第二章 单跨梁的弯曲理论

教学目的：

- 掌握梁的弯曲微分方程及其解；
- 熟练掌握梁的支座及边界条件、梁的弯曲要素计算；
- 掌握梁的复杂弯曲；
- 了解梁的内力计算、剪力对梁的弯曲变形的影响；

主讲教师：张延昌
Email:zyc0713@126.com

重点及难点：

- 符号法则、边界条件；
- 初参数法求梁的弯曲要素；
- 迭加法求梁的弯曲要素、画弯矩图；
- 辅助函数查表法。

主讲教师：张延昌
Email:zyc0713@126.com

本堂课主要内容

- 单跨梁弯曲微分方程式
- 初参数法求解弯曲微分方程式
- 支座的边界条件

主讲教师：张延昌
Email:zyc0713@126.com

§ 2-1 梁的弯曲微分方程式及其解

一、梁的弯曲微分方程

1、符号法则：

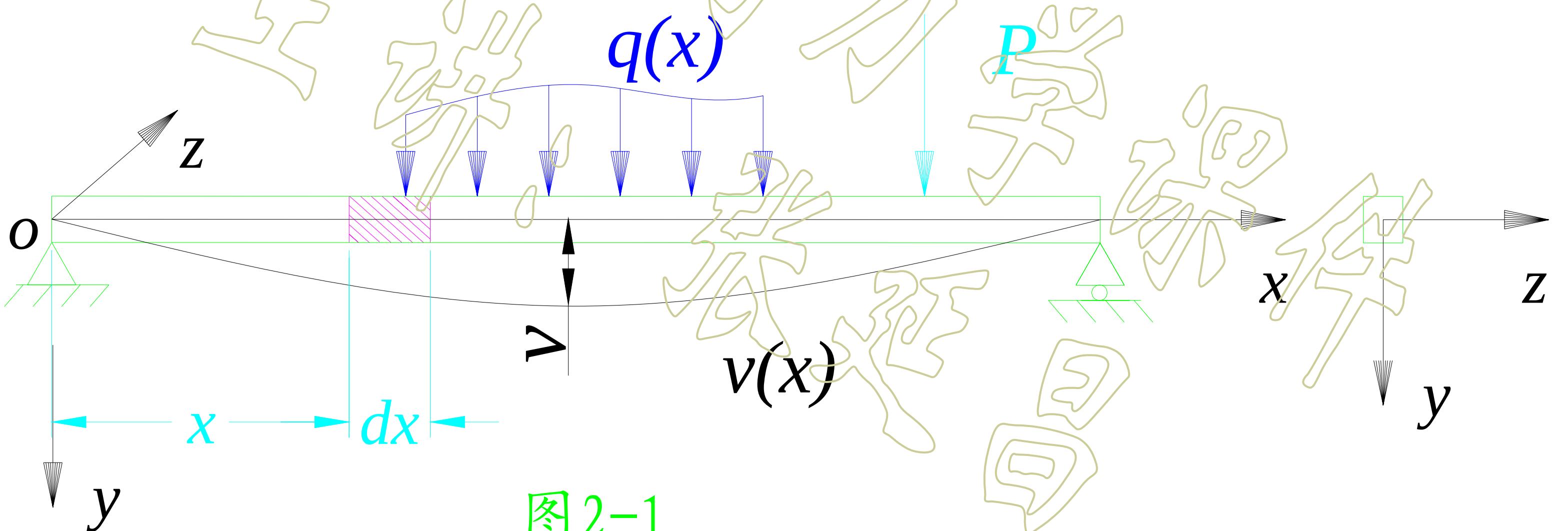


图2-1

主讲教师：张延昌
Email:zyc0713@126.com

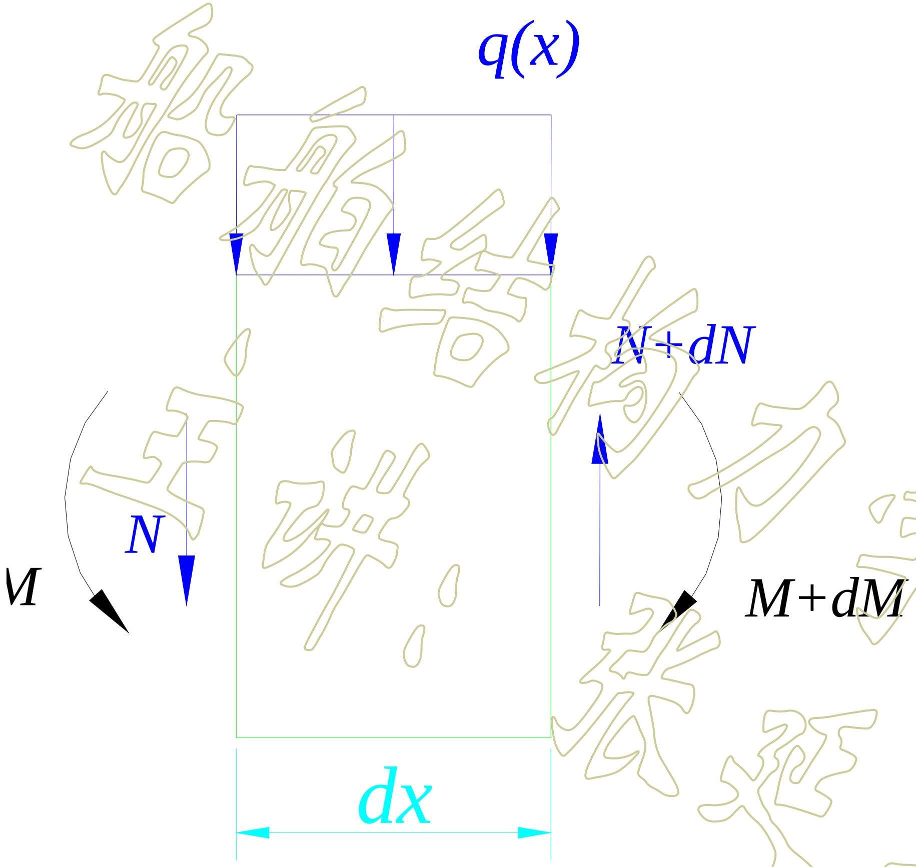
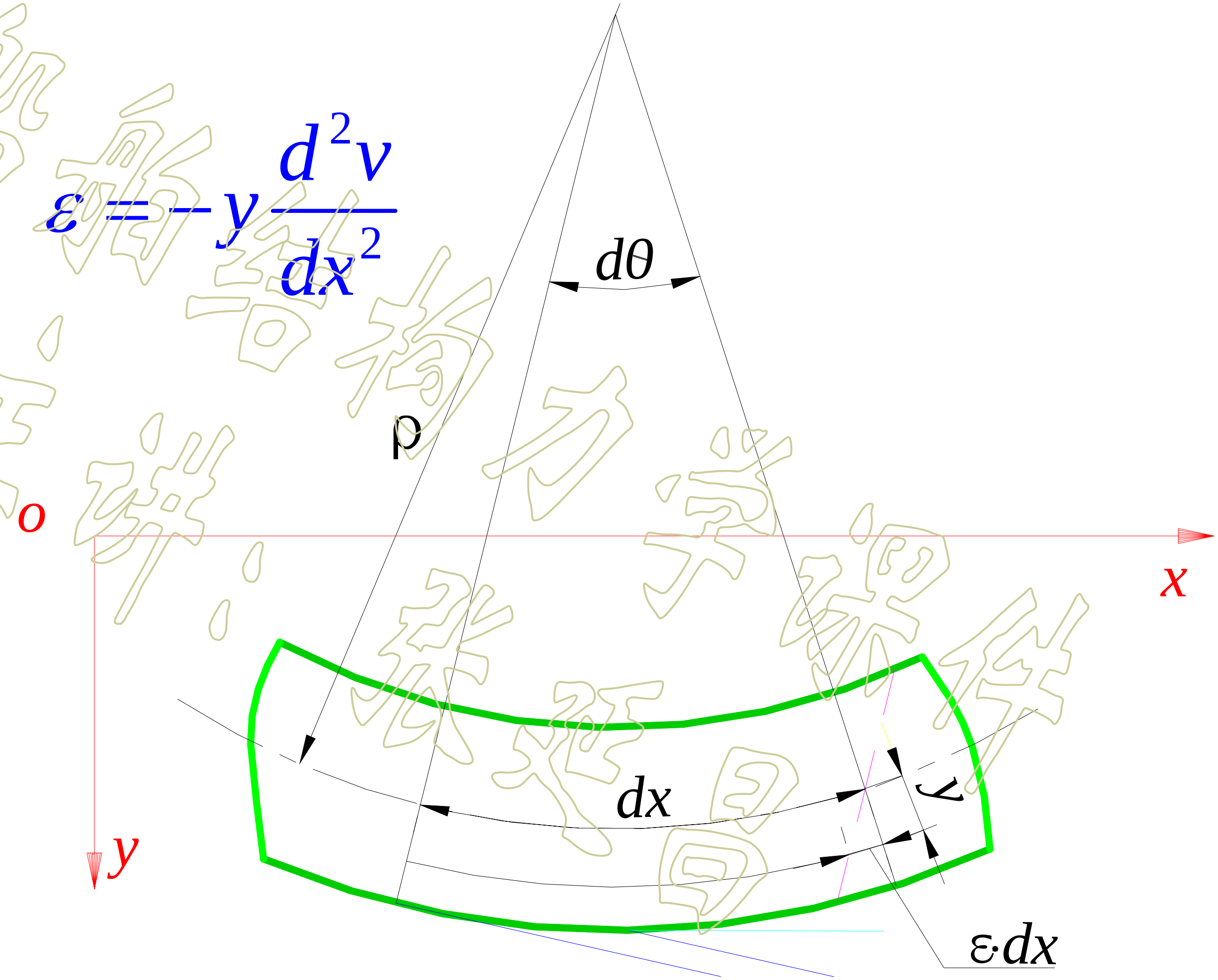


