# GENERALIZED $\delta$-DERIVATIONS

**Ivan Kaygorodov**
e-mail: kib@math.nsc.ru
*Sobolev Inst. of Mathematics*
*Novosibirsk, Russia*

**Abstract:**

We defined generalized $\delta$-derivations of algebra $A$ as linear mapping $\chi$ associated with usual $\delta$-derivation $\phi$ by the rule

$$\chi(xy) = \delta(\chi(x)y + x\phi(y)) = \delta(\phi(x)y + x\chi(y))$$

for any $x, y \in A$. We described generalized $\delta$-derivations of prime alternative algebras, prime Lie algebras and superalgebras, unital algebras, and semisimple finite-dimensional Jordan superalgebras. In this cases we proved that generalized $\delta$-derivation is a generalized derivation or $\delta$-derivation. After that we described $\delta$-superderivations of superalgebras «KKM Double», arising from prime alternative algebras, prime Lie algebras and superalgebras, unital algebras, and semisimple finite-dimensional Jordan superalgebras. In the end, we constructed new examples of non-trivial $\delta$-derivations of Lie algebras.

**Key words:** generalized $\delta$-derivation, $\delta$-(super)derivation, alternative algebra, Lie algebra, Lie superalgebra, Jordan superalgebra.

## 1. Введение

Понятие антидифференцирования алгебры, являющееся частным случаем $\delta$-дифференцирования, т.е. $(-1)$-дифференцированием, рассматривалось в работах [1, 2]. В дальнейшем, в работе [3] появляется определение $\delta$-дифференцирования алгебры. Напомним, что при фиксированном $\delta$ из основного поля $F$, под $\delta$-дифференцированием алгебры $A$ понимают линейное отображение $\phi$, удовлетворяющее условию

$$\phi(xy) = \delta(\phi(x)y + x\phi(y)) \tag{1}$$

для произвольных элементов $x, y \in A$. В работе [3] описаны $\frac{1}{2}$-дифференцирования произвольной первичной алгебры Ли $A$ ($\frac{1}{6} \in F$) с невырожденной симметрической инвариантной билинейной формой. А именно, доказано, что линейное отображение $\phi$: $A \to A$ является $\frac{1}{2}$-дифференцированием тогда и только тогда, когда $\phi \in \Gamma(A)$, где $\Gamma(A)$ — центроид алгебры $A$. Отсюда следует, что если $A$ — центральная простая алгебра Ли над полем характеристики $p \neq 2, 3$ с невырожденной симметрической инвариантной билинейной формой, то любое $\frac{1}{2}$-дифференцирование $\phi$ имеет вид $\phi(x) = \alpha x$, для некоторого $\alpha \in F$. В. Т. Филиппов доказал [4], что любая первичная алгебра Ли не имеет ненулевого $\delta$-дифференцирования, если $\delta \neq -1, 0, \frac{1}{2}, 1$. В работе [4] показано, что любая первичная алгебра Ли $A$ ($\frac{1}{6} \in \Phi$) с ненулевым антидифференцированием является 3-мерной центральной простой алгеброй над полем частных центра $Z_R(A)$ своей алгебры правых умножений $R(A)$. Также в этой работе был построен пример нетривиального $\frac{1}{2}$-дифференцирования для алгебры Витта $W_1$, т.е. такого $\frac{1}{2}$-дифференцирования, которое не является элементом центроида алгебры $W_1$. В [5] описаны $\delta$-дифференцирования первичных альтернативных и нелиевых мальцевских алгебр с некоторыми ограничениями на кольцо операторов $\Phi$. Как оказалось, алгебры из этих классов не имеют нетривиальных $\delta$-дифференцирований.

