)

Table 1 The main statistical values for δ_j (Unit: $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$)

| 计算点数 | 最大值 | 平均值 | 标准差 | |
|------------|------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| δ_1 | 2592 | 4.15×10^{-11} | 3.87×10^{-12} | 5.18×10^{-12} |
| δ_2 | 2592 | 4.99×10^{-12} | 3.23×10^{-13} | 5.56×10^{-13} |
| δ_3 | 2592 | 1.865×10^{-13} | 1.199×10^{-14} | 2.212×10^{-14} |

为了深入讨论引力场位系数恢复计算的精度问题, 我们分别利用已经得到的归算前后引力梯度的值对 EGM2008 模型前 300 完整阶次的位系数进行了恢复计算, 即: 分别就 $j=1, 2, 3$ 的情况对边值问题(5)进行了计算, 从而还原 EGM2008 的前 300 阶位系数. 逐次对 $j=1, j=2$ 和 $j=3$ 的情况, 经计算分别得到了模拟引力位 v 的逐步逼近解:

$$v_j = \frac{GM}{r} \left[1 + \sum_{n=2}^{300} \left(\frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (A_{nm}^{(08),j} \cos m\lambda + B_{nm}^{(08),j} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos\theta) \right], \quad (j = 1, 2, 3) \quad (16)$$

图 1 描述了 v 的 Kaula 系数阶方差曲线以及 v_j 对 v 的位系数逼近阶方差. 阶方差描述如下: 若 v 的球谐展开式由公式(11)给出, 则

$$\zeta_n(v) = \sqrt{\frac{1}{2n+1} \sum_{m=0}^n [(A_{nm}^{(08)})^2 + (B_{nm}^{(08)})^2]} \quad (17)$$

是 v 的 n 阶方差, 其按阶数 n 给出的曲线称为 Kaula 系数阶方差曲线 (简称 Kaula 曲线或阶方差); 若 v 与 v_j 分别由公式(11)和(16)给出, 则

$$\zeta_n(v - v_j) = \sqrt{\frac{1}{2n+1} \sum_{m=0}^n [(A_{nm}^{(08)} - A_{nm}^{(08),j})^2 + (B_{nm}^{(08)} - B_{nm}^{(08),j})^2]} \quad (18)$$

称为 v_j 对 v 的 n 阶逼近阶方差, 其图解通常简称逼近阶方差. 根据公式(17)和(18)可知, Kaula 曲线描述了位系数随着阶数 n 的变化情况, 而逼近阶方差则刻画了两个调和函数位系数的近似程度.

从图 1 可知, 若对轨道上引力梯度不进行归算 ($j=1$ 的情况), 则还原位系数的阶数达到 250 阶;

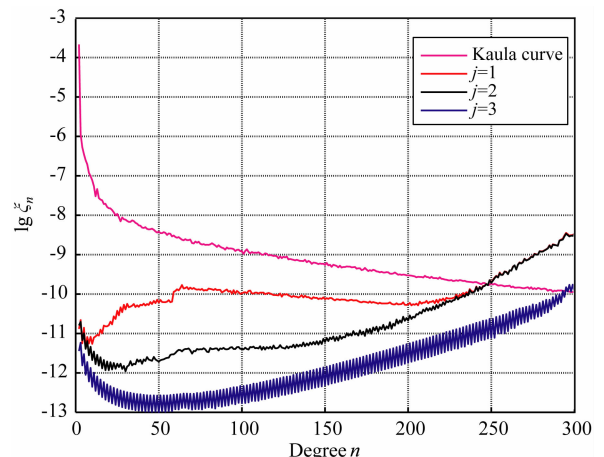


图 1 恢复的引力场位系数的阶方差
Fig. 1 The degree deviation distributions for recovered coefficients

进行了一次归算后($j=2$ 的情况),虽然位系数恢复阶数仍维持在 250 阶左右,但系数的计算精度比 $j=1$ 时有明显提高;二次归算后($j=3$ 的情况)恢复位系数的阶数不仅达到了 300 阶,而且系数的计算精度有进一步的提高。

不断增加归算次数对提高引力场位系数的恢复精度有一定的影响,但这并不意味着处理实际 GOCE 数据时归算次数越多就能将地球重力场或者引力场求解得越精确,其原因在于实测的引力梯度数据存在着一定的误差,该误差是无法通过归算等手段消除掉的,属于 GOCE 观测的固有误差。

