δ-DERIVATIONS OF n-ARY ALGEBRAS

Ivan Kaygorodov
e-mail: kib@math.nsc.ru
Sobolev Inst. of Mathematics
Novosibirsk, Russia

Abstract:

We defined δ-derivations of n-ary algebras. We described δ-derivations of $(n+1)$-dimensional n-ary Filippov algebras and simple finite-dimensional Filippov algebras over algebraically closed field zero characteristic, and simple ternary Malcev algebra M_8. We constructed new examples of non-trivial δ-derivations of Filippov algebras and new examples of non-trivial antiderivations of simple Filippov algebras.

Key words: δ-derivation, Filippov algebra, ternary Malcev algebra.

1. Введение

Понятие антидифференцирования алгебры, являющееся частным случаем δ-дифференцирования, т.е. (-1)-дифференцированием, рассматривалось в работах [1, 2]. В дальнейшем, в работе [3] появляется определение δ-дифференцирования алгебры. Напомним, что при фиксированном δ из основного поля F, под δ-дифференцированием алгебры A понимают линейное отображение ϕ, удовлетворяющее при произвольных элементах $x, y \in A$ условию

$$\phi(xy) = \delta(\phi(x)y + x\phi(y)). \quad (1)$$

В работе [3] описаны $\frac{1}{2}$-дифференцирования произвольной первичной алгебры Ли A ($\frac{1}{6} \in F$) с невырожденной симметрической инвариантной билинейной формой. А именно, доказано, что линейное отображение ϕ: $A \to A$ является $\frac{1}{2}$-дифференцированием тогда и только тогда, когда $\phi \in \Gamma(A)$, где $\Gamma(A)$ — центроид алгебры A. Отсюда следует, что если A — центральная простая алгебра Ли над полем характеристики $p \neq 2, 3$ с невырожденной симметрической инвариантной билинейной формой, то любое $\frac{1}{2}$-дифференцирование ϕ имеет вид $\phi(x) = \alpha x$, для некоторого $\alpha \in F$. В. Т. Филиппов доказал [4], что любая первичная алгебра Ли не имеет ненулевого δ-дифференцирования, если $\delta \neq -1, 0, \frac{1}{2}, 1$. В работе [4] показано, что любая первичная алгебра Ли A ($\frac{1}{6} \in \Phi$) с ненулевым антидифференцированием является 3-мерной центральной простой алгеброй над полем частных центра $Z_R(A)$ своей алгебры правых умножений $R(A)$. Также в этой работе был построен пример нетривиального $\frac{1}{2}$-дифференцирования для алгебры Витта W_1, т.е. такого $\frac{1}{2}$-дифференцирования, которое не является элементом центроида алгебры W_1. В [5] описаны δ-дифференцирования первичных альтернативных и нелиевых мальцевских алгебр с некоторыми ограничениями на кольцо операторов Φ. Как оказалось, алгебры из этих классов не имеют нетривиальных δ-дифференцирований.

В работе [6] было дано описание δ-дифференцирований простых конечномерных йордановых супералгебр над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль. В дальнейшем, в работе [7] были описаны δ-дифференцирования классических супералгебр Ли. Работа [8] посвящена описанию δ-дифференцирований полупростых конечномерных йордановых супералгебр над произвольным полем характеристики отличной от 2 и δ-(супер)дифференцирований простых конечномерных лиевых и йордановых супералгебр над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль. Для алгебр и супералгебр из работ [6, 7, 8] было показано отсутствие нетривиальных δ-(супер)дифференцирований. В дальнейшем, результаты [7] получили обобщение в работе П. Зусмановича [10]. Им было дано описание δ-(супер)дифференцирований первичных супералгебр Ли. А именно, он доказал, что первичная супералгебра Ли не имеет нетривиальных δ-(супер)дифференцирований при $\delta \neq -1, 0, \frac{1}{2}, 1$. П. Зусманович показал, что для совершенной (т.е., такой что $[A, A] = A$) супералгебры Ли A с нулевым центром и невырожденной суперсимметрической инвариантной билинейной формой пространство $\frac{1}{2}$-(супер)дифференцирований совпадает с (супер)центроидом супералгебры A. Также, П. Зусманович, в случае положительной характеристики поля, дал положительный ответ на вопрос В. Т. Филиппова о существовании делителей нуля в кольце $\frac{1}{2}$-дифференцирований первичной алгебры Ли, сформулированный в [4]. В свое время, И. Б. Кайгородовым и В. Н. Желябиным рассматривались δ-(супер)дифференцирования простых унитальных супералгебр йордановой скобки [11], где ими было показано отсутствие нетривиальных δ-(супер)дифференцирований простых супералгебр йордановой скобки, не являющихся супералгебрами векторного типа и было приведено описание δ-(супер)дифференцирований простых конечномерных унитальных йордановых супералгебр над алгебраическим замкнутым полем характеристики отличной от 2. Как следствие, была обнаружена связь между наличием нетривиальных δ-дифференцирований простых унитальных супералгебр йордановых скобок и специальностью супералгебры. δ-Супердифференцирования обобщенного дубля Кантора, построенного на первичной ассоциативной алгебре, рассматривались в работе [9]. Цикл статей по описанию δ-(супер)дифференцирований простых конечномерных йордановых супералгебр заканчивается работой [12], где было дано полное описание δ-(супер)дифференцирований полупростых конечномерных йордановых супералгебр над алгебраически замкнутым полем характеристики отличной от 2. В частности, были построены примеры нетривиальных $\frac{1}{2}$-(супер)дифференцирований для простых неунитальных конечномерных йордановых супералгебр. В работе [13] было дано описание δ-дифференцирований полупростых структуризуемых алгебр. После этого, рассматривались обобщеные δ-дифференцирования первичных альтернативных и лиевых (супер)алгебр, а также унитальных и полупростых йордановых (супер)алгебр [14].

