二层线性规划问题的优面算法

徐裕生　叶提芳
（西安建筑科技大学理学院　西安　710055）
(email:doyoulo0202@sina.com)

摘要　本文研究了二层线性规划问题的优面算法。首先给出了二层线性规划的数学描述；接着给出了二层线性规划问题的优面算法设计，并给出二层线性规划问题优面算法的步骤，最后通过实例验证了本文提出的二层线性规划优面算法的有效、简洁特性，并且上机操作简便，显示出较大的优越性。

关键词　二层线性规划　优面法　超平面
中图法分类号　O221.6　　文献标识码　A

0　引言

二层线性规划是二层系统的基本类型之一。近几十年来，二层规划的研究得到了很大发展，$Bard$[1] 和 $Dempe$[2] 的专著讨论了二层规划问题的算法和应用。$Dempe$[3] 综述了带有等式约束的二层规划和数学规划的文献。以及 Liu, Mathieu, Pittard, Anandalingam, 还有 Crendreau, Marcotte 和 Savard, Wen, Huang 等在二层规划问题方面都做了许多工作

优面算法[4] 是求解线性规划问题的新算法，它是从最优解所在的超平面出发，经过旋转迭代，降低线性规划维数，最后变成一个一维线性规划，该过程最多旋转迭代 n 次。本算法简洁清晰，不增加空间维数，特别是当约束条件较多的时候，更会显示出它的优越性。本文将此算法应用到二层线性规划的求解上，与传统方法相比，此法更简洁，易操作，运算速度快。

1　二层线性规划问题的数学描述

Candler 和 Aownsley 提出了一般的二层线性规划的数学模型[5]。在这里我们考虑下面形式的二层线性规划问题。

（P1）　$$\max F(x,y)=a^T x+b^T y$$

其中 y 是下面问题的解

（P2）　$$\begin{aligned}&\max F(x,y)=c^T x+d^T y\\ &s.t. Ax+By\le r\\ &x,y\ge 0\end{aligned}$$

其中 $a,c,x\in R^{n_1}, b,d,y\in R^{n_2}, r\in R^m$ 分别表示相应维数的列向量。$A\in R^{m\times n_1}, B\in R^{m\times n_2}$ 。

对于二层线性规划问题，称集合 $S=\{(x,y):Ax+By\le r, x,y\ge 0\}$ 为它的约束区域。这里我们假定 S 非空并且有界。称 $x\in R^{n_1}$，且 $x\ge 0$ 为可行的，如果存在 $y\in R^{n_2}, y\ge 0$，使得 $(x,y)\in S$，对于

陕西教育厅专项科研基金资助项目（03jk065）；西安建筑科技大学基础研究基金资助项目（DD12006）；

固定可行的 x，下层目标函数中的 $c^T x$ 为常数，因此下层目标函数可以简单的表示为 $f = d^T y$。令 $Q(x) = \{y : By \le r - Ax, y \ge 0\}$ 非空并且有界。我们假定问题 $\max\limits_{y \in Q(x)} f = d^T y$ 的最优解存在且唯一，记为 $y(x)$，则二层规划问题的合理反映集为：

$$\Phi_f(S) = \{(x,y) : (x,y) \in S, y = y(x)\}$$

因此问题（P1）（P2）可转化为：

$$\text{（P3）} \quad \begin{aligned} &\max F(x,y) = a^T x + b^T y \\ &s.t. Ax + By \le r \\ &y = y(x) \end{aligned}$$

那么，如果 (x,y) 是

$$\begin{aligned} &\max F(x,y) = a^T x + b^T y \\ &s.t. Ax + By \le r \end{aligned}$$

的解，并且 $y = y(x)$，则 (x,y) 是问题（P1）的解。

下面给出二层线性规划问题的解的定义：

定义 1.1 称 $(x,y) \in S$ 为可行点，如果 $(x,y) \in \Phi_f(S)$。

定义 1.2 称 $(x,y) \in \Phi_f(S)$ 为二层线性规划问题的最优解（简称解），如果对于每个 $(x,y) \in \Phi_f(S)$，有 $F(x^*, y^*) \ge F(x,y)$。

本文将在二层线性规划的这个解概念下讨论二层线性规划问题求解的数值方法。

2 二层线性规划问题的优面算法设计

首先我们简要给出线性规划的优面算法介绍。

考虑如下形式的线性规划问题 $Max\{Z = CX : AX \le B, X \ge 0\}$，其中 $C = (c_1, c_2, \cdots, c_n), X = (x_1, x_2, \cdots x_n)^T, A = (a_{ij})_{m \times n}, B = (b_1, b_{2,} \cdots b_n)^T$.