4 结论与说明

本文基于 Taylor 展开公式提出了将卫星轨道上引力梯度不变量扰动归算到相应平均球面上的方法,并利用 EGM2008 模型对上述归算方法以及位系数恢复进行了模拟计算,结果表明,经过一次归算基本上能达到 GOCE 引力梯度的观测精度(3 mE)。但是考虑到计算误差等原因,建议对 GOCE 实际观测数据时做两次循环归算。

为了计算方便,本文将卫星轨道面取成了椭球面。尽管实际的 GOCE 轨道面比椭球面要复杂,但本文计算中所取的延拓距离比 GOCE 实际轨道的相应距离要大 3 倍左右,因此本文结论对处理 GOCE 数据是成立的。理由是延拓的精度主要取决于延拓的距离。

尽管本文没有处理实际的 GOCE 数据,但进行模拟归算或计算是十分必要的。因为只有在数值模拟的情况下才能正确评估归算或计算精度,以及对建立的理论方法进行验证。从所得的结果看,本文提出的归算方法是可用于实际 GOCE 数据处理的。

参考文献(References)

- [1] Bouman J, Koop R, Tscherning C C. Calibration of GOCE SGG data using high-low SST, terrestrial gravity data and global gravity field models. *Journal of Geodesy*, 2004, **78**(1-2): 124~137
- [2] Bouman J, Rispens S, Gruber T, et al. Preprocessing of gravity gradients at the GOCE high-level processing facility. *Journal of Geodesy*, 2009, **83**(7): 659~678
- [3] Muzi D, Allasio A. GOCE: the first core Earth explorer of ESA's Earth observation program. *Acta Astronautica*, 2004, **54**(3): 167~175
- [4] Visser P, Van den IJssel J, Van Helleputte T, et al. Orbit determination for the GOCE satellite. *Advances in Space Research*, 2009, **43**(5): 760~768
- [5] Eshagh M, Abdollahzadeh M. The Effect of Geopotential Perturbations of Goce on Its Observations—a Numerical Study. *Acta Geodaetica Et Geophysica Hungarica*, 2009, **44**(4): 385~398
- [6] Bettadpur S V, Schutz B E, Lundberg J B. Spherical harmonic synthesis and least-squares computations in satellite gravity gradiometry. *Bulletin Geodesique*, 1992, **66**(3): 261~271
- [7] Klees R, Koop R, Visser P, et al. Efficient gravity field recovery from GOCE gravity gradient observations. *Journal of Geodesy*, 2000, **74**(7-8): 561~571
- [8] Milani A, Rossi A, Villani D. A timewise kinematic method for satellite gradiometry: GOCE simulations. *Earth Moon and Planets*, 2005, **97**(1-2): 37~68
- [9] Pail R, Plank G. Assessment of three numerical solution strategies for gravity field recovery from GOCE satellite gravity gradiometry implemented on parallel platform. *Journal of Geodesy*, 2002, **76**: 462~474
- [10] Ditmar P, Kusche J, Klees R. Computation of spherical harmonic coefficients from gravity gradiometry data to be acquired by the GOCE satellite: Regularization issues. *Journal of Geodesy*, 2003, **77**: 465
- [11] Petrovskaya M S, Vershkov A N. Non-singular expressions for the gravity gradients in the local north-oriented and orbital reference frames. *Journal of Geodesy*, 2006, **80**: 117~127
- [12] 吴星,张传定. 卫星重力梯度分量的广义轮胎调和解析. *测绘学报*, 2009, **38**:101~107
Wu X, Zhang C D. Generalized torus harmonic analysis of satellite gravity gradients component. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica* (in Chinese), 2009, **38**:101~107
- [13] Cunderlik R, Mikula K, Mojzes M. Numerical solution of the linearized fixed gravimetric boundary-value problem. *Journal of Geodesy*, 2008, **82**(1):15~29
- [14] Yu Jinhai, Zhao Dongming. The gravitational gradient tensor's invariants and the related boundary conditions. *Sci China Earth Sci (Ser-D)*, 2010, **53**:781~790
- [15] Baur O, Sneeuw S, Grafarend E W. Methodology and use of tensor invariants for satellite gravity gradiometry. *Journal of Geodesy*, 2008, **82**:279~293
- [16] 于锦海,万晓云. 计算 Legendre 函数导数的非奇异方法. *测绘科学技术学报*, 2010, **27**(1): 1~3
Yu J H., Wan X Y. Non-Singular Formulae for Computing Derivatives of Legendre Functions. *Journal of Geomatics Science and Technology* (in Chinese), 2010, **27**(1):1~3