振动函数与函数的振动熵

王小舟

（齐齐哈尔广播电视大学，黑龙江 齐齐哈尔 161005）

摘要：振动是函数普遍存在的现象。本文定义了振动函数与函数的振动熵。对函数的振动性质进行了初步的讨论。振动熵是对函数振动程度的度量（振动愈剧烈振动熵的值愈大）。导数是振动熵的特例。函数振动理论的一个应用实例是：在封闭的股票市场的博弈系统中有参与者以全智能对策作为行动，该博弈系统特征函数（股价走势）的熵函数是趋势减小函数。

关键词：数学分析；振动函数；振动熵；策略的智能

中图分类号：O172; O225

Vibration Function and Vibration-Entropy of the Function

WANG Xiaozhou

(Qiqihaer Broadcasting University, Heilongjiang Qiqihaer 161005)

Abstract: Vibration is a common phenomenon in the function. This article defines the vibration function and Vibration-Entropy of the Function. It gives an elementary discussion of the vibration character in the function. vibration-entropy is a measure of the degree vibration function.(The more intense vibration the greater the value of the vibration-entropy). Derivative is a special case of vibration-entropy. The vibration theory of the function can be an example:In the colse game of store market participants will act on with their total intellect strategy,and the function entropy of the character function (tendency of store market price)in the game is a decrease tendency function.

Key words: Mathematical Analysis; Vibration Function; Vibration-Entropy; Strategy Intellect

0 引言

一些问题的研究[1]需要使用函数的振动理论。文献[1]中给出了无限区间上的振动函数的定义。[1]中的定理 1 本文不再叙述，但它是重要的。用大写的英文字母记区间，区间Q的测度记做$|Q|$，左端点a右端点b的区间记做Q_a^b，于是$|Q_a^b|=b-a$。

1 振动函数

定义 1（振动函数 Vibration Function）：Q上函数f，若$\exists\,\delta,\lambda>0$，$\forall$ 闭$T\subseteq Q$（$|T|=\delta$），有$\max\{f(x):x\in T\}-\min\{f(x):x\in T\}\geq 2\lambda$，就称$f$是$Q$上的振动函数。数对$\{\delta,2\lambda\}$称为$f$在$Q$上的一个振动条件。非振动的函数也称为寂的函数。

定理 1：f在Q_a^b上寂$\Leftrightarrow$ $f(x)\equiv c$（$x\in Q_a^b$，c是常数）。

证明：$\Rightarrow$。假设$\exists\,\xi\in Q_a^b$，使$f(\xi)\neq f(\frac{a+b}{2})$。取$\delta=\max\{\xi-a,b-\xi\}>0$，$2\lambda=\left|f(\xi)-f(\frac{a+b}{2})\right|>0$。对$\forall$ 闭$T\subseteq Q_a^b$（$|T|=\delta$）有，$\xi\in T$，$\frac{a+b}{2}\in T$。就有

$$\max\{f(x):x\in T\}-\min\{f(x):x\in T\}\geq\left|f(\xi)-f(\frac{a+b}{2})\right|=2\lambda。$$

作者简介：王小舟（1947-），男，副教授，主要研究方向：数学分析. E-mail: wangxiaozhou168@163.com

此结果与 f 在 Q_a^b 上寂矛盾，于是 $f(x)\equiv f(\frac{a+b}{2})$（$x\in Q_a^b$）。必要性得证。

$\Leftarrow$。若 $f(x)\equiv c$（$x\in Q$），对 $\forall\ \delta,\lambda>0$，闭 $T\subseteq Q$，有

$$\max\left\{f(x):x\in T\right\}-\min\left\{f(x):x\in T\right\}=c-c=0<2\lambda。$$

于是 f 在 Q 上寂，充分性得证。▌

由定理 1 充分性的证明知道：在任意区间上 f 寂的充分条件是 $f(x)\equiv c$（c 是常数）。

推论 1.1： f 在 Q_a^b 上寂 $\Leftrightarrow$ $f'(x)\equiv 0$（$x\in Q_a^b$）。（证明：略）

定义 2： 若 f 在 Q 的任意子区间上振动，则称 f 在 Q 上处处振动。

定理 2： f 在 Q 上处处振动 $\Leftrightarrow$ f 在 Q 上不存在导数恒等于 0 的子区间 $\Leftrightarrow$ $0<\delta\le|Q|$（$\{\delta,2\lambda\}$ 是 f 在 Q 上的振动条件，等号仅在 Q 闭时成立）。（证明：略）