2. Новые примеры нетривиальных δ-дифференцирований алгебр Филиппова.

Алгеброй Филиппова называется алгебра L с одной антикоммутативной n-арной операцией $[x_1, \ldots, x_n]$, удовлетворяющей тождеству

$$[[x_1,\dots,x_n],y_2,\dots,y_n]=\sum_{i=1}^{n}[x_1,\dots,[x_i,y_2,\dots,y_n],\dots,x_n].$$

Дифференцированием n-арной алгебры L называется линейное отображение D, удовлетворяющее условию

$$D[x_1,\dots,x_n]=\sum_{i=1}^{n}[x_1,\dots,D(x_i),\dots,x_n]. \tag{2}$$

По аналогии с δ-дифференцированием бинарных алгебр, которым посвящены работы [3]-[14], мы можем определить δ-дифференцирование n-арной алгебры, как линейное отображение ϕ, для фиксированного элемента основного поля δ, удовлетворяющее условию

$$\phi[x_1,\dots,x_n]=\delta\sum_{i=1}^{n}[x_1,\dots,\phi(x_i),\dots,x_n]. \tag{3}$$

Пусть $\Gamma(L)=\{\psi\in End(A)|\psi([x_1,\dots,x_n])=[x_1,\dots,\psi(x_i),\dots,x_n]\}$ — центроид алгебры L. Ясно, что в случае n-арной алгебры L каждый элемент $\Gamma(L)$ будет являться $\frac{1}{n}$-дифференцированием. Ненулевое δ-дифференцирование ϕ будем считать нетривиальным, если $\delta\neq 0,1$ и $\phi\notin\Gamma(L)$. В дальнейшем, случаи $\delta=0,1$ мы будем опускать без дополнительных оговорок.

В свое время [16], В. Т. Филиппов дал описание n-арных алгебр Филиппова размерности $n+1$. Пусть A — n-арная алгебра Филиппова, $dim(A)=n+1$ и $\{e_1,\dots,e_{n+1}\}$ — базис алгебры A. Через $\hat{x}_i$ мы будем обозначать отсутствие элемента x_i. Например, $[x_1,x_2,\hat{x}_3,x_4]=[x_1,x_2,x_4]$.

Согласно классификации В. Т. Филиппова, n-арные алгебры Филиппова размерности $n+1$ над алгебраически замкнутым полем F характеристики отличной от 2 исчерпываются $n+4$ сериями алгебр:

(A_1). $[e_1,\dots,\hat{e}_i,\dots,e_{n+1}]=0$, для $1\le i\le n+1$.

(B_1). $[e_1,\dots,\hat{e}_i,\dots,e_{n+1}]=0$, для $1<i\le n+1$, $[e_2,\dots,e_{n+1}]=e_1$.

(B_2). $[e_1,\dots,\hat{e}_i,\dots,e_{n+1}]=0$, для $1\le i\le n$, $[e_1,\dots,e_n]=e_1$.

(C_1). $[e_1,\dots,\hat{e}_i,\dots,e_{n+1}]=0$, для $1\le i\le n-1$,
$[e_1,\dots,\hat{e}_n,e_{n+1}]=e_n$, $[e_1,\dots,e_n]=\alpha e_{n+1}$, $\alpha\neq 0$.

(C_2). $[e_1,\dots,\hat{e}_i,\dots,e_{n+1}]=0$, для $1\le i\le n-1$,
$[e_1,\dots,\hat{e}_n,e_{n+1}]=e_n+\beta e_{n+1}$, $[e_1,\dots,e_n]=e_{n+1}$, $\beta\neq 0$.

(D_r). $3\le r\le n+1$, $[e_1,\dots,\hat{e}_i,\dots,e_{n+1}]=e_i$, для $1\le i\le r$,
$[e_1,\dots,\hat{e}_i,\dots,e_{n+1}]=0$, для $r+1\le i\le n+1$.

Пусть ϕ — δ-дифференцирование алгебры A, тогда через $[\phi]$ будем обозначать матрицу линейного отображения ϕ в базисе $\{e_1,\dots,e_{n+1}\}$. Таким образом, $[\phi(x)]=[x][\phi]$, где $[x]$ — вектор-строка, составленная из координат вектора x в базисе $\{e_1,\dots,e_{n+1}\}$. Через $\{\phi\}$ и $|\{\phi\}|$ будем, соответственно, обозначать множество, составленное из диагональных элементов матрицы $[\phi]$, и его мощность.

Легко заметить, что для алгебр типа (A_1) любой эндоморфизм будет являться δ-дифференцированием для любого $\delta\in F$.

