文章编号:1001-5132（2007）01-0105-04

考虑交易费用的组合套期保值策略模型

刘慧宏

（宁波大学 商学院，浙江 宁波 315211）

摘要：为降低套期保值风险，加强套期保值效果，提出了组合套期保值方法，并建立组合套期保值策略模型. 考虑现实交易情形，建立带有交易费用的组合套期保值策略模型，并对其进行研究及求解.

关键词：组合套期保值；基差风险；交易费用；乘积最大化准则

中图分类号：F8；O22　　　　文献标识码：A

套期保值是期货市场中一个十分重要的功能，在目前各国经济活动中也起着重要的作用. 成熟的期货市场已成为生产商、消费者和流通商的主要避险场所. 套期保值是交易者为配合实物方面的交易，在期货市场设立与现货市场方向相反的交易部位(或头寸)，转移、规避价格风险的交易行为. 为确保套期保值效果，套期保值交易要求期货必须和现货在种类上相同或非常类似. 由于期货市场是规范化的市场，它对期货的种类和期货合约的规模都有明确的规定，当期货市场上没有与现货在种类上相同或非常类似的期货时，套期保值者只能在期货市场中选择和现货相关性较强的期货进行保值，这就是交叉套期保值[1].

套期保值在本质上可以看作是由套期保值工具和其所保护的资产所组成的一个更高层次的资产组合. 传统的做法是只使用 1 种期货对现货头寸进行套期保值，但套期保值就其本质而言仍然是一个资产组合问题，因而受Markowitz资产组合理论的启发[2]，为尽可能地降低套期保值风险，加强套期保值效果，我们提出运用多种期货工具对现货头寸进行套期保值，即组合套期保值方法，并建立组合套期保值策略模型，并对其进行研究及求解.

1 组合套期保值策略模型

1.1 最优组合套期保值策略模型及其求解

假设要对某种商品进行套期保值，该商品的现货价格为 S . 选用 n 种期货来做套期保值交易，并用 $X_1,\cdots,X_n$ 表示这 n 种期货，设期货 X_i 的价格为 F_i ，套期保值率为 $h_i(i=1,\cdots,n)$ ，即 1 个单位的现货商品用 h_1 个单位的期货 X_1 ， h_2 个单位的期货 $X_2,\cdots,h_n$ 个单位的期货 X_n 来对冲其价格波动风险. 此时，套期保值交易的基差应定义为现货商品价格 S 与期货组合的保值单位的价格 $\sum_{i=1}^{n}h_iF_i$ 之差，即：$b_n=S-\sum_{i=1}^{n}h_iF_i$. 此时容易导出此时组合套期保值交易的基差风险为：$\mathrm{Var}b_n=\sigma_s^2-2\sum_{i=1}^{n}h_i\sigma_{si}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}h_ih_j\sigma_{ij}$ ，其中，σ_s^2 为现货价格 S 的方差，σ_{si} 是期货 X_i 的价格 F_i 和现货资产价格 S 的协方

收稿日期：2006-05-17.　　　宁波大学学报（理工版）网址：http://3xb.nbu.edu.cn
作者简介：刘慧宏（1977－），男，浙江衢州人，博士/讲师，主要研究方向：投资与决策分析. E-mail: liuhuihong@nbu.edu.cn

差$(i=1,\cdots,n)$，σ_{ij}是期货X_i、X_j的价格F_i、F_j之间的协方差$(i,j=1,\cdots,n)$．从基差风险的表达式可看出，当现货商品和相应的n种期货合约选定后，套期保值基差风险由套期保值率$h_i(i=1,\cdots,n)$确定．因此可以建立确定最优组合套期保值策略的模型(P1)[3].

(P1) $\min\limits_h \mathrm{Var}(b_n)=\sigma_s^2-2\sum\limits_{i=1}^n h_i\sigma_{si}+\sum\limits_{i=1}^n\sum\limits_{j=1}^n h_ih_j\sigma_{ij}$.

对该模型进行求解，令

$$\frac{\partial \mathrm{Var}b_n}{\partial h_i}=-2\sigma_{si}+2\sum_{j=1}^n h_j\sigma_{ij}=0，$$

则 $h_i=\dfrac{\sigma_{si}-\sum\limits_{j=1,j\neq i}^n h_j\sigma_{ij}}{\sigma_i^2}$，$i=1,\cdots,n$.

求解n个方程组成的方程组后，可得模型(P2)的最优解$h^*=(h_1^*,\cdots,h_n^*)^{\mathrm{T}}$．以套期保值率$h^*$构成的组合套期保值策略的基差风险为最小，把$h^*$称为最优套期保值率组合，相应的组合套期保值策略称为最优组合套期保值策略．将h^*代入目标函数，可求出该最优组合套期保值策略的基差风险.