В работе [6] было дано описание $\delta$-дифференцирований простых конечномерных йордановых супералгебр над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль. В дальнейшем, в работе [7] были описаны $\delta$-дифференцирования классических супералгебр Ли. Работа [8] посвящена описанию $\delta$-дифференцирований полупростых конечномерных йордановых супералгебр над произвольным полем характеристики отличной от 2 и $\delta$-(супер)дифференцирований простых конечномерных лиевых и йордановых супералгебр над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль. Для алгебр и супералгебр из работ [6, 7, 8] было показано отсутствие нетривиальных $\delta$-(супер)дифференцирований. В дальнейшем, результаты [7] получили обобщение в работе П. Зусмановича [10]. Им было дано описание $\delta$-(супер)дифференцирований первичных супералгебр Ли. А именно, он доказал, что первичная супералгебра Ли не имеет нетривиальных $\delta$-(супер)дифференцирований при $\delta \neq -1, 0, \frac{1}{2}, 1$. П. Зусманович показал, что для совершенной (т.е., такой что $[A, A] = A$) супералгебры Ли $A$ с нулевым центром и невырожденной суперсимметрической инвариантной билинейной формой, у которой $A = [A, A]$, пространство $\frac{1}{2}$-(супер)дифференцирований совпадает с (супер)центроидом супералгебры $A$. Также, П. Зусманович, в случае положительной характеристики поля, дал положительный ответ на вопрос В. Т. Филиппова о существовании делителей нуля в кольце $\frac{1}{2}$-дифференцирований первичной алгебры Ли, сформулированный в [4]. В свое время, И. Б. Кайгородовым и В. Н. Желябиным [11], рассматривались $\delta$-(супер)дифференцирования простых унитальных супералгебр йордановой скобки, где ими было показано отсутствие нетривиальных $\delta$-(супер)дифференцирований простых супералгебр йордановой скобки, не являющихся супералгебрами векторного типа и было приведено описание $\delta$-(супер)дифференцирований простых конечномерных унитальных йордановых супералгебр над алгебраическим замкнутым полем характеристики $p \neq 2$. Как следствие, была обнаружена связь между наличием нетривиальных $\delta$-дифференцирований простых унитальных супералгебр йордановых скобок и специальностью этой супералгебры. В дальнейшем, $\delta$-супердифференцирования обобщенного дубля Кантора, построенного на первичной ассоциативной алгебре, рассматривались в работе [9]. Цикл статей по описанию $\delta$-(супер)дифференцирований простых конечномерных йордановых супералгебр заканчивается работой [12], где было дано полное описание $\delta$-(супер)дифференцирований полупростых конечномерных йордановых супералгебр над алгебраически замкнутым полем характеристики отличной от 2. В частности, были построены примеры нетривиальных $\frac{1}{2}$-(супер)дифференцирований для простых неунитальных конечномерных йордановых супералгебр.

## 2. Об обобщенных $\delta$-дифференцированиях алгебр и супералгебр.

Пусть $F$ — поле характеристики отличной от 2. Напомним определение супералгебры. Алгебра $G$ над полем $F$ называется супералгеброй (или $\mathbb{Z}_2$-градуированной алгеброй), если она представима в виде $G = G_0 \oplus G_1$, при этом справедливы соотношения $G_i G_j \subseteq G_{i+j(mod 2)}, i, j = 0, 1$.

При фиксированном элементе $\delta \in F$, для супералгебры $A = A_0 \oplus A_1$, однородное линейное отображение $\phi : A \to A$ будем называть четным *$\delta$-супердифференцированием*, если $\phi(A_i) \subseteq A_i$ и для однородных $x, y \in A_0 \cup A_1$ выполнено

$$\phi(xy) \quad = \quad \delta(\phi(x)y + x\phi(y)).$$

Под центроидом $\Gamma(A)$ супералгебры $A$ мы будем понимать множество линейных отображений $\chi : A \to A$, что для произвольных элементов $a, b$ верно

$$\chi(ab) = \chi(a)b = a\chi(b).$$

Ясно, что 1-супердифференцирование является обычным супердифференцированием; 0-супердифференцированием является произвольный эндоморфизм $\phi$ супералгебры $A$ такой, что $\phi(A^2) = 0$. Ненулевое $\delta$-супердифференцирование будем считать нетривиальным, если $\delta \neq 0, 1$ и $\phi \notin \Gamma(A)$. Легко видеть, что четное $\delta$-супердифференцирование будет являться $\delta$-дифференцированием.

Пусть $A$ — алгебра над $F$ с умножением $ab$ и обладающая дополнительной билинейной операцией $\{\ ,\ \} : A \times A \to A$. Через $Ax$ обозначим изоморфную копию алгебры $A$ и на прямой сумме векторных пространств $A \oplus Ax$ зададим умножение $\cdot$ по следующему правилу

$$a \cdot b = ab, a \cdot (bx) = (ab)x, (ax) \cdot (bx) = \{a, b\}, \text{ где } a, b \in A.$$

Мы получим структуру супералгебры на $B : B_0 = A, B_1 = Ax$. Примерами таких супералгебр являются супералгебры, построенные по процессу Кантора (см. [9, 13]). Данный процесс мы будем называть обобщенным процессом Кантора.

При рассмотрении четных $\delta$-супердифференцирований супералгебры $B$ мы приходим к понятию обобщенного $\delta$-дифференцирования алгебры $A$. Для этого достаточно заметить, что для $\phi$ — четного $\delta$-супердифференцирования $B$ верно

$$(2) \qquad \delta\phi(ax)b + \delta(ax)\phi(b) = \phi((ax)b) = \phi(a(bx)) = \delta\phi(a)(bx) + \delta a\phi(bx).$$

В силу четности $\delta$-супердифференцирования $\phi$, мы можем положить, что $\phi(bx) = \chi(b)x$, где $\chi \in End(A)$. Таким образом, соотношение (2) преобразуется к выражению

$$(3) \qquad \chi(ab) = \delta\chi(a)b + \delta a\phi(b) = \delta\phi(a)b + \delta a\chi(b).$$

Далее для алгебры $A$ линейное отображение $\chi$, связанное с $\delta$-дифференцированием $\phi$ посредством соотношения (3), мы будем называть *обобщенным $\delta$-дифференцированием*. Обобщенные $\delta$-дифференцирования неявно возникают в работе [9] при рассмотрении $\delta$-супердифференцирований обобщенного дубля Кантора, построенного на первичной ассоциативной алгебре.