Лемма 1. *Пусть A — алгебра типа (B_1) и ϕ — нетривиальное δ-дифференцирование алгебры A, тогда $|\{\phi\}| \geq 2$ и*

$$\phi(e_1) = \delta \sum_{k=2}^{n+1} \beta_{kk} e_1, \phi(e_i) = \sum_{j=1}^{n+1} \beta_{ij} e_j \ (2 \leq i).$$

Доказательство. Пусть $\phi(e_i) = \sum\limits_{j=1}^{n+1} \beta_{ij} e_j, \beta_{ij} \in F$. Заметим, что

$$\phi(e_1) = \phi[e_2, \dots, e_{n+1}] = \delta \sum_{k=2}^{n+1} [e_2, \dots, \phi(e_k), \dots, e_{n+1}] = \delta \sum_{k=2}^{n+1} \beta_{kk} e_1.$$

Легко видеть, что отображение, заданное по правилу

$$\phi(e_1) = \delta \sum_{k=2}^{n+1} \beta_{kk} e_1 \text{ и } \phi(e_i) = \sum_{j=1}^{n+1} \beta_{ij} e_j (2 \leq i)$$

будет являться δ-дифференцированием. Отметим, что если $|\{\phi\}| = 1$, то все β_{ii} равны между собой и $\delta = \frac{1}{n}$. В этом случае легко показать, что $\phi \in \Gamma(A)$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть A — алгебра типа (B_2) и ϕ — нетривиальное δ-дифференцирование алгебры A, тогда $|\{\phi\} \setminus \{\beta_{n+1n+1}\}| \geq 2$ и*

$$\phi(e_1) = \frac{\delta}{1-\delta} \sum_{k=2}^{n} \beta_{kk} e_1, \phi(e_{n+1}) = \beta_{n+1n+1} e_{n+1}, \phi(e_i) = \sum_{j=1}^{n+1} \beta_{ij} e_j \ (2 \leq i \leq n).$$

Доказательство. Пусть $\phi(e_i) = \sum\limits_{j=1}^{n+1} \beta_{ij} e_j, \beta_{ij} \in F$. Заметим, что

$$\phi(e_1) = \phi[e_1, \dots, e_n] = \delta \sum_{k=1}^{n} [e_1, \dots, \phi(e_k), \dots, e_n] = \delta \sum_{k=1}^{n} \beta_{kk} e_1,$$

откуда $\beta_{11} = \frac{\delta}{1-\delta} \sum\limits_{k=2}^{n} \beta_{kk}$. Отметим, что

$$0 = \phi[e_1, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_{n+1}] = \delta[e_1, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_n, \beta_{n+1i} e_i],$$

что влечет $\beta_{n+1i} = 0, i \neq n+1$. Легко видеть, что отображение, заданное по правилу

$$\phi(e_1) = \frac{\delta}{1-\delta} \sum_{k=2}^{n} \beta_{kk} e_1, \phi(e_{n+1}) = \beta_{n+1n+1} e_{n+1}, \text{ и } \phi(e_i) = \sum_{j=1}^{n+1} \beta_{ij} e_j, 2 \leq i \leq n$$

является δ-дифференцированием. Отметим, что если $|\{\phi\} \setminus \{\beta_{n+1n+1}\}| = 1$, то все $\beta_{ii} (i \neq n+1)$ равны между собой и $\delta = \frac{1}{n}$. В этом случае легко показать, что $\phi \in \Gamma(A)$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть A — алгебра типа (C_1) и ϕ — нетривиальное δ-дифференцирование алгебры A, тогда $[\phi] = \begin{pmatrix} A & C \\ G & B \end{pmatrix}$, где $A \in M_{n-1}, B \in M_2, C \in M_{n-1,2}, G = \mathbf{0} \in M_{2,n-1}$, $|\{\phi\}| \geq 2$ и при $w = \frac{\delta}{1-\delta} \sum\limits_{k=1}^{n-1} \beta_{kk}$ верно*

$$B=\left(\begin{array}{cc} w & \beta_{nn+1} \\ \frac{\delta}{\alpha}\beta_{nn+1} & w \end{array}\right),\ \text{где } \beta_{nn+1}=0,\ \text{если } \delta\neq-1.$$

Доказательство. Пусть $\phi(e_i)=\sum\limits_{j=1}^{n+1}\beta_{ij}e_j, \beta_{ij}\in F$. Заметим, что

$$\alpha\phi(e_{n+1})=\delta\sum_{k=1}^{n}[e_1,\dots,\phi(e_k),\dots,e_n]=\alpha\delta\sum_{k=1}^{n}\beta_{kk}e_{n+1}+\delta\beta_{nn+1}e_n,$$

откуда $\phi(e_{n+1})=\delta\sum\limits_{k=1}^{n}\beta_{kk}e_{n+1}+\frac{\delta}{\alpha}\beta_{nn+1}e_n$. Легко видеть, что

$$\phi(e_n)=\phi[e_1,\dots,e_{n-1},e_{n+1}]=\delta\sum_{k=1}^{n-1}\beta_{kk}e_n+\delta^2\sum_{k=1}^{n}\beta_{kk}e_n+\delta^2\beta_{nn+1}e_{n+1},$$

откуда $\beta_{nn}=\frac{\delta}{1-\delta}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\beta_{kk}$ и

$$\beta_{n+1n+1}=\delta\sum_{k=1}^{n}\beta_{kk}=\delta\left(\sum_{k=1}^{n-1}\beta_{kk}+\frac{\delta}{1-\delta}\sum_{k=1}^{n-1}\beta_{kk}\right)=\frac{\delta}{1-\delta}\sum_{k=1}^{n-1}\beta_{kk}.$$

Также, мы видим что $\beta_{nn+1}=\delta^2\beta_{nn+1}$, то есть $\beta_{nn+1}\neq0$ только при $\delta=-1$.