图2-3

主讲教师：张延昌
Email:zyc0713@126.com

2、基本假设：

➢ 小变形条件：$\varepsilon = -y\dfrac{d^2v}{dx^2}$



主讲教师：张延昌
Email:zyc0713@126.com

➢ 平断面假定

- 指梁在弯曲前的断面在弯曲后仍为平面，即忽略了剪应力引起的翘曲
- 翘曲：对于非圆截面杆件受扭矩时，横截面的周长将改变原来的形状，并不在同一平面内，因而发生翘曲

➢ 平面弯曲假设

- 载荷作用在梁的对称平面内，无斜弯和扭转，轴线为平面曲线

➢ 材料符合胡克定律

$$\Rightarrow \sigma = \varepsilon \cdot E = -Ey\frac{d^2 v}{dx^2}$$

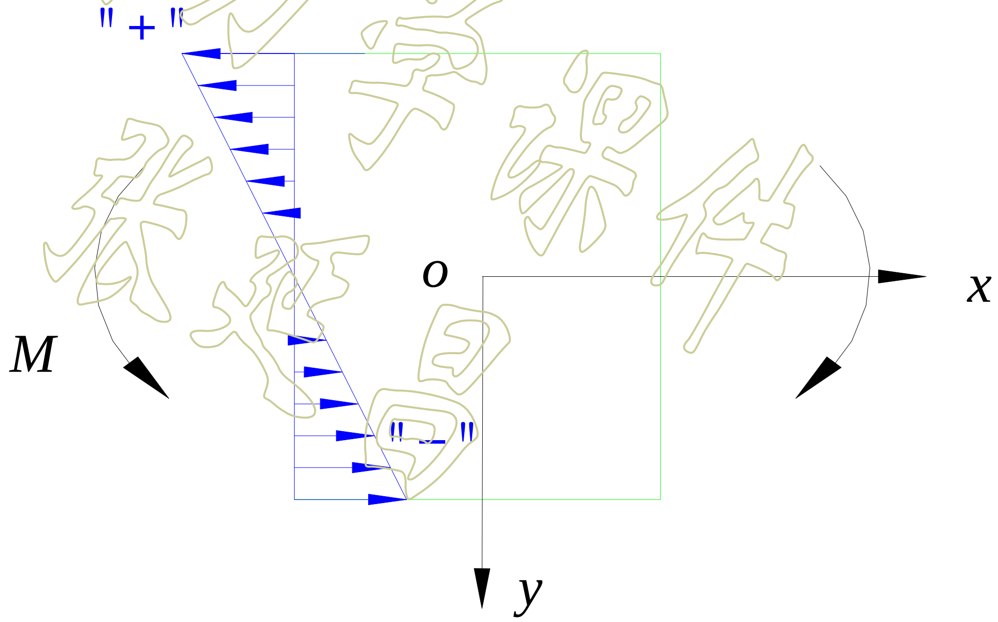
主讲教师：张延昌
Email:zyc0713@126.com

3、基本公式：

（1）、几何关系：$\varepsilon = \dfrac{y}{\rho} = -y \cdot v''$

（2）、物理关系：$\sigma = \varepsilon \cdot E = -E \cdot y \cdot v''$

（3）、静力学关系：$-\int_A y \cdot \sigma \cdot dA = M$ $\boxed{\Rightarrow EIv'' = M}$



3、基本公式：

（4）、平衡关系：

$$\sum Y = 0 \quad \Rightarrow \frac{dN}{dx} = q(x)$$

$$\sum M = 0 \Rightarrow \frac{dM}{dx} = N(x)$$

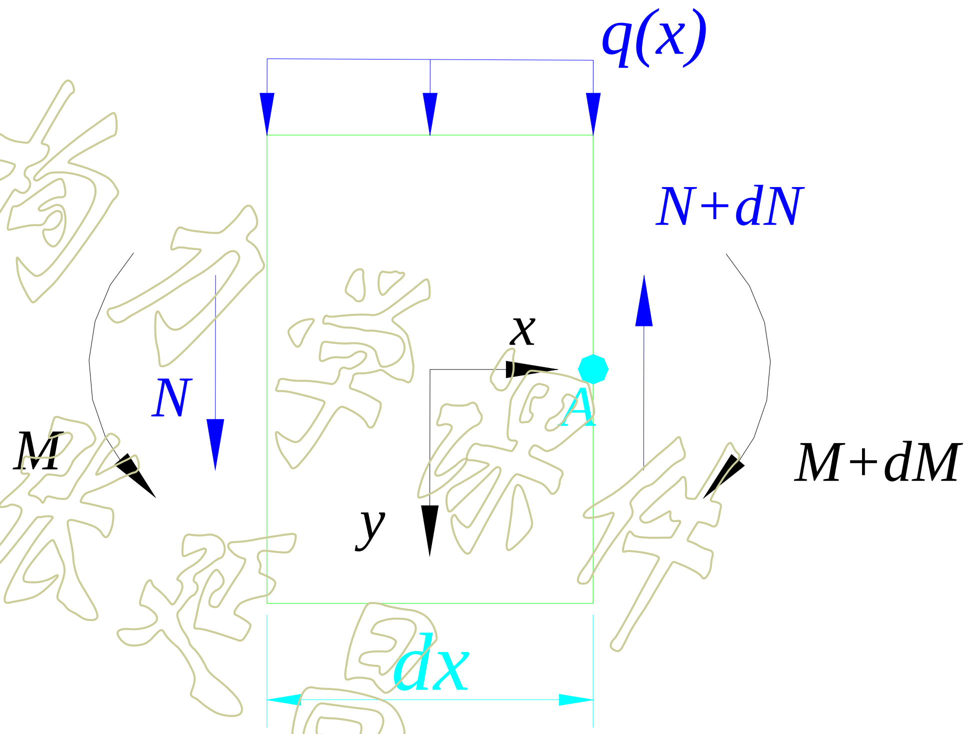


图2-3