Отметим, что обобщенное $\delta$-дифференцирование тесно связано с обобщенным дифференцированием. Под обобщенным дифференцированием подразумевают линейное отображение $\sigma$ алгебры $A$, которое связано с некоторым дифференцированием $D$ алгебры $A$ посредством соотношения

$$\sigma(ab) = \sigma(a)b + aD(b).$$

Примером обобщенного дифференцирования, не являющегося обыкновенным дифференцированием, может служить отображение вида $D+\psi$, где $D$ — дифференцирование и $\psi$ — элемент центроида алгебры. Заметим, что обобщенные дифференцирования рассматривались, к примеру, в работах [14, 15].

Далее, во всех леммах этого раздела, мы будем подразумевать, что $\chi$ — обобщенное $\delta$-дифференцирование, связанное с $\delta$-дифференцированием $\phi$, и $\chi_\phi = \chi - \phi$. Все алгебры будут рассматриваться над кольцом характеристики отличной от 2, а супералгебры над полем характеристики отличной от 2.

**Лемма 1.** Пусть $\chi$ — обобщенное $\delta$-дифференцирование (супер)алгебры $A$, тогда $\chi_\phi$ — является $\frac{\delta}{2}$-дифференцированием $A$ и $\chi_\phi(ab) = \delta a\chi_\phi(b) = \delta\chi_\phi(a)b$.

**Доказательство**. Рассматривая разность между выражениями (3) и (1), мы получим

$$\chi_\phi(ab) = \delta a\chi_\phi(b) = \delta\chi_\phi(a)b.$$

Далее, воспользовавшись полученным равенством, легко имеем

$$\chi_\phi(ab) = \frac{1}{2}(\delta a\chi_\phi(b) + \delta\chi_\phi(a)b).$$

Данное означает, что $\chi_\phi$ является $\frac{\delta}{2}$-дифференцированием алгебры $A$. Лемма доказана.

Ясно, что обобщенное 1-дифференцирование является отображением вида $D+\psi$, где $D$ — дифференцирование, а $\psi$ — элемент центроида. Обобщенным 0-дифференцированием является произвольный эндоморфизм $\chi$ с условием $\chi(A^2)=0$. Обобщенное $\delta$-дифференцирование $\chi$ является нетривиальным, если $\delta \neq 0,1$ и $\chi$ не является $\delta$-дифференцированием. Следует отметить, что условие $\chi_\phi = 0$, непосредственно, влечет тривиальность $\chi$.

Напомним, что первичной (супер)алгеброй называют алгебру $A$, которая не обладает двумя взаимно аннулирующими друг друга левыми идеалами. В частности, для первичной (супер)алгебры $A$ верно

$$Ann(A) = \{x \mid Ax = 0\} = \{0\}.$$

**Теорема 2.** Первичная алгебра Ли $A$ не имеет нетривиальных обобщенных $\delta$-дифференцирований.

**Доказательство.** В силу показанного в лемме 1, мы можем заключить, что выполняется следующая цепочка соотношений

$$\delta(x\chi_\phi(z))y + \delta x(y\chi_\phi(z)) = \delta(xy)\chi_\phi(z) = \chi_\phi((xy)z) =$$
$$\chi_\phi((xz)y + x(yz)) = \delta^2((x\chi_\phi(z))y + x(y\chi_\phi(z))).$$

Откуда имеем
$$0 = (x\chi_\phi(z))y + x(y\chi_\phi(z)) = \chi_\phi(xy)z.$$
Таким образом,
$$\chi_\phi(A^2) \subseteq Ann(A) = \{0\}.$$
Отсюда получаем $\chi_\phi(x)y = 0$ и
$$\chi_\phi(A) \subseteq Ann(A) = \{0\}.$$
Что эквивалентно тривиальности $\chi$. Теорема доказана.

**Теорема 3.** Первичная лиева супералгебра $A$ не имеет нетривиальных обобщенных $\delta$-дифференцирований.

**Доказательство.** Легко понять, что пространство $End(A)$ является $\mathbb{Z}_2$-градуированным, то есть, любое линейное отображение $\psi \in End(A)$ мы можем представить в виде суммы четного и нечетного отображений $\psi_0 + \psi_1$, где $\psi_0(A_i) \subseteq A_i$ и $\psi_1(A_i) \subseteq A_{i+1}$.

Будем считать, что $\chi$ и $\phi$ являются четными отображениями, то есть верно
$$\chi(A_i) \subseteq A_i, \phi(A_i) \subseteq A_i.$$
Тогда, в силу показанного в лемме 1, мы можем заключить, что для однородных элементов $x, y, z \in A_0 \cup A_1$, выполняется следующая цепочка соотношений
$$\delta(x\chi_\phi(z))y + (-1)^{p(x)p(z)}\delta x(y\chi_\phi(z)) = \delta(xy)\chi_\phi(z) = \chi_\phi((xy)z) =$$
$$\chi_\phi((xz)y + (-1)^{p(x)p(z)}x(yz)) = \delta^2((x\chi_\phi(z))y + (-1)^{p(x)p(z)}x(y\chi_\phi(z))).$$
Откуда получаем
$$0 = (x\chi_\phi(z))y + (-1)^{p(x)p(z)}x(y\chi_\phi(z)) = (xy)\chi_\phi(z).$$
Понятно, что из законов дистрибутивности, также следует, что равенство $\chi_\phi(xy)z = 0$ выполняется для произвольных $x, y, z \in A$, где $\chi_\phi$ — четное отображение, определенное выше.