Положим $w=\frac{\delta}{1-\delta}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\beta_{kk}$. Легко видеть, что отображение ϕ, определенное как

$$\phi(e_i)=\sum_{j=1}^{n+1}\beta_{ij}e_j\ (i<n),\ \phi(e_n)=we_n+\beta_{nn+1}e_{n+1},\ \phi(e_{n+1})=\frac{\delta}{\alpha}\beta_{nn+1}e_n+we_{n+1},$$

где $\beta_{nn+1}=0$ если $\delta\neq-1$, является δ-дифференцированием. Отметим, что если $|\{\phi\}|=1$, то все β_{ii} равны между собой и $\delta=\frac{1}{n}$. В данном случае, легко видеть. что $\phi\in\Gamma(A)$. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть A — алгебра типа (C_2) и ϕ — нетривиальное δ-дифференцирование алгебры A, тогда* $[\phi]=\left(\begin{array}{cc} A & C \\ G & B\end{array}\right)$, *где* $A\in M_{n-1}, B\in M_2, C\in M_{n-1,2}, G=\mathbf{0}\in M_{2,n-1}$, $|\{\phi\}|\geq 2$ *и*

$$B=\left(\begin{array}{cc} \frac{\delta tr(A)}{1-\delta}-\frac{\beta\delta}{1+\delta}\gamma & \gamma \\ \delta\gamma & \frac{\delta tr(A)}{1-\delta}+\frac{\beta\delta}{1+\delta}\gamma \end{array}\right),$$

где $\gamma\neq0$, если $\delta\neq\frac{-\beta^2-2\pm\sqrt{\beta^4+4\beta^2}}{2}$, либо $\delta=-1$.

Доказательство. Пусть $\phi(e_i)=\sum\limits_{j=1}^{n+1}\beta_{ij}e_j, \beta_{ij}\in F$. Заметим, что

$$\phi(e_{n+1})=\phi[e_1,\dots,e_n]=$$

$$\delta\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_{ii}e_{n+1}+\beta_{nn+1}(e_n+\beta e_{n+1})\right)=\beta_{n+1n}e_n+\beta_{n+1n+1}e_{n+1}.$$

Значит,

$$\phi(e_n)+\beta\beta_{n+1n}e_n+\beta\beta_{n+1n+1}e_{n+1}=\phi(e_n+\beta e_{n+1})=\phi[e_1,\dots,\hat{e}_n,e_{n+1}]=$$

$$\delta\left(\sum_{i=1}^{n-1}\beta_{ii}(e_n+\beta e_{n+1})+\beta_{n+1n}e_{n+1}+\beta_{n+1n+1}(e_n+\beta e_{n+1})\right).$$

Откуда, введя новое обозначение $\theta=\sum\limits_{i=1}^{n-1}\beta_{ii}$, видим, что

$$\beta_{nn}=\delta\theta+\delta\beta_{n+1n+1}-\beta\beta_{n+1n}, \tag{4}$$

$$\beta_{nn+1}=\delta\theta\beta+\delta\beta_{n+1n}+\delta\beta\beta_{n+1n+1}-\beta\beta_{n+1n+1}, \tag{5}$$

$$\beta_{n+1n}=\delta\beta_{nn+1}, \tag{6}$$

$$\beta_{n+1n+1}=\delta\theta+\delta\beta_{nn}+\delta\beta\beta_{nn+1}. \tag{7}$$

Складывая и вычитая (4) и (7), мы получаем

$$(1-\delta)(\beta_{nn}+\beta_{n+1n+1})=2\delta\theta, \tag{8}$$

$$(1+\delta)(\beta_{nn}-\beta_{n+1n+1})=-2\delta\beta\beta_{nn+1}. \tag{9}$$

Из (8) и (9) легко следует, что при $\delta\neq-1$ верно

$$\beta_{nn}=\frac{\delta\theta}{1-\delta}-\frac{\beta\delta}{1+\delta}\beta_{nn+1}, \tag{10}$$

$$\beta_{n+1n+1}=\frac{\delta\theta}{1-\delta}+\frac{\beta\delta}{1+\delta}\beta_{nn+1}, \tag{11}$$

а при $\delta=-1$ имеем $\beta_{n+1n}=\beta_{nn+1}=0$ и $\beta_{nn}=\beta_{n+1n+1}=-\frac{\theta}{2}$.

Выражения для β_{n+1n+1} и β_{n+1n} из равенств (11) и (6) подставим в (5), и, в результате, получим

$$(1-\delta^2)\beta_{nn+1}=\frac{\beta^2\delta(\delta-1)}{1+\delta}\beta_{nn+1},$$

то есть, $\beta_{nn+1}\neq 0$ только при $\delta=\frac{-\beta^2-2\pm\sqrt{\beta^4+4\beta^2}}{2}$. Таким образом, мы получили, что отображение ϕ имеет вид, описанный в формулировке теоремы. Ясно, что отображение заданное таким образом будет являться δ-дифференцированием. Отметим, что если $|\{\phi\}|=1$, то все β_{ii} равны между собой и $\delta=\frac{1}{n}$, т.е. $\phi\in\Gamma(A)$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть A — алгебра типа (D_r) и ϕ — нетривиальное δ-дифференцирование алгебры A, тогда* $[\phi]=\begin{pmatrix}A & C\\ G & B\end{pmatrix}$, *где $A\in M_r, B\in M_{n+1-r}, C\in M_{r,n+1-r}, G=\mathbf{0}\in M_{n+1-r,r}$ и*