主讲教师：张延昌
Email:zyc0713@126.com

3、基本公式：

（1）、几何关系：$\varepsilon = \dfrac{y}{\rho} = -y \cdot v''$

（2）、物理关系：$\sigma = \varepsilon \cdot E = -E \cdot y \cdot v''$

（3）、静力学关系：$-\int_A y \cdot \sigma \cdot dA = M$ $\Rightarrow EIv'' = M$

（4）、平衡关系：$\dfrac{dM}{dx} = N(x)$ $\Rightarrow$ $\dfrac{dN}{dx} = q(x)$

$$\frac{d^2(EIv'')}{dx^2} = q(x) \Rightarrow EIv^{(4)}(x) = q(x)$$

剪力 $N(x)$ 弯矩 $M(x)$ 转角 $\theta(x)$与挠度$v(x)$的关系：

$$\begin{cases} EIv^{(4)}(x) = q(x) \\ EIv'''(x) = N(x) \\ EIv''(x) = M(x) \\ v'(x) = \theta(x) \end{cases}$$

二、梁的弯曲微分方程 $EIv^{(4)}(x)=q(x)$ 的解

1、积分法：

$$v=\frac{1}{EI}\int_0^x\int_0^x\int_0^x\int_0^x q(x)dx^4+\frac{Ax^3}{6EI}+\frac{Bx^2}{2EI}+Cx+D$$

主讲教师：张延昌
Email:zyc0713@126.com

$$v=\frac{1}{EI}\int_0^x\int_0^x\int_0^x\int_0^x q(x)dx^4+\frac{Ax^3}{6EI}+\frac{Bx^2}{2EI}+Cx+D$$