Пусть $\chi$ и $\phi$ являются нечетными отображениями, то есть верно
$$\chi(A_i) \subseteq A_{i+1}, \phi(A_i) \subseteq A_{i+1}.$$
Положим $x_i, y_i \in A_i$ и $x, y, z \in A$.

Легко заметить, что
$$\delta(x_0\chi_\phi(z))y + \delta x_0(y\chi_\phi(z)) = \delta(x_0y)\chi_\phi(z) = \chi_\phi((x_0y)z) =$$
$$\chi_\phi((x_0z)y + x_0(yz)) = \delta^2((x_0\chi_\phi(z))y + x_0(y\chi_\phi(z))).$$
Откуда имеем
$$0 = (x_0\chi_\phi(z))y + x_0(y\chi_\phi(z)) = (x_0y)\chi_\phi(z),$$
то есть $\chi_\phi(x_0y)z = 0$.

Отметим, что
$$\chi_\phi(x_1y_0) = \delta\chi_\phi(x_1)y_0 = -\delta y_0\chi_\phi(x_1) = -\delta\chi_\phi(y_0)x_1 = -\delta x_1\chi_\phi(y_0) = -\chi_\phi(x_1y_0),$$
то есть $\chi_\phi(x_1y_0)z = 0$.

Заметим, что
$$\chi_\phi(x_1y_1) = \delta\chi_\phi(x_1)y_1 = -\delta y_1\chi_\phi(x_1) = -\chi_\phi(y_1x_1) = -\chi_\phi(x_1y_1),$$
то есть $\chi_\phi(x_1y_1)z = 0$ и $\chi_\phi(x_1y)z = 0$.

Теперь мы можем заключить, что $\chi_\phi(xy)z = 0$, где $x, y, z$ произвольные элементы $A$ и $\chi_\phi$ либо четное, либо нечетное отображение.

Таким образом,
$$\chi_\phi(A^2) \subseteq Ann(A) = \{0\}.$$
Откуда получаем $\chi_\phi(x)y = 0$ и
$$\chi_\phi(A) \subseteq Ann(A) = \{0\}.$$
Что эквивалентно тривиальности $\chi$. Теорема доказана.

**Теорема 4.** Первичная альтернативная алгебра $A$ не имеет нетривиальных обобщенных $\delta$-дифференцирований.

**Доказательство.** В силу показанного в лемме 1, мы можем заключить, что выполняется следующая цепочка соотношений
$$\delta\chi_\phi(y)x^2 = \chi_\phi(yx^2) = \chi_\phi((yx)x) = \delta^2((\chi_\phi(y)x)x) = \delta^2\chi_\phi(y)x^2.$$
Таким образом, мы получаем $y\chi_\phi(x^2) = 0$, то есть $\chi_\phi(x^2) \subseteq Ann(A) = \{0\}$. Откуда, посредством линеаризации, легко вытекает, что $\chi_\phi(xy + yx) = 0$. Рассмотрим на $A$ новое умножение:
$$a \odot b = \frac{1}{2}(ab + ba).$$
Полученную алгебру с новым умножением $\odot$, как обычно, будем обозначать $A^{(+)}$. В силу работ [16, 17], если $A$ — альтернативная первичная алгебра, то $A^{(+)}$ — йорданова первичная алгебра. Таким образом, мы имеем, что
$$\chi_\phi(x) \odot y = 0,$$
что влечет
$$\chi_\phi(x) \subseteq Ann(A^{(+)}) = \{0\}.$$
Исходя из полученного, мы имеем тривиальность $\chi$. Теорема доказана.

**Теорема 5.** Унитальная (супер)алгебра $A$ не имеет нетривиальных обобщенных $\delta$-дифференцирований.

**Доказательство.** Заметим, что если $e$ — единица (супер)алгебры $A$, то
$$\chi_\phi(e) = \chi_\phi(ee) = \delta\chi_\phi(e) \text{ и } \chi_\phi(e) = 0.$$
Таким образом, легко видеть, что
$$\chi_\phi(x) = \chi_\phi(ex) = 2\chi_\phi(e)x = 0.$$
Откуда мы получаем тривиальность $\chi$. Теорема доказана.

В частности, теорема 5 дает отсутствие нетривиальных обобщенных $\delta$-дифференцирований для полупростых конечномерных йордановых алгебр и всего класса структуризуемых алгебр над произвольным полем характеристики отличной от 2.

