§9. 6 无穷乘积

无穷级数$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$是有限加法的推广．因此自然希望将有限乘法推广到无穷乘积.

设$\{b_n\}$是给定的序列，定义$\prod_{i=1}^{+\infty} b_i = \lim_{n\to+\infty}\prod_{i=1}^{n} b_i$

如果$\{b_n\}$中有一项为零，则不论其它项怎样选取，总有$\prod_{i=1}^{+\infty} b_i = 0$．因此不能对序列$\{b_n\}$给出有规律的结果．所以一般不考虑$\prod_{i=1}^{+\infty} b_i = 0$的情况.

定义 3. 4. 1：无穷乘积$\prod_{i=1}^{+\infty} b_i$称为收敛的，如果其部分积$P_n = \prod_{i=1}^{n} b_i$有异于零的有限极限．反之则称$\prod_{i=1}^{+\infty} b_i$发散.

定理 3. 4. 2：如果$\prod_{i=1}^{+\infty} b_i$收敛，则$\lim_{n\to+\infty} b_n = 1$.

证明：$b_n = \prod_{i=1}^{n} b_i \Big/ \prod_{i=1}^{n-1} b_i = \dfrac{P_n}{P_{n-1}}$，因此$\lim_{n\to+\infty} b_n = \dfrac{\lim_{n\to+\infty} P_n}{\lim_{n\to+\infty} P_{n-1}} = 1$.

由于改变无穷乘积$\prod_{i=1}^{+\infty} b_i$的有限项不影响其收敛性，因此在讨论$\prod_{i=1}^{+\infty} b_i$时总可假定$b_i > 0$．这时对无穷乘积取对数，将乘法变为加法.

定理 3. 4. 3：无穷乘积$\prod_{i=1}^{+\infty} b_i$收敛的充分必要条件是无穷级数$\sum_{i=1}^{+\infty} \ln b_i$收敛．这时

$\prod_{i=1}^{+\infty} b_i = e^{\sum_{i=1}^{+\infty} \ln b_i}$，即$\ln\left(\prod_{i=1}^{+\infty} b_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} \ln b_i$.

证明：$\ln\left(\prod_{i=1}^{n} b_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \ln b_i$， $\prod_{i=1}^{n} b_i = e^{\sum_{i=1}^{n} \ln b_i}$，而$y = e^x$, $y = \ln x$ 都是连续函数，因此 $\sum_{i=1}^{+\infty} \ln b_i$ 和 $\prod_{i=1}^{+\infty} b_i$ 中有一个收敛，则另一个也收敛，并满足所给的等式.

利用此定理，无穷乘积 $\prod_{i=1}^{+\infty} b_i$ 可以转化为无穷级数 $\sum_{i=1}^{+\infty} \ln b_i$. 因而可利用无穷级数的手段进行研究.

习题

1.　求下列级数的和：

（1） $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k^2 - 1}$ ；（2） $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$ ；

（3） $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ ；（4） $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(k+2)}$ ；

（5） $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}(\sqrt{k} + \sqrt{k+1})}$ ；（6） $\sum_{k=1}^{+\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{2k^2}$.

2． 设 $\lim_{n\to+\infty} na_n = a \neq 0$. 求证：$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散.

3．求下列级数的和：

（1） $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}$ ；（2） $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1}{2^n}$ ；

（3） $r \sin q + r^2 \sin 2q + \cdots + r^n \sin nq + \cdots, \qquad |r| < 1$ ；

（4） $\frac{1}{2} + r \cos q + r^2 \cos 2q + \cdots + r^n \cos nq + \cdots, \qquad |r| < 1$.

4．判断级数的收敛性：

（1） $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\ln n}}$ ；（2） $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\ln n^{\ln n}}$.

5．判断下列级数的收敛性：

（2）若把级数

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$

的各项重新安排，而使挨次 p 个正项的一组与挨次 p 个负项的一组相交替，则新级数的和为

$$\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}.$$

22．求级数

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)^3,\quad |x|<1$$

的和.

23．令 $e^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$．求证：$e^{x+y}=e^x\cdot e^y$．

24．设 $\lim_{n\to+\infty} a_n=l$．求证：

（1） 当 $l>1$ 时，$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{a_n}}$ 收敛；

（2） 当 $l<1$ 时，$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{a_n}}$ 发散；

并问 $l=1$ 时会有什么结论？