与单一期货来进行套期保值不同，套期保值组合中的最优套期保值率h^*的符号可能为正，也可能为负．若第I种期货的套期保值率为正(即$\sigma_{si}>\sum_{j=1,j\neq i}^n h_j\sigma_{ij}$)，这说明在进行套期保值交易时，套期保值者对第$I$种期货的交易方向和对现货资产的交易方向必须相反．若第I种期货的套期保值率为负(即$\sigma_{si}<\sum_{j=1,j\neq i}^n h_j\sigma_{ij}$)，这说明在进行套期保值交易时，套期保值者对第$I$种期货的交易方向和对现货商品的交易方向必须相同．若第I种期货的套期保值率为0(即$\sigma_{si}=\sum_{j=1,j\neq i}^n h_j\sigma_{ij}$)，说明在第$I$种期货在该套期保值组合策略中没有发挥作用，可以从组合中剔除.

1.2 组合套期保值策略的有效性分析

当组合套期保值策略中的期货从n种增至$n+1$种时，套期保值交易的基差风险为：

$$\mathrm{Var}b_{n+1}=\sigma_s^2-2\sum_{i=1}^{n+1}h_i\sigma_{si}+\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}h_ih_j\sigma_{ij}，$$

对基差风险表达式进行转化，可得：

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}b_{n+1}&=\sigma_s^2-2\sum_{i=1}^n h_i\sigma_{si}+\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n h_ih_j\sigma_{ij}-\\&\quad 2h_{n+1}\sigma_{s,(n+1)}+2\sum_{i=1}^n h_ih_{n+1}\sigma_{i,(n+1)}+h_{n+1}^2\sigma_{n+1}^2=\\&\quad \mathrm{Var}b_n-2h_{n+1}(\sigma_{s,(n+1)}-\sum_{i=1}^n h_i\sigma_{i,(n+1)})+\\&\quad h_{n+1}^2\sigma_{n+1}^2.\end{aligned}$$

将$h_{n+1}=\sigma_{s,(n+1)}-\sum_{i=1}^n h_i\sigma_{i,(n+1)}/\sigma_{n+1}^2$代入$\mathrm{Var}b_{n+1}$表达式，整理可得：$\mathrm{Var}b_{n+1}=\mathrm{Var}b_n-(\sigma_{s,(n+1)}-\sum_{i=1}^n h_i\cdot\sigma_{i,(n+1)})^2/\sigma_{n+1}^2$.

只要$\sigma_{s,(n+1)}\neq\sum_{i=1}^n h_i\sigma_{i,(n+1)}$，就可得到$\mathrm{Var}b_{n+1}<\mathrm{Var}b_n$，也就是当组合套期保值策略中的期货从$n$种增至$n+1$种时，只要$\sigma_{s,(n+1)}\neq\sum_{i=1}^n h_i\sigma_{i,(n+1)}$，相应的基差风险就会减小.

进一步推导可以知道，组合套期保值的风险肯定不会大于使用组合中任何单一期货进行套期保值时的风险，也就是说，组合套期保值是有实际意义的.

2 考虑交易费用的组合套期保值决策模型

由于在期货市场进行套期保值需要一定的交易费用(由佣金、手续费和不付息保证金机会成本等构成)，而忽视交易费用的证券组合在实际中可能是无效的组合[4]，因此交易费用也是影响套期保值者选择套期保值者策略的一个重要因素.

2.1 考虑交易费用的组合套期保值决策模型

设期货$X_1,\cdots,X_n$的单位交易费用为c_i，考虑到组合套期保值时，套期保值率可正可负，则单位现货商品的组合套期保值交易费用为$\sum_{i=1}^n|h_i|c_i$．由套期保值者的效用函数构成可知，在进行套期保值时，套期保值者希望风险越小，同时希望交易费用也越小．因此可得到考虑交易费用的组合套期保值决策模型(P2).

(P2) $\min\limits_h \mathrm{Var}b_n=\sigma_s^2-2\sum\limits_{i=1}^n h_i\sigma_{si}+\sum\limits_{i=1}^n\sum\limits_{j=1}^n h_ih_j\sigma_{ij}$,

$$\min_h C = \sum_{i=1}^{n} |h_i| c_i .$$

2.2　目标函数可微的双目标模型

由于模型(P2)中的目标函数包含了绝对值项，因此目标函数是不可微的. 这是一个非光滑优化问题，为了处理绝对值函数，可通过变换，使目标函数变为可微的[5].

令 $a_i^+ = (|h_i| + h_i)/2, a_i^+ = (|h_i| - h_i)/2$, 则 $a_i^+ + a_i^- = |h_i|, a_i^+ - a_i^- = h_i, a_i^+ \cdot a_i^- = 0, a_i^+ \geq 0, a_i^- \geq 0$.

于是模型(P2)可以等价地转化为目标函数可微的模型(P3).

(P3)　$\min \mathrm{Var}(b_n) = \sigma_s^2 - 2\sum_{i=1}^{n} h_i \sigma_{si} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_i h_j \sigma_{ij},$

$$\min C = \sum_{i=1}^{n} (a_i^+ + a_i^-) c_i .$$

s.t.　$a_i^+ - a_i^- = h_i, i = 1, \cdots, n,$

$a_i^+ \cdot a_i^- = 0, i = 1, \cdots, n,$

$a_i^+ \geq 0, a_i^- \geq 0, i = 1, \cdots, n.$

容易证明，当且仅当存在 $a^+ = (a_1^+, \cdots, a_n^+)$，$a^- = (a_1^-, \cdots, a_n^-)$ 使 (h, a^+, a^-) 是(P3)的最优解时，h 也就是(P2)的最优解，其中 $h = (h_1, \cdots, h_n)^T$.