**Теорема 6.** Полупростая конечномерная йорданова супералгебра $A$ над алгебраически замкнутым полем характеристики отличной от 2 не имеет нетривиальных обобщенных $\delta$-дифференцирований.

**Доказательство.** Согласно работе [18], если $A$ полупростая конечномерная йорданова супералгебра над алгебраически замкнутым полем характеристики отличной от 2, то $A = \bigoplus_{i=1}^{s} T_i \oplus J_1 \oplus \ldots \oplus J_t$, где $J_1, \ldots, J_t$ — простые йордановы супералгебры и $T_i = J_{i1} \oplus \ldots \oplus J_{ir_i} + K_i \cdot 1$, $K_1, \ldots, K_s$ — расширения поля $F$ и $J_{i1}, \ldots, J_{ir_i}$ — простые неунитальные йордановы супералгебры над полем $K_i$. Пусть некоторая супералгебра $J$ представима в виде прямой суммы супералгебр $B \oplus C$ и $b$ — элемент супералгебры $B$, который не являются делителем нуля, а $c$ — произвольный элемент $C$. Тогда

$$0 = \chi_\phi(bc) = \delta b \chi_\phi(c),$$

откуда получаем, что $\chi_\phi(c) \in C$. Благодаря чему, можем заключить, что $\chi_\phi(J_i) \subseteq J_i$ и $\chi_\phi(T_i) \subseteq T_i$. Также, легко заметить, что $\phi(J_i) \subseteq J_i$ и $\phi(T_i) \subseteq T_i$. Исходя из теоремы 5, мы заключаем, что ограничение $\chi$ на унитальные супералгебры $T_i$ и $J_i$ — тривиальны.

Следовательно, нам достаточно показать тривиальность ограничения $\chi$ на $J_i$ в случае, когда $J_i$ является неунитальной простой конечномерной йордановой супералгеброй. Данные супералгебры исчерпываются супералгебрами $K_3, V_{1/2}(Z, D)$ и супералгеброй $K_9$ в случае характеристики поля $p = 3$. Их определения можно найти, к примеру, в работах [6, 12, 18]. В частности, известно, что четные части супералгебр $K_3, K_9, V_{1/2}(Z, D)$ являются унитальными алгебрами. Согласно [12, теорема 10], в этом случае, $J_i$ не имеет нетривиальных $\delta$-дифференцирований при $\delta \neq \frac{1}{2}$. Таким образом, по лемме 1 и определению нетривиального обобщенного $\delta$-дифференцирования, $\chi_\phi = 0$ при $\delta \neq 2$. Случай $\delta = 2$ рассмотрим подробней. Легко понять, что если $e$ — единица $(J_i)_0$, то $\chi_\phi(e) \in (J_i)_1$. Из определения супералгебр $K_3, V_{1/2}(Z, D)$, известно, что $2ez = z$, при $z \in (J_i)_1$. Следовательно, если $J_i = K_3, V_{1/2}(Z, D)$, то для $z \in (J_i)_1$ верно $\chi_\phi(z) = 2\chi_\phi(ez) = 4e\chi_\phi(z)$, то есть $\chi_\phi(z) = 0$ (при $p \neq 3$) и $\chi_\phi(z) \in (J_i)_0$ (при $p = 3$). Если $J_i = K_3$, то известно, что для нее существуют такие $w, t \in (J_i)_1$, что $e = wt$, откуда, если $p \neq 3$, вытекает $\chi_\phi(e) = 0$. Пусть теперь $p \neq 3, J_i = V_{1/2}(Z, D)$, тогда

$$0 = \chi_\phi(ax) = 4(\chi_\phi(a) \cdot x) \text{ и } \chi_\phi(a) = a_{\chi_\phi} x,$$

то есть $D(a_{\chi_\phi}) = 0$, что дает $a_{\chi_\phi} = \alpha^{a_{\chi_\phi}} e, \alpha^{a_{\chi_\phi}}$ — элемент основного поля супералгебры $J_i$. Заметим, что

$$\alpha^{a_{\chi_\phi}} ex = \chi_\phi(a) = 2\chi_\phi(e)a = \alpha^{e_{\chi_\phi}} ax$$

и, учитывая, что $e$ и $a$ мы можем взять линейно независимые, получаем $\chi_\phi = 0$.

Если $p = 3$ и $J_i = V_{1/2}(Z, D)$ то при $z, y \in (J_i)_0$, мы получаем $\chi_\phi(e) = bx$ и

$$\chi_\phi(z) = 2\chi_\phi(e) \cdot z = (zb)x,$$

$$\chi_\phi(zx) = \chi_\phi(e) \cdot zx = D(b)z - bD(z).$$

Таким образом, имеем что

$$\chi_\phi(zx \cdot yx) = 2\chi_\phi(zx) \cdot yx,$$

$$((D(z)y - zD(y))b)x = ((D(b)z - bD(z))y)x,$$

то есть $D(zyb) = 0$, что влечет $D(b) = 0$ и $b = \beta e$, где $\beta$ — элемент основного поля супералгебры $J_i$. Следовательно, $D(\beta z) = 0$. Замечая, что $z$ может быть линейно независимо с $e$, и в силу того, что $D$ обнуляет только элементы вида $\gamma e$, где $\gamma$ — элемент основного поля супералгебры $J_i$, получаем $\beta = 0$. Полученное дает тривиальность $\chi$.