1) *если $\delta=-1$, то $A=(a_{ij})$, где $a_{ij}=(-1)^{i-j}a_{ji}, i\neq j$ и $tr(A)=-tr(B)$;*
2) *если $\delta=\frac{1}{r-1}$, то $tr(B)=0$ и $A=\beta E, \beta\in F$;*
3) *если $\delta\neq\frac{1}{r-1},-1$, то $A=\frac{\delta}{1+\delta-r\delta}tr(B)E$;*
4) *одновременно не выполняются $C=\mathbf{0}$ и $|\{\phi\}|=1$.*

Доказательство. Пусть $\phi(e_i)=\sum\limits_{j=1}^{n+1}\beta_{ij}e_j, \beta_{ij}\in F$. Заметим, что для $i\leq r$ верно

$$\phi(e_i)=\phi[e_1,\ldots,\hat{e}_i,\ldots,e_{n+1}]=\delta\sum_{j\neq i}[e_1,\ldots,\phi(e_j),\ldots,\hat{e}_i,\ldots,e_{n+1}]=$$

$$\delta \sum_{j\neq i} \beta_{jj} e_i + \delta \sum_{j\leq r, j\neq i} (-1)^{i-j+1} \beta_{ji} e_j.$$

Откуда легко следует, что при $j, i \leq r$ верно

$$\beta_{ii} = \delta \sum_{k\neq i} \beta_{kk} \text{ и } \beta_{ij} = (-1)^{i-j+1} \delta \beta_{ji} = \delta^2 \beta_{ij},$$

то есть, при $i, j \leq r, i \neq j$ имеем либо $\beta_{ij} = (-1)^{i-j} \beta_{ji}$ и $\delta = -1$, либо $\beta_{ij} = 0$ и $\delta \neq -1$. Также видим, что при $i \leq r$ верно

$$(1+\delta)\beta_{ii} = \delta \sum_{j=1}^{n+1} \beta_{jj},$$

то есть либо $\beta_{ii} = \beta$ при $\delta \neq -1$, либо $\sum\limits_{j=1}^{n+1} \beta_{jj} = 0$ при $\delta = -1$. Откуда видим, что терминах формулировки леммы выполненно условие 1).

Если $\delta \neq -1$ и $i \leq r$, то

$$\beta_{ii} = \frac{\delta}{1+\delta} tr[\phi] = \frac{r\delta}{1+\delta}\beta_{ii} + \frac{\delta}{1+\delta} tr(B),$$

то есть либо $\beta_{ii} = \frac{\delta}{1+\delta-r\delta} tr(B)$ и $\delta \neq \frac{1}{r-1}$, либо $tr(B) = 0$ и $\delta = \frac{1}{r-1}$.

Если $i > r$, то стандартными операциями, можем получить

$$0 = \phi[e_1, \ldots, \hat{e}_i, \ldots, e_{n+1}] = \delta \sum_{j\leq r} \beta_{ji} e_j,$$

то есть $\beta_{ji} = 0$, если $i > r$ и $j \leq r$. То есть, в терминах условия леммы, $G = \mathbf{0}$.

Легко видеть, что отображение ϕ, определенное как в условии леммы, является δ-дифференцированием.

Отметим, что при $C \neq \mathbf{0}$, отображение ϕ не будет являться элементом центроида алгебры. Действительно, если β_{ij} — ненулевая компонента матрицы C, то

$$\phi(e_i) \neq [e_1, \ldots, \hat{e}_i, \ldots, \phi(e_{n+1})].$$

Отсюда видим, что выполняется условие 4) в формулировке леммы. Лемма доказана.

Теорема 6. *Каждая непростая $(n+1)$-мерная n-арная алгебра Филиппова над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль имеет нетривиальное δ-дифференцирование при произвольном $\delta \neq 0, 1$.*

Доказательство. Согласно классификации $(n+1)$-мерных n-арных алгебр Филиппова [16], все такие алгебры, не являющиеся простыми, исчерпываются следующими типами алгебр $(A_1), (B_1), (B_2), (C_1), (C_2), (D_r)$ $(r \neq n+1)$. Таким образом, доказательство теоремы следует из приведенной классификации алгебр и лемм 1-5. Теорема доказана.

Теорема 7. *Каждая простая конечномерная алгебра Филиппова над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль имеет нетривиальные антидифференцирования и не имеет нетривиальных δ-дифференцирований, отличных от антидифференцирований.*

Доказательство. Согласно [15], каждая простая конечномерная n-арная алгебра Филиппова над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль изоморфна простой n-арной алгебре Филиппова типа (D_{n+1}), впервые описанной В. Т. Филипповым в [16]. Таким образом, условие теоремы следует из леммы 5. Теорема доказана.

Отметим, что n-арные алгебры Филиппова типа (D_{n+1}) являются обобщением (на случай n-арной операции умножения) известной простой алгебры Ли sl_2 и при $n = 2$ совпадают с ней. В свое время, Н. С. Хопкинс исследовала антидифференцирования простых конечномерных алгебр Ли в работе [1], где ей были построены примеры нетривиальных антидифференцирований для алгебры sl_2. Полученные результаты согласуются с результатами Н. С. Хопкин [1] и В. Т. Филлипова [3, 4] относительно антидифференцирований и δ-дифференцирований простой алгебры Ли sl_2. Заметим, что дифференцирования простых конечномерных алгебр Филиппова над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль были описаны в [16].

3. δ-дифференцирования тернарной алгебры Мальцева M_8.