数学分析中有著名的处处连续处处不可导函数的例子，这样的函数是处处振动的。

定理 3： 若 f 在 $Q_a^{+\infty}$ 上对 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \xi>a$，使得 $x\ge\xi$ 时，有 $\sup\left\{f(x):x\ge\xi\right\}-\inf\left\{f(x):x\ge\xi\right\}<\varepsilon$，则 f 在 $Q_a^{+\infty}$ 上寂。

证明：对 $\forall\ \lambda>0$，取 $\varepsilon=\lambda$，$\exists\ \xi>a$，使得 $x\ge\xi$ 时有

$$\sup\left\{f(x):x\ge\xi\right\}-\inf\left\{f(x):x\ge\xi\right\}<\varepsilon<2\lambda。$$

对 $\forall\ \delta>0$，闭 $T\subset Q_\xi^{+\infty}$（$|T|=\delta$），有 $\max\left\{f(x):x\in T\right\}\le\sup\left\{f(x):x\ge\xi\right\}$ 与 $\min\left\{f(x):x\in T\right\}\ge\inf\left\{f(x):x\ge\xi\right\}$，于是

$$\max\left\{f(x):x\in T\right\}-\min\left\{f(x):x\in T\right\}<2\lambda。$$ ▌

定理 3 的几何解释是：以水平直线作为渐近线的函数是寂的。

定理 4： 数对 $\{\delta,2\lambda\}$ 是处处可导的振动函数 $f(x)$（$x\in Q$）的一个振动条件，则对 $\forall$ 闭 $T\subseteq Q$（$|T|=\delta$），$\exists\ \xi\in T$，使得 $|f'(\xi)|\ge\frac{2\lambda}{\delta}$。

证明：$\exists\ a,b\in T$，使 $f(a)=\max\left\{f(x):x\in T\right\}$，$f(b)=\min\left\{f(x):x\in T\right\}$。不妨设 $a<b$，有 $[a,b]\subseteq T$。由Lagrange中值定理[2][3]，$\exists\ \xi\in[a,b]\subseteq T$，使

$$|f'(\xi)|=\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|\ge\frac{f(a)-f(b)}{\delta}\ge\frac{2\lambda}{\delta}。$$ ▌

定义 3： $A=[\eta,\eta+\delta],B=[\eta+\delta,\eta+2\delta]$。若 $\exists\ \delta>0$，$\forall\ \eta$，在 $A,B\subset Q$ 时有：①$\max\left\{f(x):x\in B\right\}>\max\left\{f(x):x\in A\right\}$ 与 $\min\left\{f(x):x\in B\right\}>\min\left\{f(x):x\in A\right\}$，就称 f 是 Q 上的趋势增加函数；② $\max\left\{f(x):x\in B\right\}<\max\left\{f(x):x\in A\right\}$ 与 $\min\left\{f(x):x\in B\right\}<\min\left\{f(x):x\in A\right\}$，就称 f 是 Q 上的趋势减小函数。

定理 5： Q 上严格单调增加（减小）函数是 Q 上趋势增加（减小）函数。（证明：略）

定理 6： 若 $\exists\ a<b$ 与 $k>0$，使得 $kx+a\le f(x)\le kx+b$（$x\in Q_\omega^{+\infty}$），则 f 是 $Q_\omega^{+\infty}$ 上趋势增加函数。若 $\exists\ a<b$ 与 $k<0$，使得 $kx+a\le f(x)\le kx+b$（$x\in Q_\omega^{+\infty}$），则 f 是 $Q_\omega^{+\infty}$

上趋势减小函数。

证明：仅对 $k>0$ 时证明。取 $\delta=\dfrac{b-a}{k}+\varepsilon$（$\varepsilon>0$），有 $k\delta=b-a+k\varepsilon$，就有 $k\delta-(b-a)=k\varepsilon$。于是

$$\max\{f(x):x\in B\}\ge f(\eta+2\delta)\ge k(\eta+2\delta)+a=k(\eta+\delta)+b+k\delta-(b-a)=$$
$$=k(\eta+\delta)+b+k\varepsilon>k(\eta+\delta)+b\ge\max\{f(x):x\in A\}。$$