Если $p = 3$ и $J_i = K_9, K_3$, то при $z, t \in (J_i)_1$ имеем

$$\chi_\phi(zt) = 2\chi_\phi(z) \cdot t = 2t \cdot \chi_\phi(z) = \chi_\phi(tz) = -\chi_\phi(zt).$$

Отметим, что здесь мы воспользовались тем, что $\chi_\phi(z) \in (J_i)_0$. Таким образом, $\chi_\phi((J_i)_1^2) = 0$, что влечет $\chi_\phi(e) = 0$ и тривиальность $\chi$.

Исходя из вышеприведенных рассуждений, теорема доказана.

## 3. О $\delta$-дифференцированиях обобщенного дубля Кантора.

Напомним, что в работе [9] было введено и рассматривалось понятие обобщенного дубля Кантора. Как следует из результатов работы [11], особый интерес представляет рассмотрение $\delta$-дифференцирований обобщенного дубля Кантора, построенного на супералгебре с тривиальной нечетной компонентой. Данное заключение вытекает из того факта, что простые унитальные супералгебры йордановой скобки имеют нетривиальные $\delta$-дифференцирования только когда они построены на супералгебрах с тривиальной нечетной частью [11].

Пусть $A$ — алгебра с операцией $\{\ ,\ \} : A \times A \to A$ и $K(A)$ — супералгебра, полученная с помощью обобщенного процесса Кантора, описанного в параграфе 2. Через $\Delta_\delta(A)$ и $\Gamma(A)$ обозначим, соответственно, множество $\delta$-дифференцирований $A$ и центроид алгебры $A$, а через $\Delta_\delta(A, \{\ ,\ \})$ — множество $\delta$-дифференцирований $A$ по операции $\{\ ,\ \}$. Для $\phi$ — линейного отображения супералгебры $K(A)$, под $\phi|_A$ будем подразумевать ограничение отображения $\phi$ на подалгебру $A$.

**Теорема 7.** Пусть $\phi$ — нетривиальное четное $\delta$-дифференцирование супералгебры $K(A)$, где $A$ — первичная альтернативная алгебра над полем характеристики отличной от 2,3. Тогда

$$\delta = \frac{1}{2} \text{ и } \phi(ax) = \phi|_A(a)x, \text{ где } \phi|_A \in \Gamma(A) \cap \Delta_{\frac{1}{2}}(A, \{\ ,\ \}).$$

**Доказательство.** Пользуясь предварительными рассуждениями из параграфа 2 и теоремой 4, легко понять, что при $\phi$ — четном $\delta$-дифференцировании супералгебры $K(A)$, мы имеем $\phi(ax) = \phi(a)x$ для любого $a \in A$. С другой стороны, мы видим, что

$$\phi(ax \cdot bx) = \delta\phi(ax) \cdot bx + \delta ax \cdot \phi(bx),$$

то есть

$$\phi\{a, b\} = \delta\{\phi(a), b\} + \delta\{a, \phi(b)\}.$$

Таким образом, четные $\delta$-дифференцирования супералгебры $K(A)$ определяются множеством отображений $\Delta_\delta(A) \cap \Delta_\delta(A, \{\ ,\ \})$, где каждое отображение $\psi \in \Delta_\delta(A) \cap \Delta_\delta(A, \{\ ,\ \})$ продолжается на нечетную компоненту супералгебры $K(A)$ по принципу $\psi(ax) = \psi(a)x$.

Напомним, что в силу [5], первичные альтернативные алгебры (над полем характеристики отличной от 2,3) не имеют нетривиальных $\delta$-дифференцирований, то есть супералгебра $K(A)$, построенная на первичной альтернативной алгебре $A$ не имеет нетривиальных четных $\delta$-дифференцирований при $\delta \neq \frac{1}{2}$.

Исходя из выше сказанного, множество четных $\frac{1}{2}$-дифференцирований супералгебры $K(A)$ определяются посредством множества $\Gamma(A) \cap \Delta_{\frac{1}{2}}(A, \{\ ,\ \})$ и условия $\phi(ax) = \phi|_A(a)x$, где $\phi|_A \in \Gamma(A) \cap \Delta_{\frac{1}{2}}(A, \{\ ,\ \})$. Теорема доказана.

**Теорема 8.** Пусть $\phi$ — нетривиальное четное $\delta$-дифференцирование супералгебры $K(A)$, где $A$ — первичная лиева алгебра (либо первичная супералгебра Ли, рассматриваемая как алгебра). Тогда $\delta = \frac{1}{2}, -1$; множество четных $(-1)$-дифференцирований (соответственно, четных $\frac{1}{2}$-дифференцирований) супералгебры $K(A)$ определяется посредством множества отображений $\Delta_{-1}(A) \cap \Delta_{-1}(A, \{\ ,\ \})$ (соответственно, $\Delta_{\frac{1}{2}}(A) \cap \Delta_{\frac{1}{2}}(A, \{\ ,\ \})$) и условия $\phi(ax) = \phi(a)x$.