我们称为优面标准形，简记为（OPLP）。其第 k 个约束条件就对应着有向超平面[4] p_k，简记为 $\bar{p}_k$。

定义 2.1 称有向超平面 $\bar{p}_s$ 和 $\bar{p}_r$ 的法方向所成的角 $\theta = \arccos \dfrac{[a_s, a_r]}{\|a_s\|_2 \|a_r\|_2}$ 为有向超平面 $\bar{p}_s$ 和 $\bar{p}_r$ 的夹角。

定义 2.2 如果（OPLP）的最优解 x^* 使约束 $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{kj} x_j \le b_k$ 取等号，且超平面 $\bar{p}_k$ 是可行域 Ω 的边

界面，称超平面 $\bar{p}_k$ 为 x^* 的优面。

优面算法适合于相容不等式约束的线性规划，我们可用如下引理判别不等式约束是否相容。

引理 2.1 $AX \le b$ 不相容的充分必要条件是线性规划 $Min\left\{y^T b : y^T A = 0, y \ge 0\right\}$ 无解。

关于优面的存在性及其判断，以及最优解与优面之间的关系，有如下定理：

引理 2.2 设 x^* 为（ＯＰＬＰ）非零最优解，z_0 为最优值，则 $z_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ 为 Ω 的承托超平面[4]，x^* 为支撑点，且 x^* 必使某一约束取等号。

引理 2.3 设（ＯＰＬＰ）的最优解为 x^*，$\bar{p}_k$ 是可行域 Ω 的边界超平面[4]中与目标超平面[4]的夹角最小的超平面，则 x^* 能使 $\sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j \le b_k \left(1 \le k \le m\right)$ 成为紧约束，此时记超平面 $\bar{p}_k$ 为 x^* 的优面。

根据以上定义和引理，我们在求优面过程中，取 $\sigma = \dfrac{[a_k, c]}{\|a_k\|_2}$ 中最大者所对应的超平面 $\bar{p}_k$ 作为优面。

下面我们给出二层线性规划问题的优面算法设计。

设二层多目标规划问题为

（P1） $\max F\left(x, y\right) = a^T x + b^T y$

其中 y 是下面问题的解

（P2）
$$\begin{aligned} &\max F\left(x, y\right) = c^T x + d^T y \\ &s.t. Ax + By \le r \\ &x, y \ge 0 \end{aligned}$$

其中 $a, c, x \in R^{n_1}, b, d, y \in R^{n_2}, r \in R^m$ 分别表示相应维数的列向量，$A \in R^{m\times n_1}, B \in R^{m\times n_2}$。

对于它的优面算法求解我们给出如下定理：

定理 2.1 对于二层线性规划问题，如果下层问题（P2）的约束为相容不等式约束，则可使用优面算法求得该二层线性规划问题的最优解 x^*, y^*。

证明：对于二层线性规划问题的下层问题（P2），把其中的 $c^T x$ 看作常量，则可认为它属于只含变量 y 的单层线性规划，因为约束为相容不等式约束，我们取 $\sigma = \dfrac{[a_k, c]}{\|a_k\|_2}$ 中最大者所对应的超平面 $\bar{p}_k$ 作为优面。设 y^* 为下层问题的可行域组成的非空凸多面集 Ω 的一个顶点，由引理 2.3 知 $\bar{p}_k$ 过 y^*，从而 y^* 使约束 $By \le r - Ax$ 为紧约束。设 f_0 为最优值，根据引理 2.2 可知 $f_0 = d^T y^*$ 为 Ω 的承托超平面，y^* 即为支撑点，且 y^* 使某一约束取等号，则 y^* 即是我们使用优面算法求得的最优解，它是由 x 表示的量，返回到

上层问题（P1）中转化而得的不等式仍是相容的，重复优面算法步骤，即得最优解 x^*，反代入 y^* 中，最后即得其最优解。

以下是二层线性规划问题优面算法的步骤：

Step1 对于二层线性规划问题的下层问题（P2），把其中的 $c^T x$ 看作常量，将其化为优面标准型。

Step2 (1)计算该问题中的约束平面与目标平面的夹角；

(2)若 $\bar{p}_k$ 与目标超平面的夹角最小，且 $b_{kl} \neq 0\left(l=1,2,\cdots,n_2\right)$，从 $\sum_{j=1}^{n_2} b_{kj} y_j = r_k - \sum_{i=1}^{n_1} a_{ki} x_i$ 中解出 y_l，代入目标函数和其他约束中（作旋转变换进行降维），并把第 k 个约束变为 $\dfrac{r_k - \sum_{i=1}^{n_1} a_{ki} x_i - \sum_{j=1, j\neq l}^{n_2} b_{kj} y_j}{b_{kl}} \geq 0$，以保证 $y_j \geq 0$；