Класс n-арных алгебр Мальцева был определен в [17] как некоторый естественный класс n-арных алгебр, содержащий класс n-арных алгебр векторного произведения. К настоящему времени единственным известным примером простой n-арной алгебры Мальцева, не являющейся алгеброй Филиппова, служит простая тернарная алгебра Мальцева M_8, возникающая на 8-мерной композиционной алгебре. В свое время, дифференцирования тернарной алгебры M_8 были описаны в работе [18], а в работе [19] было построено ее корневое разложение и введена структура $\mathbb{Z}_3$-градуировки.

n-Арным якобианом мы называем следующую функцию, определенную на n-арной алгебре:

$$J(x_1,\dots,x_n;y_2,\dots,y_n) =$$

$$[[x_1,\dots,x_n],y_2,\dots y_n] - \sum_{i=1}^{n}[x_1,\dots,[x_i,y_2,\dots,y_n],\dots,x_n].$$

Из определения следует, что если A — n-арная алгебра Филиппова, то

$$J(x_1,\dots,x_n;y_2,\dots,y_n) = 0$$

для всех $x_1,\dots,x_n,y_2,\dots,y_n \in A$.

n-Арной алгеброй Мальцева $(n \geq 3)$ мы называем алгебру L с одной антикоммутативной n-арной операцией $[x_1,\dots,x_n]$, удовлетворяющей тождеству

$$-J(zR_x,x_2,\dots,x_n;y_2,\dots,y_n) = J(z,x_2,\dots,x_n;y_2,\dots,y_n)R_x,$$

где $R_x = R_{x_2,\dots,x_n}$ — оператор правого умножения: $zR_x = [z,x_2,\dots,x_n]$.

Далее полагаем, что F — поле характеристики, отличной от 2,3, и обозначаем через A — композиционную алгебру над F с инволюцией $a \to \overline{a}$ и единицей 1 (см., например, [20]). Симметрическую билинейную форму $(x,y) = \frac{1}{2}(x\overline{y}+y\overline{x})$, определенную на A, предполагаем невырожденной и через $n(a)$ обозначаем норму элемента $a \in A$. Определим на A тернарную операцию умножения $[\cdot,\cdot,\cdot]$ правилом

$$[x,y,z] = x\overline{y}z - (y,z)x + (x,z)y - (x,y)z.$$

Тогда A становится тернарной алгеброй Мальцева [17], которая обозначается через $M(A)$, а если $dim(A) = 8$, то через M_8.

Напомним, что дифференцированием тернарной алгебры называются линейные отображения D, удовлетворяющие равенству (2) при $n = 3$. В работе [18] было описаны дифференцирования тернарной алгебры Мальцева M_8, где было показано, что каждое дифференцирование является внутренним, то есть

$$Der(M_8) = \langle [R_{x,y}, R_{x,z}] + R_{x,[y,x,z]} | x, y, z \in M_8 \rangle.$$

Под δ-дифференцированием тернарной алгебры, мы подразумеваем линейные отображения ϕ, удовлетворяющие равенству (3) при $n = 3$. Ясно, что в случае тернарной алгебры L каждый элемент центроида $\Gamma(L)$ будет являться $\frac{1}{3}$-дифференцированием. Ненулевое δ-дифференцирование ϕ будем считать нетривиальным, если $\delta \neq 0, 1$ и $\phi \notin \Gamma(L)$.

Пусть U — подпространство в V и $x \in V$. Через $x|_U$ мы будем обозначать проекцию вектора x на подпространство U.

Теорема 8. *Тернарная алгебра M_8 не имеет нетривиальных δ-дифференцирований.*

Доказательство. Пусть $1, a, b, c$ — ортонормированные вектора из A. Выберем следующий базис в A:

$$\{e_1 = 1, e_2 = a, e_3 = b, e_4 = ab, e_5 = c, e_6 = ac, e_7 = bc, e_8 = abc\}.$$

Оператор правого умножения $R_{x,y}$ называется регулярным, если в фиттинговом разложении $M = M_0 \oplus M_1$ относительно $R_{x,y}$ размерность M_0 минимальна [19]. Согласно [19, Теорема 1], мы имеем корневое разложение алгебры M_8 : $M = M_0 \oplus M_\alpha \oplus M_{-\alpha}$, где $\alpha \in F$ такой, что $vR_{x,y} = \pm \alpha v$ для любого $v \in M_{\pm\alpha}$. Также, из [19, Лемма 3], известно, что на тернарной алгебре M_8 существует нетривиальная градуировка. Если мы обозначим $M_{\pm\alpha}$ через $M_{\pm 1}$, то

$$[M_i, M_j, M_k] \subseteq M_{i+j+k(mod 3)}.$$

Пусть $v \in M_\alpha$, тогда

$$\alpha\phi(v) = \phi(vR_{x,y}) = \delta([\phi(v), x, y] + [v, \phi(x), y] + [v, x, \phi(y)]). \tag{12}$$

Будем считать, что $\phi(v)|_{M_\alpha} = w_\alpha, \phi(x)|_{M_0} = \alpha_x x + \beta_y y, \phi(y)|_{M_0} = \alpha_y x + \beta_y y$. Учитывая данные соотношения в равенстве (12), мы получаем $w_\alpha = \frac{\alpha_x + \beta_y}{1-\delta}\delta v$. Заметим, что согласно [19, Лемма 1], операторы R_{e_i, e_i+e_j} и R_{e_j, e_i+e_j} при $i \neq j$ являются регулярными. Следовательно, мы можем заключить, что

$$\frac{\alpha_{e_i} + \beta_{e_i+e_j}}{1-\delta}\delta v = \frac{\alpha_{e_j} + \beta_{e_i+e_j}}{1-\delta}\delta v,$$

откуда $\alpha_{e_i} = \alpha_{e_j}$. Также отметим, что верно $\frac{2\alpha_{e_i}}{1-\delta}\delta = \alpha_{e_i}$. Последнее нам дает либо $\delta = \frac{1}{3}$, либо $\alpha_{e_i} = 0$.