**Доказательство.** Пользуясь предварительными рассуждениями из параграфа 2 и теоремой 2 (в случае супералгебры, теоремой 3), легко понять, что при $\phi$ — четном $\delta$-дифференцировании супералгебры $K(A)$, мы имеем $\phi(ax) = \phi(a)x$ для любого $a \in A$. С другой стороны, мы видим, что

$$\phi(ax \cdot bx) = \delta\phi(ax) \cdot bx + \delta ax \cdot \phi(bx),$$

то есть

$$\phi\{a, b\} = \delta\{\phi(a), b\} + \delta\{a, \phi(b)\}.$$

Таким образом, четные $\delta$-дифференцирования супералгебры $K(A)$ определяются множеством отображений $\Delta_\delta(A) \cap \Delta_\delta(A, \{\ ,\ \})$, где каждое отображение $\psi \in \Delta_\delta(A) \cap \Delta_\delta(A, \{\ ,\ \})$ продолжается на нечетную компоненту супералгебры $K(A)$ по принципу $\psi(ax) = \psi(a)x$.

Согласно результатам [1, 3, 4] (в случае супералгебры, [10]), первичные лиевые алгебры (соответственно, первичные лиевы супералгебры, рассматриваемые как алгебры) не имеют нетривиальных $\delta$-дифференцирований при $\delta \neq -1, \frac{1}{2}$. Таким образом, множество четных $\delta$-дифференцирований супералгебры $K(A)$, построенной на первичной лиевой алгебре $A$ (либо первичной лиевой супералгебре $A$, рассматриваемой как алгебра), исчерпывается случаями $(-1)$-дифференцирований и $\frac{1}{2}$-дифференцирований. Множество $(-1)$-дифференцирований (соответственно, $\frac{1}{2}$-дифференцирований) супералгебры $K(A)$ определяется посредством множества отображений $\Delta_{-1}(A) \cap \Delta_{-1}(A, \{\ ,\ \})$ (соответственно, $\Delta_{\frac{1}{2}}(A) \cap \Delta_{\frac{1}{2}}(A, \{\ ,\ \})$) и условия $\phi(ax) = \phi(a)x$. Теорема доказана.

**Теорема 9.** Пусть $\phi$ — нетривиальное четное $\delta$-дифференцирование супералгебры $K(A)$, где $A$ — унитальная алгебра или полупростая йорданова супералгебра над алгебраически замкнутым полем характеристики отличной от 2. Тогда

$$\delta = \frac{1}{2} \text{ и } \phi(ax) = \phi|_A(a)x, \text{ где } \phi|_A \in \Delta_{\frac{1}{2}}(A) \cap \Delta_{\frac{1}{2}}(A, \{\ ,\ \}).$$

**Доказательство.** Утвеждение вытекает из результатов об описании $\delta$-дифференцирований полупростой йордановой алгебры над алгебраически замкнутым полем характеристики отличной от 2 [12] и $\delta$-дифференцирований унитальной алгебры [6, Теорема 2.1]. Согласно этим результатам, на данных классах алгебр и супералгебр возможны только нетривиальные $\frac{1}{2}$-дифференцирования. Таким образом, пользуясь схемой доказательств теорем 7 и 8, мы получаем требуемое. Теорема доказана.

## 4. Новые примеры нетривиальных $\delta$-дифференцирований алгебр Ли.

Рассмотрим супералгебру $K(A)$, построенную по обобщенному процессу Кантора (см. параграф 2), где $A$ — простая алгебра Ли с умножением $[\ ,\ ]$. Умножение $\cdot$ супералгебры $K(A)$ будет задаваться следующим правилом:

$$a \cdot b = [a,b],\ a \cdot bx = [a,b]x,\ ax \cdot b = [a,b]x,\ ax \cdot bx = [a,b].$$

Легко заметить, что полученная алгебра $K(A) = A \oplus Ax$ будет алгеброй Ли. В данном случае, множество четных $(-1)$-дифференцирований (соответственно, $\frac{1}{2}$-дифференцирований) супералгебры $K(A)$ определяется множеством $\Delta_{-1}(A)$ (соответственно, $\Delta_{\frac{1}{2}}(A)$) и условием $\phi(ax) = \phi(a)x$ для $\phi \in \Delta_\delta(A), \delta = -1, \frac{1}{2}$.

Исходя из вышеизложеного, теоремы 8, и известных примеров нетривиальных $(-1)$-дифференцирований для простой алгебры $sl_2$ (см. [1] и пример 1 ниже) и нетривиальных $\frac{1}{2}$-дифференцирований для простой алгебры Витта $W_1$ (см. [4] и пример 2 ниже), мы получаем новые примеры нетривиальных $(-1)$-дифференцирований и $\frac{1}{2}$-дифференцирований для алгебр Ли, построенных из простых лиевых алгебр по обобщенному процессу Кантора.