同理可证 $\min\{f(x):x\in B\}>\min\{f(x):x\in A\}$。▮

定义 4: 若∃ $a<b$ 与 $k>0$，使得 $kx+a\le f(x)\le kx+b$（$x\in Q_\omega^{+\infty}$），则称函数 $kx+a$ 与 $kx+b$ 为 f 在 $Q_\omega^{+\infty}$ 上的上升通道。若∃ $a<b$ 与 $k<0$，使得 $kx+a\le f(x)\le kx+b$（$x\in Q_\omega^{+\infty}$），则称函数 $kx+a$ 与 $kx+b$ 为 f 在 $Q_\omega^{+\infty}$ 上的下降通道。其中，$kx+a$ 称为通道的下界，$kx+b$ 称为通道的上界。

定义中 $k=0$ 时，是数学分析中无限区间上的有界函数的定义。

2 函数的振动熵

命题：若数对 $\{\delta,2\lambda\}$ 是振动函数 f 在 Q 上的一个振动条件，则∀ $|Q|-\delta>a>0$ 与 $2\lambda>b>0$，数对 $\{\delta+a,2\lambda-b\}$ 也是 f 的一个振动条件。（**证明**：略）

定义 5（振动熵 Vibration-Entropy）：f 是 Q 上的振动函数，f 在 Q 上的所有振动条件组成的集合（振动条件集）记做 $\mathbb{Z}_{f,Q}$。称 $\sup\left\{\dfrac{2\lambda}{\delta}:\{\delta,2\lambda\}\in\mathbb{Z}_{f,Q}\right\}$ 为函数 f 在 Q 上的振动熵，记做 $S_{f,Q}$。f 在 Q 上寂时，定义 $S_{f,Q}=0$。$\mathbb{Z}_{f,Q}$ 中的元素以相同的 δ 组成的集合记做 $\delta\bullet\mathbb{Z}_{f,Q}$，称 $\sup\left\{\dfrac{2\lambda}{\delta}:\{\delta,2\lambda\}\in\delta\bullet\mathbb{Z}_{f,Q}\right\}$ 为函数 f 在区间 Q 上的 δ −熵,记做 $\delta\bullet S_{f,Q}$。

振动熵是描述函数在一个区间上振动程度的量，函数振动愈剧烈其振动熵值愈大。这里对振动熵定义使用的方法与Lebesgue对测度定义使用的方法类似[4]。

定理 7：f 在 Q 上振动，则 $S_{f,Q}=\sup\{\delta\bullet S_{f,Q}:\{\delta,2\lambda\}\in\mathbb{Z}_{f,Q}\}$。（**证明**：略）

定理 8：若 $f(x)=kx+c$（c 是常数），则 $S_{kx}=|k|$。（**证明**：略）

定理 9：f 是 Q 上的振动函数，则 $f(x)+c$ 与 $cf(x)$（$c\ne 0$）在 Q 上也是振动函数，且有 $S_{f(x),x\in Q}=S_{f(x)+c,x\in Q}=\dfrac{S_{cf(x),x\in Q}}{c}$。（**证明**：略）

定理 10：若 $f(x)$（$x\in Q$）是处处可导的振动函数，则

$$S_{f,Q}\le\max\{\sup\{f'(x):x\in Q\},|\inf\{f'(x):x\in Q\}|\}。$$

证明：由定理 4，对 $f(x)$（$x\in Q$）的任意的振动条件 $\{\delta,2\lambda\}$，存在 $\xi\in Q$，使得 $|f'(\xi)|\ge\dfrac{2\lambda}{\delta}$。注意到 $\sup\{f'(x):x\in Q\}\ge f'(\xi)\ge\inf\{f'(x):x\in Q\}$，就有

$$\max\left\{\sup\{f'(x):x\in Q\},\left|\inf\{f'(x):x\in Q\}\right|\right\}\ge\left|f'(\xi)\right|\ge\frac{2\lambda}{\delta},$$

由$\{\delta,2\lambda\}$的任意性知

$$\max\left\{\sup\{f'(x):x\in Q\},\left|\inf\{f'(x):x\in Q\}\right|\right\}\ge\sup\left\{\frac{2\lambda}{\delta}:\{\delta,2\lambda\}\in\mathbb{Z}_{f,Q}\right\}=S_{f,Q}。▌$$