Для каждого $i \in \{2, \ldots, 8\}$ возможно выбрать j, k, l, m, s, t, зависящие от i, такие, что

$$e_i = e_j e_k = e_l e_m = e_s e_t, \tag{13}$$

$$e_j = e_s e_m = e_k e_i = e_t e_l, \tag{14}$$

$$e_k = e_i e_j = e_m e_t = e_s e_l, \tag{15}$$

$$e_l = e_m e_i = e_k e_s = e_j e_t, \tag{16}$$

$$e_m = e_i e_l = e_t e_k = e_j e_s, \tag{17}$$

$$e_s = e_l e_k = e_t e_i = e_m e_j, \tag{18}$$

$$e_t = e_i e_s = e_k e_m = e_l e_j. \tag{19}$$

Мы можем считать, что $\phi(e_q) = \sum\limits_{p=1}^{8} a_{qp} e_p$. Нам уже известно, что $a_{qq} = a_{pp}$, а, при $\delta \neq \frac{1}{3}$, выполняется $a_{pp} = 0$. Благодаря тому, что

$$\phi(e_s) = \phi([e_i, e_j, e_l]) = \delta([\phi(e_i), e_j, e_l] + [e_i, \phi(e_j), e_l] + [e_i, e_j, \phi(e_l)]),$$

выполнив соответствующие операции умножений, мы имеем

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^{8} a_{sp} e_p = \delta(& - && a_{it} e_1 + a_{ik} e_m - a_{im} e_k + a_{i1} e_t - a_{is} e_i \\ & - && a_{jm} e_1 + a_{j1} e_m + a_{jt} e_k - a_{jk} e_t - a_{js} e_j \\ & + && a_{lk} e_1 + a_{lt} e_m - a_{l1} e_k - a_{lm} e_t - a_{ls} e_l). \end{aligned}$$

(к примеру, $[e_i, e_l, e_k] = (e_i \overline{e_l}) e_k = (e_l e_i) e_k = -e_m e_k = e_k e_m = e_t$). Следовательно, $a_{sp} = -\delta a_{ps}$, где $p \in \{i, j, l\}$. Произвольность индекса i и соотношения (13-19) позволяют нам сделать вывод, что $a_{pq} = -\delta a_{qp}$ для всех $p, q \in \{1, \ldots, 8\}$. Используя полученное соотношение, мы можем заключить, что $a_{pq} = -\delta a_{qp} = \delta^2 a_{pq}$, что влечет $\delta = -1$ и $a_{pq} = a_{qp}$, либо тривиальность ϕ. Покажем, что алгебра M_8 не имеет нетривиальных антидифференцирований. В дальнейшем, мы пользуемся приведенной схемой рассуждения и помним, что $\delta = -1$.

Мы рассмотрим $-\phi(e_t) = \phi([e_i, e_k, e_l])$, что влечет

$$\begin{aligned} -\sum_{p=1}^{8} a_{tp} e_p = -(& && a_{i1} e_s - a_{ij} e_m + a_{im} e_j - a_{is} e_1 + a_{it} e_i \\ & + && a_{k1} e_m + a_{kj} e_s - a_{km} e_1 - a_{ks} e_j + a_{kt} e_k \\ & + && a_{l1} e_j - a_{lj} e_1 - a_{lm} e_s + a_{ls} e_m + a_{lt} e_l). \end{aligned}$$

Откуда мы получаем

$$a_{ts} = a_{i1} + a_{jk} - a_{ml}. \tag{20}$$

Мы рассмотрим $\phi(e_m) = \phi([e_i, e_j, e_t])$, что влечет

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^{8} a_{mp} e_p = -(& && a_{i1} e_l - a_{ik} e_s - a_{il} e_1 + a_{im} e_i - a_{is} e_k \\ & + && a_{j1} e_s - a_{jk} e_l + a_{jl} e_k + a_{jm} e_j - a_{js} e_1 \\ & + && a_{t1} e_k - a_{tk} e_1 - a_{tl} e_s + a_{tm} e_t + a_{ts} e_l). \end{aligned}$$

Откуда мы получаем

(21) $$a_{ml} = a_{i1} - a_{jk} + a_{ts}.$$

Мы рассмотрим $-\phi(e_t) = \phi([e_i, e_j, e_m])$, что влечет

$$\begin{aligned} -\sum_{p=1}^{8} a_{tp}e_p = -(& \quad a_{i1}e_s - a_{ik}e_l + a_{il}e_k - a_{is}e_1 + a_{it}e_i \\ & - \quad a_{j1}e_l - a_{jk}e_s + a_{jl}e_1 + a_{js}e_k + a_{jt}e_j \\ & - \quad a_{m1}e_k + a_{mk}e_1 + a_{ml}e_s - a_{ms}e_l + a_{mt}e_m). \end{aligned}$$