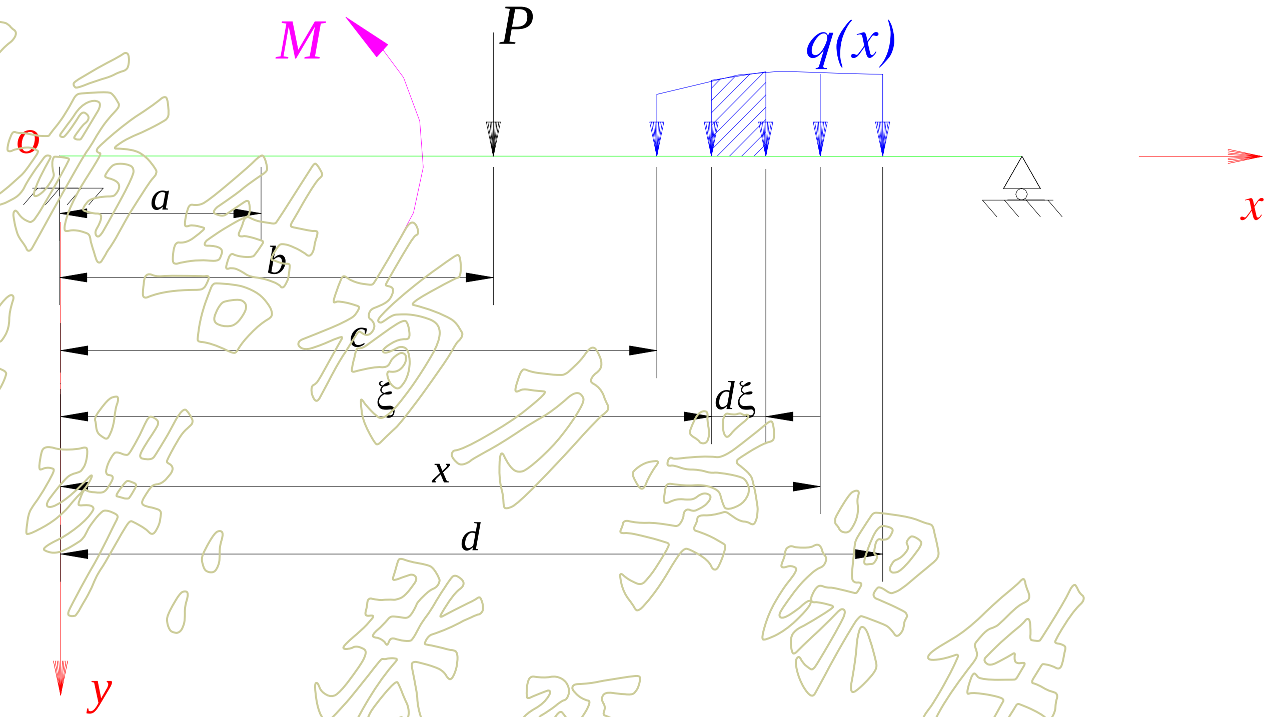
A、B、C、D 即为梁的 $x=0$ 端的弯曲要素

N_0、M_0、θ_0、v_0 ——初参数

梁的挠曲线方程可写为：

$$v(x)=v_0+\theta_0\cdot x+\frac{M_0}{2EI}x^2+\frac{N_0}{6EI}x^3+\frac{1}{EI}\int_0^x\int_0^x\int_0^x\int_0^x q(x)dx^4$$

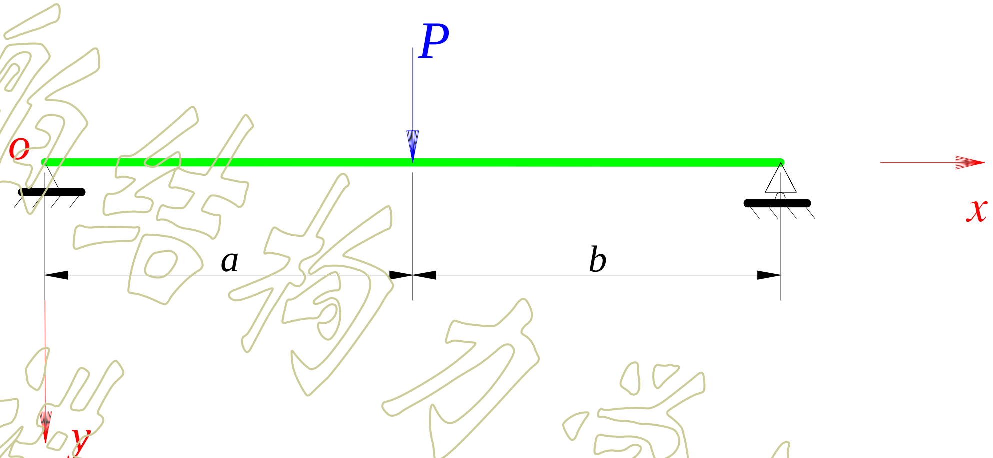
2、初参数法：



初参数法写挠曲线方程为：

$$v(x)=v_0+\theta_0 x+\frac{M_0x^2}{2EI}+\frac{N_0x^3}{6EI}+\Big\|_a\frac{M(x-a)^2}{2EI}+\Big\|_b\frac{P(x-b)^3}{6EI}+\Big\|_c\int_c^x\frac{q(\xi)(x-\xi)^3d\xi}{6EI}$$