Dirichlet 函数 $D(x)$ 是振动函数，$\forall\ \delta>0$ 与 $1\ge2\lambda>0$ 都是它的振动条件，$S_{D(x)}=+\infty$。$kx+D(x)$ 在 $k>0$ 时是振动熵为 $+\infty$ 的趋势增加的振动函数，$kx+1$ 与 kx 是它的一个上升通道的上界与下界。

3 闭区间上单调的严格凸（凹）函数的振动熵

定理 11：g 是$[a_1,a_2]$上单调的严格凸（凹）函数，就有：(1) $\delta\bullet S_{g,[a_1,a_2]}<\dfrac{|g(a_2)-g(a_1)|}{a_2-a_1}$（$0<\delta\le a_2-a_1$）。(2) $S_{g,[a_1,a_2]}=\dfrac{|g(a_2)-g(a_1)|}{a_2-a_1}$。

证明：设 g 是$[a_1,a_2]$上单调增加的严格凸函数。则 g 在$[a_1,a_2]$上严格单调增加且处处振动。

假设 $\exists\ 0<\delta<a_2-a_1$，$2\lambda>0$ 是 g 在$[a_1,a_2]$上的一个振动条件，且有 $\dfrac{2\lambda}{\delta}\ge\dfrac{g(a_2)-g(a_1)}{a_2-a_1}$。在$[a_1,a_1+\delta]$上由 g 严格单调增加知

$$\frac{\max\{g(x):x\in[a_1,a_1+\delta]\}-\min\{g(x):x\in[a_1,a_1+\delta]\}}{(a_1+\delta)-a_1}=$$

$$=\frac{g(a_1+\delta)-g(a_1)}{\delta}\ge\frac{2\lambda}{\delta}\ge\frac{g(a_2)-g(a_1)}{a_2-a_1}。$$

$[a_1,a_1+\delta]\subset[a_1,a_2]$，由 g 严格凸知 $\dfrac{g(a_1+\delta)-g(a_1)}{\delta}<\dfrac{g(a_2)-g(a_1)}{a_2-a_1}$。得到一个矛盾的结果。于是 $\dfrac{2\lambda}{\delta}<\dfrac{g(a_2)-g(a_1)}{a_2-a_1}$（$0<\delta<a_2-a_1$）。就有

$$\delta\bullet S_{g,[a_1,a_2]}<\frac{g(a_2)-g(a_1)}{a_2-a_1}\ （0<\delta<a_2-a_1）。$$

$\delta_0=a_2-a_1$ 与 $2\lambda_0=g(a_2)-g(a_1)$ 是 g 在$[a_1,a_2]$上的一个振动条件，有，$\dfrac{2\lambda_0}{\delta_0}=\dfrac{g(a_2)-g(a_1)}{a_2-a_1}$。显然 $\delta_0\bullet S_{g,[a_1,a_2]}=\dfrac{g(a_2)-g(a_1)}{a_2-a_1}$。$g$ 单调增加严格凸时有

$$S_{g,[a_1,a_2]}=\frac{g(a_2)-g(a_1)}{a_2-a_1}。$$

同理，g 是$[a_1,a_2]$上单调减小的严格凸函数时定理 11 结论为真。

g 是$[a_1,a_2]$上单调的严格凹函数时，同理可证定理 11 为真。▌

函数的振动熵也是函数对应曲线的振动熵。定理 11 与定理 8 的几何解释是：过平面上已知两点的所有单调凸（凹）曲线段的振动熵相同，只有直线段的所有的δ−熵可以达到振动熵。

g 增加时 $\lim\limits_{a_2\to a_1} S_{g,[a_1,a_2]} = \lim\limits_{a_2\to a_1}\dfrac{g(a_2)-g(a_1)}{a_2-a_1} = g'_+(a_1)$。导数是振动熵的特例。

4 函数振动理论在股票市场博弈研究中的应用

前面的内容属于纯数学，纯数学在生活中得到应用是好事情。这一节里我们假设股票市场的所有参与者仅用博取差价方式去争取正得益。

人类一些行为称作博弈，例如金融市场的交易、弈棋、战争等等。这里有局中人（Players），有博弈规则，有策略集（Strategy sets），有行动（Actions），有得益[5]（支付[6]Payoffs）。