Откуда мы получаем

(22) $$a_{ts} = a_{i1} - a_{jk} + a_{ml}.$$

Мы рассмотрим $-\phi(e_s) = \phi([e_i, e_k, e_m])$, что влечет

$$\begin{aligned} -\sum_{p=1}^{8} a_{sp}e_p = -(& - \quad a_{i1}e_t + a_{ij}e_l + a_{is}e_i + a_{it}e_1 - a_{il}e_j \\ & - \quad a_{k1}e_l - a_{kj}e_t + a_{ks}e_k + a_{kt}e_j + a_{kl}e_1 \\ & + \quad a_{m1}e_j - a_{mj}e_1 + a_{ms}e_m + a_{mt}e_l - a_{ml}e_t). \end{aligned}$$

Откуда мы получаем

(23) $$a_{st} = -a_{i1} - a_{jk} - a_{ml}.$$

Заметим, что из (20) и (21) вытекает

(24) $$a_{kj} = a_{st}, a_{ml} = a_{i1}.$$

Заметим, что из (20) и (22) вытекает

(25) $$a_{i1} = a_{st}, a_{ml} = a_{kj}.$$

Заметим, что из (23) и (24) вытекает

(26) $$a_{st} = -a_{ml}.$$

Проанализировав равенства (24-26), мы получаем

$$a_{i1} = a_{st} = a_{ml} = a_{kj} = 0.$$

Исходя из произвольности индекса i и соотношений (13-19), мы получаем тривиальность отображения ϕ. Теорема доказана.

Полученная теорема дает существование простой n-арной алгебры Мальцева, не являющейся n-арной алгеброй Филиппова, над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль, которая, в отличии от n-арных алгебр Филиппова над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль, не имеет нетривиальных δ-дифференцирований. Отметим, что данные результаты согласуются с результатами В. Т. Филиппова [5] об отсутствии нетривиальных δ-дифференцирований на первичных бинарных нелиевых алгебрах Мальцева.

В заключение, автор выражает благодарность В. Н. Желябину и А. П. Пожидаеву за внимание к работе и конструктивные замечания.

Список литературы

[1] Hopkins N. C., *Generalizes Derivations of Nonassociative Algebras*, Nova J. Math. Game Theory Algebra, **5** (1996), №3, 215–224.

[2] Филиппов В. Т., *Об алгебрах Ли, удовлетворяющих тождеству 5-ой степени*, Алгебра и логика, **34** (1995), №6, 681–705.

[3] Филиппов В. Т., *О δ-дифференцированиях алгебр Ли*, Сиб. матем. ж., **39** (1998), №6, 1409–1422.

[4] Филиппов В. Т., *О δ-дифференцированиях первичных алгебр Ли*, Сиб. матем. ж., **40** (1999), №1, 201–213.

[5] Филиппов В. Т., *О δ-дифференцированиях первичных альтернативных и мальцевских алгебр*, Алгебра и Логика, **39** (2000), №5, 618–625.

[6] Кайгородов И. Б., *О δ-дифференцированиях простых конечномерных йордановых супералгебр*, Алгебра и логика **46** (2007), №5, 585–605. [http://arxiv.org/abs/1010.2419]

[7] Кайгородов И. Б., *О δ-дифференцированиях классических супералгебр Ли*, Сиб. матем. ж. **50** (2009), №3, 547–565. [http://arxiv.org/abs/1010.2807]

[8] Кайгородов И. Б., *О δ-супердифференцированиях простых конечномерных йордановых и лиевых супералгебр*, Алгебра и логика **49** (2010), №2, 195–215. [http://arxiv.org/abs/1010.2423]

[9] Кайгородов И. Б., *Об обобщенном дубле Кантора*, Вестник Самарского гос. университета **78** (2010), №4, 42–50. [http://arxiv.org/abs/1101.5212]

[10] Zusmanovich P., *On δ-derivations of Lie algebras and superalgebras*, J. of Algebra **324** (2010), №12, 3470–3486. [http://arxiv.org/abs/0907.2034]

[11] Желябин В. Н., Кайгородов И. Б., *О δ-супердифференцированиях простых супералгебр йордановой скобки*, Алгебра и анализ, **23** (2011), №4, 40–58. [http://arxiv.org/abs/1106.2884]

[12] Кайгородов И. Б., *О δ-супердифференцированиях полупростых конечномерных йордановых супералгебр*, Мат. заметки, принято к печати, [http://arxiv.org/abs/1106.2680]

[13] Кайгородов И. Б., Охапкина Е. М., *О δ-дифференцированиях полупростых структуризуемых алгебр*, сдано в печать.

[14] Кайгородов И. Б., *Об обобщенных δ-дифференцированиях*, сдано в печать.

[15] Ling W., *On structure of n-Lie algebras*, Thesis, Siegen University-GHS-Siegen (1993), 1–61.

[16] Филиппов В. Т., *n-Лиевы алгебры*, Сиб. мат. ж., **26** (1985), №6, 126-140.

[17] Пожидаев А. П., *n-Арные алгебры Мальцева,* Алгебра и логика, **40** (2001), №3, 309–329.

[18] Pozhidaev A. P., Saraiva P., *On Derivations of the Ternary Malcev Algebra M_8,* Comm. Algebra, **34** (2006), №10, 3593–3608.

[19] Пожидаев А. П., *Корневое разложение тернарной алгебры Мальцева M_8,* Сиб. матем. журн., **46** (2005), №4, 901–906.

[20] Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И., *Кольца, близкие к ассоциативным,* М.: Наука (1978).