例1、求图示单跨梁的挠曲线方程



主讲教师：张延昌
Email:zyc0713@126.com

§2-2 梁的支座及边界条件

1、几种船舶结构中常用的支座类型：

- 自由支持端（简支端）
- 刚性固定端
- 弹性支座
- 弹性固定端
- 完全自由端
- 一般情况

主讲教师：张延昌
Email:zyc0713@126.com

2、支座的边界条件

- 就是梁端弯曲要素的特定值或弯曲要素之间的关系。

(1)、自由支持端（简支端）

特点： 不允许梁端发生挠度，而对梁的转动无限制。

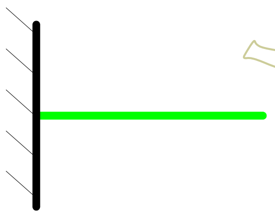
边界条件为：

$$v = 0$$

$$M = 0(\text{或}\,v'' = 0)$$

(2)、刚性固定端

特点： 它阻止梁端发生挠度和转动。



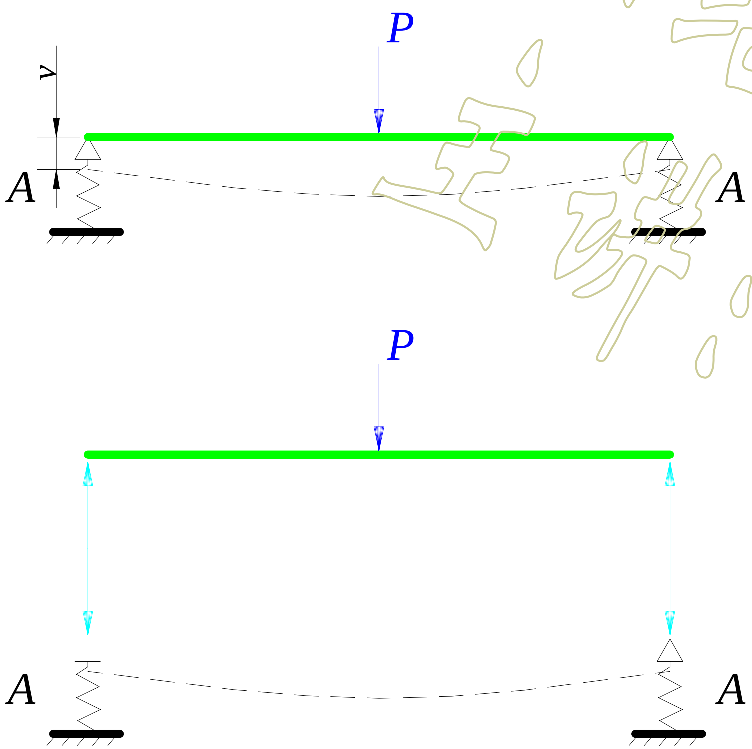
边界条件为：

$$v = 0$$

$$\theta = 0 (或 v' = 0)$$

(3)、弹性支座