在一个博弈系统中，策略存在优劣的程度，我们把这样的程度定义作策略的智能。付诸行动可以得到必然的非负得益的策略称为全智能策略。

函数的振动理论有可能成为研究博弈问题的有力工具，事实正是这样。如，在文献[1]中使用函数的振动理论给出了股票市场上用来博取差价的全智能策略——λ 型操作。又如，尽管股价具体走势是不确定的，但从公理化的角度去研究股票市场与股票市场博弈的时候，股票指数走势的趋势是确定的（可以作为一个公理），用函数的振动理论的数学语言表述就是：股票指数的走势是趋势增加函数（这是由科技的进步、生产力的提高、财富的创造决定的）。下面将对文献[1]的结果进一步讨论。仍然使用文献[1]中的假设与符号（用Q表示资金，用P表示股票）。

记$\Omega_i(t)=\{P_i(t),Q_i(t)\}$为股票市场第$i$个投资者，其中$P_i(t)$与$Q_i(t)$是$t$时刻其拥有股票与资金数量。股票市场的交易规则记作$\Psi$，$t$时刻股票成交价格记作$f(t)$，股票市场是一个博弈系统，记做$\mathbb{N}=\{\Omega_1(t),\Omega_2(t),\cdots,\Omega(t)_n,\Psi,f(t)\}$。在股票市场中，资金可以看做是能量，股票可以看做是功，股票市场是资金与股票在投资者那里互相转化的系统，称股票价格的走势$f(t)$是系统的特征函数。在t时刻，股票市场资金总量就是$Q=\sum\limits_{i=1}^{n}Q_i(t)$，股票总量就是$P=\sum\limits_{i=1}^{n}P_i(t)$。若系统没有参与者、股票与资金进出，就称系统是封闭的，此时n,P,Q都是常量。

我们在股票市场中引入主动型投资者与被动型投资者的概念。按照股票交易规则，主动型投资者在卖出股票时按买一或低于买一价格报单（以求立即成交），买入股票时按卖一或高于卖一价格报单。被动型投资者反之。主动型投资者存在是成交的必要条件。市场中仅存在主动型投资者时候，成交将十分活跃（暴涨暴跌）。市场中仅存在被动型投资者时候，市场无法产生成交（市场寂）。主动型与被动型投资者同时存在的市场是稳定的。这样，股票市场关于投资者的分类除了以往的多方与空方外又多了一种分类——主动方（主动型投资者的集合）与被动方（被动型投资者的集合）。

在战争的博弈中被动方通常是指后发制人或者防守一方。在战场上都去防守，不会有战斗产生，都去进攻，战斗将十分激烈。

按照 λ 型操作的定义，除第一笔交易外，λ 型操作的投资者属于被动方。由文献[1]知

道，λ型操作的投资者的存在使股票与资金向其集中。如果股票市场是封闭的，非λ型操作投资者的股票与资金将愈来愈少。经过充分长时间后主动方投资者持有股票与资金数量也将愈来愈少，当所有的非λ型操作投资者的股票与资金达不到报单要求时，股票市场停止运行。λ型操作投资者存在结果是股价走势 $f(t)$ 的熵函数趋势减小，市场将趋于寂。

上面的讨论已经假设了非λ型操作的投资者不存在全智能策略（现在还没有找到股票市场的第二个全智能策略，是否存在第二个全智能策略？）。

可以用这样一段话总结：在一个封闭的股票市场博弈系统中，若有部分参与者以全智能策略做为行动，系统特征函数的熵函数就是趋势减小函数，特征函数将趋于寂。

参考文献

[1] 王小舟．有界的振动函数不确定走势下的确定结果［A］．哈明虎 刘克 杨晓虎. 第八届中国不确定系统年会论文集［C］．香港：Global-Link Publisher， 2010. 45-53.
[2] 江泽坚 吴智泉 周光亚．数学分析（第二版）［M］．北京：人民教育出版社，1964.
[3] 陈傅璋 金福临 胡家赣 朱学炎 欧阳光中．数学分析（上册）［M］．上海：上海科学出版社，1978.
[4] J-P Kahane．Lebesgue 积分的产生及其影响［J］范爱华译．数学进展，2002，31（2）：97-106.
[5] 谢识予．经济博弈论(第二版)［M］．上海：复旦大学出版社，2002.
[6] 艾里科·拉斯缪森．博弈与信息-博弈论概论(第二版)［M］．王晖 白金辉 吴任昊译．北京：北京大学出版社，2003.