(3)重复(1)－(2)，直至剩下一个变量（记为 y_{n_2}）的线性规划，得最优解 y_{n_2}，再回代到前面的等式中得（P 2）的最优解 y，其中 y 是用 x 来表示的，记为 $y\left(x\right)$。

Step3 将下层最优解 $y = y\left(x\right)$ 返回到上层，得一只含变量 x 的线性规划，再对此问题利用如 step 2 中的(1)－(3)优面算法，得最优解，记为 x_{n_1}；

Step4 用 x_{n_1} 回代到前面等式中，求得 x^*, y^*，即为最优解。

3 数值实验

下面我们给出一个优面算法求解二层线性规划问题的例子：

例[5]：$\max\limits_{x\geq 0} F(x,y) = 8x_1 + 4x_2 - 4y_1 + 40y_2 + 4y_3$

其中是 y 下面问题的解

$$\begin{aligned}
&\max_{y\geq 0} f(x,y) = -x_1 - 2x_2 - y_1 - y_2 - 2y_3 \\
&s.t. - y_1 + y_2 + y_3 \leq 1\left(1\right) \\
&2x_1 - y_1 + 2y_2 - 0.5y_3 \leq 1\left(2\right) \\
&2x_2 + 2y_1 - y_2 - 0.5y_3 \leq 1\left(3\right)
\end{aligned}$$

解：先解决下层问题，把其中的 x 看做常量得下层问题的最优解为 $y\left(x\right) = \left(0, -\frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2, -2 + \frac{4}{3}x_1 + \frac{8}{3}x_2\right)$ 返回到上层，问题即转化为

$$\max_{x\ge 0} F=-\frac{40}{3}x_1+\frac{124}{3}x_2-8$$
$$\frac{2}{3}x_1+\frac{10}{3}x_2\le 3(1)$$
$$-x_1-2x_2\le -1.5(2)$$

再利用优面算法求得最优解 $x_1=0,x_2=0.9,$ 代入到 $y(x)=\left(0,-\frac{2}{3}x_1+\frac{2}{3}x_2,-2+\frac{4}{3}x_1+\frac{8}{3}x_2\right)$ 得原二层问题的最优解为 $(x_1,x_2,y_1,y_2,y_3)^T=(0,0.9,0,0.6,0.4)^T$

目标值为 $\max F=29.2,\max f=-3.2$

到此已求出最优解和目标函数值，由此可以看出该算法是可行有效的。

4 结束语

优面算法解二层线性规划，是先把 x 看作常量，对下层问题运用优面算法逐步降低线性规划维数，得到下层问题的最优解，然后返回到上层，继续使用优面算法即求得原二层规划问题的最优解。示例结果表明，该方法是可行并且有效的，简洁清晰，并且在求变量较多的大型二层线性规划问题中也是可行有效的，在机上也简单易操作，显示出很大的优越性。

参考文献

[1]Bard J F, Practical bilevel optimization: algorithms and applications[M]. Kluwer Academic Publishers, 1998;

[2]Dempe S. Foundations of bilevel programming[M]. Kluwer Academic Publishers, 2002;

[3]Dempe S. Annotated bibliography on bilevel programming and mathematical programs with equilibrium constraints[J]. Optimization, 2003, 52: 333-359;

[4]涂为员，线性规划的优面算法，南昌大学学报（理科版），2002，26（4）：320-322；

[5]Candler W, Townsley R. A linear two-level programming problem[J]. Computers and Operations Research, 1982, 9(1): 59-76;

Optimal Plane Algorithm for the Linear Bilevel Programming Problem

XuYusheng YeTifang

(College of science, Xi'an university of architecture and technology, Xi'an, 710055)

Abstract In this paper, we will make use of the optimal plane algorithm to solve the linear bilevel. First, we give the mathematics description of the linear bilevel programming problem. Second, we give the optimal plane algorithm designation of the linear bilevel programming problem. Finally, the examples are adopted to verify the effectiveness of the proposed method.

Key words linear bilevel programming; optimal plane algorithm; directed plane

徐裕生（1950—），男，西安建筑科技大学理学院教授，硕士研究生导师，主要从事最优化理论和不动点理论的研究；叶提芳（1982—），女，西安建筑科技大学理学院硕士研究生，专业方向：最优化算法研究。