定义： 自由支持端在受力后将发生一个正比与支座力的挠度。

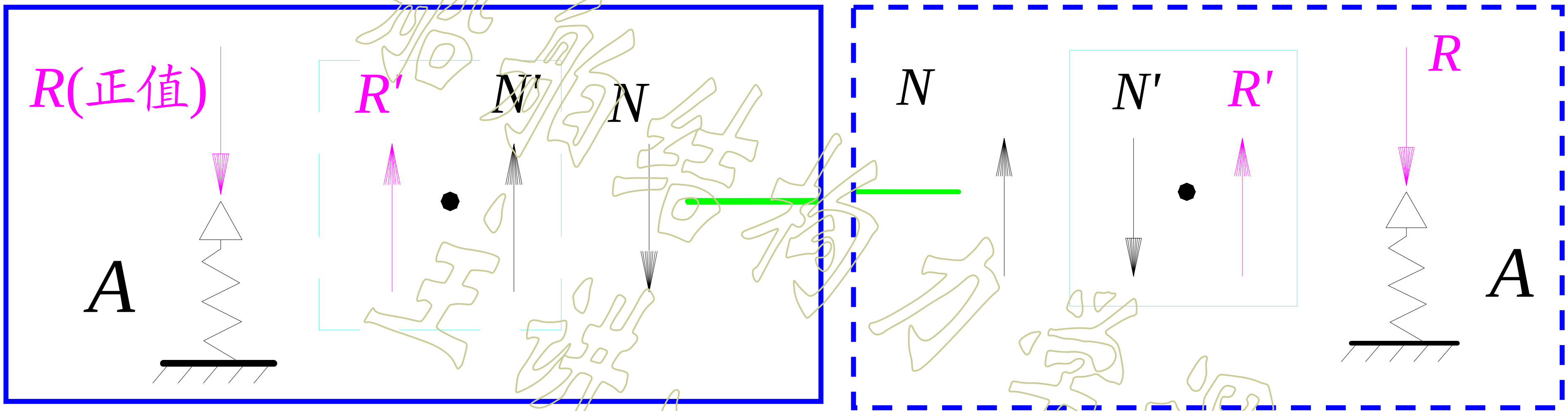


R ——支座在受到梁的作用力

v ——支座的位移

$$v = AR \text{或} v = \frac{R}{K}$$

主讲教师：张延昌
Email:zyc0713@126.com



左端支座边界条件

$$v = -AEIv'''$$

右端支座边界条件

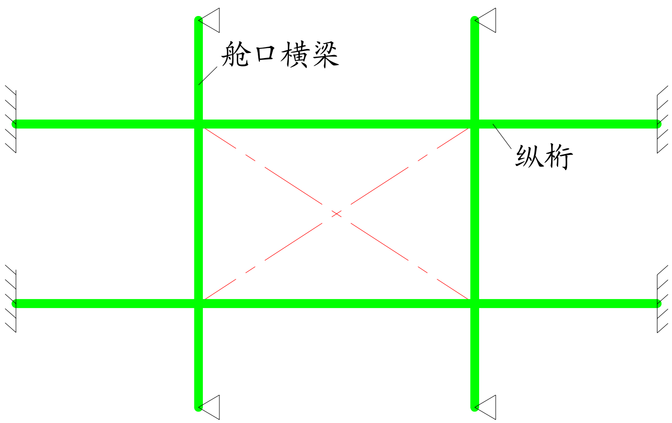
$$v = AEIv'''$$

主讲教师：张延昌
Email:zyc0713@126.com

讨论：

❑如弹性支座的刚度系数 $K=\infty$（或揉度系数 $A=0$）时，支座的挠度为零，就变成了刚性支座；

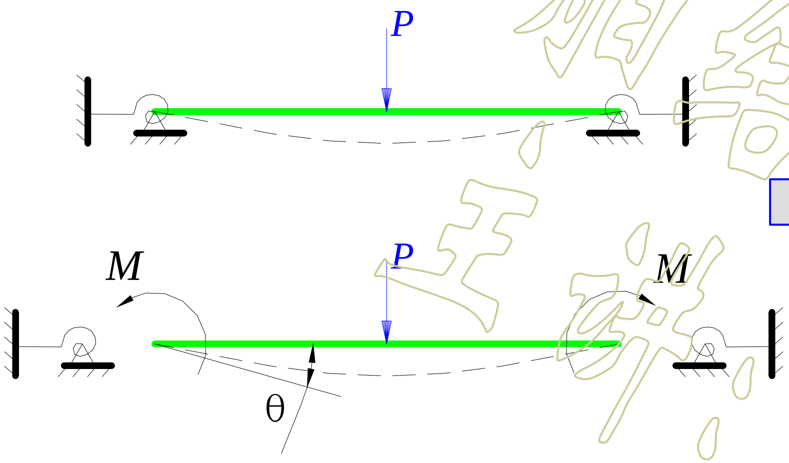
❑如弹性支座的刚度系数 $K=0$（或揉度系数 $A=\infty$）时，支座的反力为零，没有限制挠度的支座存在。