Напомним вышеупомянутые примеры нетривиальных $\delta$-дифференцирований для простых алгебр Ли.

**Пример 1** [1]**.** Пусть умножение алгебры $sl_2 \cong k^3$ определено следующим образом

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} bx - cy \\ 2ay - 2bx \\ 2cx - 2az \end{bmatrix},\ \text{где}\ \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

Через $Antider(sl_2)$ означим пространство антидифференцирований алгебры $sl_2$, тогда $Antider(sl_2) = \left\{ \begin{bmatrix} -2a & b & c \\ 2c & a & d \\ 2b & e & a \end{bmatrix} | a,b,c,d,e \in k \right\}$.

**Пример 2** [4]**.** Алгебра $W_1$ представлет собой алгебру дифференцирований кольца многочленов от одной переменной $x$. Отображение

$$R : y \to ys(x_1, x_2, x_3),$$

где

$$ys(x_1, x_2, x_3) = \sum_{\sigma \in S_3} (-1)^\sigma y x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} x_{\sigma(3)}$$

— стандартный лиев многочлен четвертой степени, при некоторых $x_1, x_2, x_3$ — элементах алгебры $W_1$, будет являться нетривиальным $\frac{1}{2}$-дифференцированием.

В заключение, автор выражает благодарность В. Н. Желябину и А. П. Пожидаеву за внимание к работе и конструктивные замечания.

## Список литературы


[1] Hopkins N. C., *Generalizes Derivations of Nonassociative Algebras*, Nova J. Math. Game Theory Algebra, **5** (1996), №3, 215–224.

[2] Филиппов В. Т., *Об алгебрах Ли, удовлетворяющих тождеству 5-ой степени*, Алгебра и логика, **34** (1995), №6, 681–705.

[3] Филиппов В. Т., *О $\delta$-дифференцированиях алгебр Ли*, Сиб. матем. ж., **39** (1998), №6, 1409–1422.

[4] Филиппов В. Т., *О $\delta$-дифференцированиях первичных алгебр Ли*, Сиб. матем. ж., **40** (1999), №1, 201–213.

[5] Филиппов В. Т., *О $\delta$-дифференцированиях первичных альтернативных и мальцевских алгебр*, Алгебра и Логика, **39** (2000), №5, 618–625.

[6] Кайгородов И. Б., *О $\delta$-дифференцированиях простых конечномерных йордановых супералгебр*, Алгебра и логика **46** (2007), №5, 585–605. [ http://arxiv.org/abs/1010.2419 ]

[7] Кайгородов И. Б., *О $\delta$-дифференцированиях классических супералгебр Ли*, Сиб. матем. ж. **50** (2009), №3, 547–565. [ http://arxiv.org/abs/1010.2807 ]

[8] Кайгородов И. Б., *О $\delta$-супердифференцированиях простых конечномерных йордановых и лиевых супералгебр*, Алгебра и логика **49** (2010), №2, 195–215. [ http://arxiv.org/abs/1010.2423 ]

[9] Кайгородов И. Б., *Об обобщенном дубле Кантора*, Вестник Самарского гос. университета **78** (2010), №4, 42–50. [ http://arxiv.org/abs/1101.5212 ]

[10] Zusmanovich P., *On $\delta$-derivations of Lie algebras and superalgebras*, J. of Algebra **324** (2010), №12, 3470–3486. [ http://arxiv.org/abs/0907.2034 ]

[11] Желябин В. Н., Кайгородов И. Б., *О $\delta$-супердифференцированиях простых супералгебр йордановой скобки*, Алгебра и анализ, **23** (2011), №4, 40–58. [ http://arxiv.org/abs/1106.2884 ]

[12] Кайгородов И. Б., *О $\delta$-супердифференцированиях полупростых конечномерных йордановых супералгебр*, Мат. заметки, принято к печати, [ http://arxiv.org/abs/1106.2680 ]

[13] Кантор И. Л., *Йордановы и лиевы супералгебры, определяемые алгеброй Пуассона*, в сб. «Алгебра и анализ», Томск, изд-во ТГУ (1990), 89–126.

[14] Hvala B., *Generalized derivations in rings,* Comm. Algebra, **26** (1998), №4, 1147–1166.

[15] Lee T.-K., Shiue W-K., *Identities with generalized derivations,* Comm. Algebra, **29** (2001), №10, 4437–4450.

[16] Пчелинцев С. В., *Первичные альтернативные алгебры, близкие к коммутативным*, Изв. РАН. Сер. матем., **68** (2004), №1, 183–206.

[17] Пчелинцев С. В., *Исключительные первичные альтернативные алгебры*, Сиб. матем. журн., **48** (2007), №6, 1322–1337.

[18] Zelmanov E., *Semisimple finite dimensional Jordan superalgebras*, (English) [A] Fong, Yuen (ed.) et al., Lie algebras, rings and related topics. Papers of the 2nd Tainan-Moscow international algebra workshop '97, Tainan, Taiwan, January 11–17, 1997. Hong Kong: Springer (2000), 227–243.