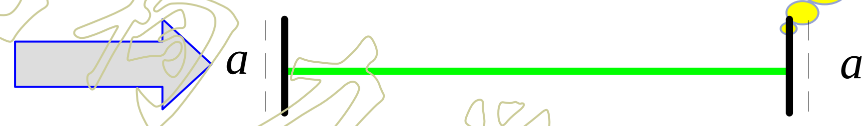


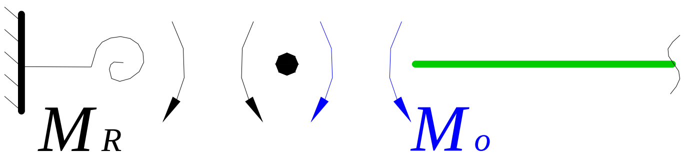
当甲板纵桁与舱口端横梁的 I 差不多时可简化

(4)、弹性固定端

定义：在梁受到弯曲后发生有一个正比与梁端弯矩的转角。







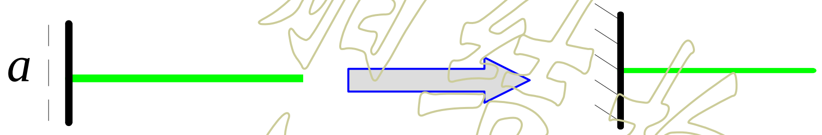
左端断面：$v' = \alpha EIv'', v = 0$

右端断面：$v' = -\alpha EIv'', v = 0$

主讲教师：张延昌
Email:zyc0713@126.com

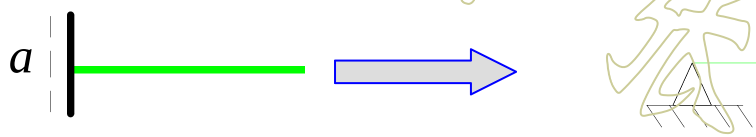
讨论：

- 当 $\alpha = 0(K = \infty)$ 时，弹性固定端变成了刚性固定端；



$$v = 0, v' = 0$$

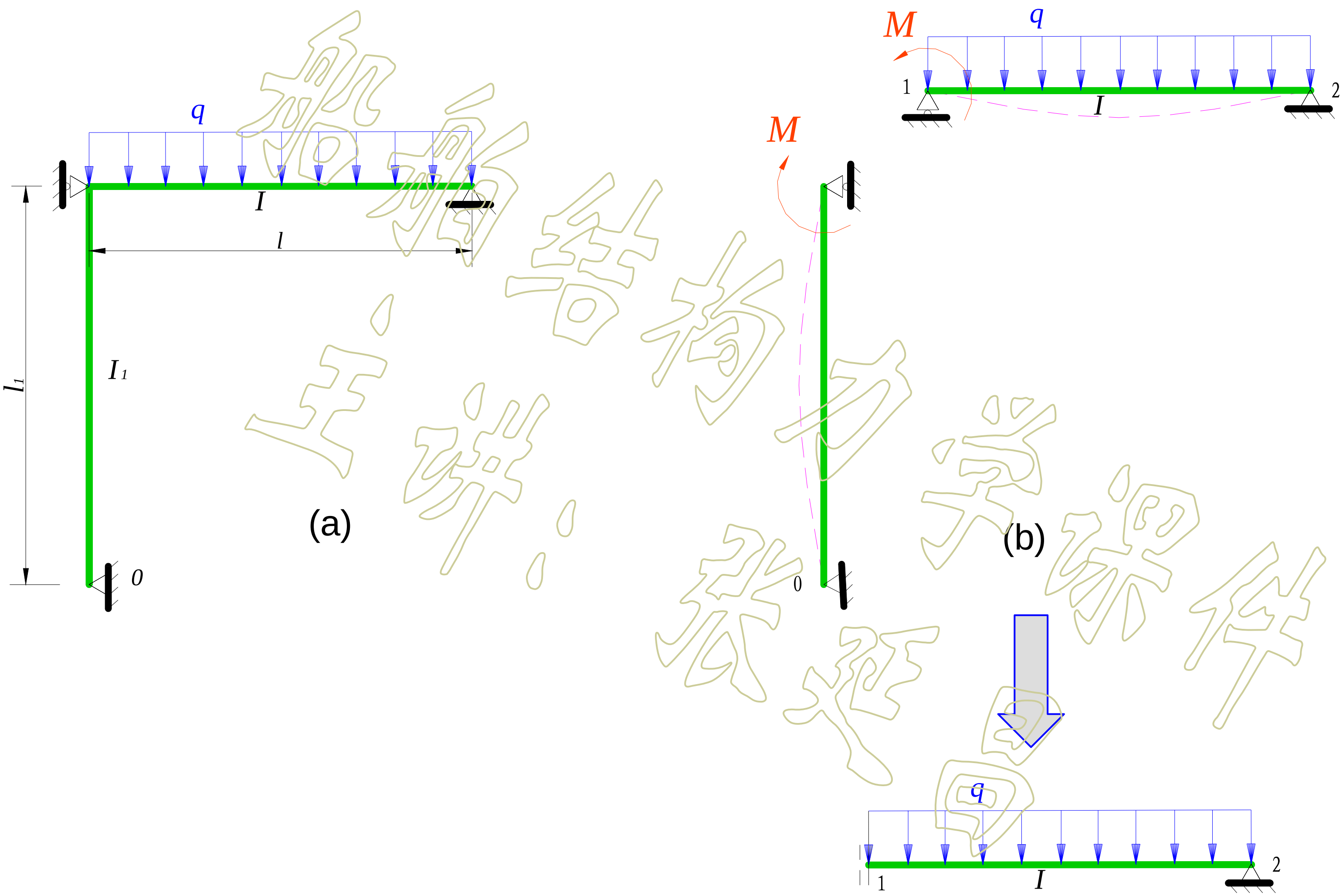
- 当 $\alpha = \infty(K = 0)$ 时，弹性固定端变成了自由支持；



$$v = 0, v'' = 0$$

弹性固定端是介于自由支持端和刚性固定端之间的过渡型。

主讲教师：张延昌
Email:zyc0713@126.com



主讲教师：张延昌
Email:zyc0713@126.com

(5)、完全自由端

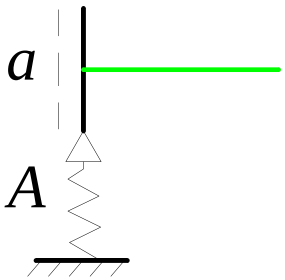
梁端没有支座，弯矩剪力都为零

$$M = 0 \qquad v'' = 0$$

$$N = 0 \qquad v''' = 0$$

(6)、一般情况

弹性固定在弹性支座上时：



边界条件为：
$$v = \mp AEIv'''$$
$$v' = \pm \alpha EIv''$$

本堂课小结：

- 符号法则
- 梁的弯曲微分方程式
- 初参数法
- 边界条件

- 复习：§2-1、 §2-2
- 预习：§2-3
- 作业：2.1

主讲教师：张延昌
Email:zyc0713@126.com