2.3　单目标模型

考虑套期保值者所能接受的方案底限，结合乘积最大化准则[6,7]，可以将双目标模型(P3)转化为单目标模型来求解.

假设套期保值者所能接受的最大风险为 σ_+^2，最大交易费用为 C_+ .

结合最大风险 σ_+^2，去掉(P3)中的第一个目标函数，同时增加 1 个约束 $\mathrm{Var} b_n \leq \sigma_+^2$，于是可得到 1 个单目标模型(P4).

(P4)　$\min C = \sum_{i=1}^{n} (a_i^+ + a_i^-) c_i,$

s.t.　$\mathrm{Var}(b_n) = \sigma_s^2 - 2\sum_{i=1}^{n} h_i \sigma_{si} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_i h_j \sigma_{ij} \leq \sigma_+^2,$

$a_i^+ - a_i^- = h_i, i = 1, \cdots, n,$

$a_i^+ \cdot a_i^- = 0, i = 1, \cdots, n,$

$a_i^+ \geq 0, a_i^- \geq 0, i = 1, \cdots, n.$

若(P4)无最优解，则不存在满足套期保值者要求的组合套期保值策略，套期保值者需要调整 σ_+^2. 若(P4)有最优解，对应的 $\min C = C^*$, 当 $C^* > C_+$ 时，不存在满足套期保值者要求的组合套期保值策略，套期保值者需要调整 σ_+^2 或 C_+ .

结合最大交易成本 C_+，去掉(P3)中的第二个目标函数，同时增加 1 个约束 $C \leq C_+$，于是得到 1 个单目标模型(P5).

(P5)　$\min \mathrm{Var} b_n = \sigma_s^2 - 2\sum_{i=1}^{n} h_i \sigma_{si} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_i h_j \sigma_{ij},$

s.t.　$C = \sum_{i=1}^{n} (a_i^+ + a_i^-) c_i \leq C_+,$

$a_i^+ - a_i^- = h_i, i = 1, \cdots, n,$

$a_i^+ \cdot a_i^- = 0, i = 1, \cdots, n,$

$a_i^+ \geq 0, a_i^- \geq 0, i = 1, \cdots, n.$

若(P5)无最优解，则不存在满足套期保值者要求的组合套期保值策略，套期保值者需要调整 C_+. 若(P5)有最优解，对应的 $\min \mathrm{Var} b_n = \sigma^{2*}$，当 $\sigma^{2*} > \sigma_+^2$ 时，不存在满足套期保值者要求的组合套期保值策略，套期保值者需要调整 σ_+^2 或 C_+ .

若存在 $C^* < C_+$，且 $\sigma^{2*} < \sigma_+^2$，结合乘积最大化准则可得到 1 个单目标模型(P6).

(P6)　$\max(\sigma^{2*} - \mathrm{Var}(b_n))(C^* - C),$

s.t.　$\mathrm{Var} b_n = \sigma_s^2 - 2\sum_{i=1}^{n} h_i \sigma_{si} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_i h_j \sigma_{ij},$

$C = \sum_{i=1}^{n} (a_i^+ + a_i^-) c_i,$

$a_i^+ - a_i^- = h_i, i = 1, \cdots, n,$

$a_i^+ \cdot a_i^- = 0, i = 1, \cdots, n,$

$a_i^+ \geq 0, a_i^- \geq 0, i = 1, \cdots, n.$

容易证明(P6)的最优解也是(P2)的有效解.

3　结论

套期保值者进行套期保值交易的目的是转移现货市场上的价格波动风险，本文提出了组合套期保值方法，并建立模型进行求解，它拓宽了套期保值交易空间，发展了套期保值理论. 另外考虑到交

易费用问题，建立了相应的考虑交易费用的组合套期保值决策模型，并给出了模型最优解满足的条件，经过变换，将问题转化为可微单目标规划问题求解．此问题研究的决策过程符合套期保值心理，具有现实意义．

参考文献：

[1] John C Hull. 期权、期货和其它衍生产品[M]. 北京: 华夏出版社, 2000.

[2] Markowitz H M. Portfolio selection: efficient diversification of investment[M]. Cambridge:Basil Blackwell, 1991.

[3] 钱颂迪. 运筹学[M]. 北京: 清华大学出版社, 1990.

[4] Yoshimoto A. The mean-variance approach to portfolio optimization subject to transaction cost[J]. Journal of Operations Research society of Japan, 1996, 39(1):99-117.

[5] 刘慧宏, 胡达沙, 王志强. 一种有交易费用的交互式组合证券投资方法[J]. 运筹与管理, 2003, 12(4):107-109.

[6] 陈铤. 决策分析[M]. 北京: 科学出版社, 1987.

[7] 罗杰 B 迈尔森. 博弈论——矛盾冲突分析[M]. 北京: 中国经济出版社, 2001.

The Model of Combination Hedge with Transaction Costs

LIU Hui-hong

(Faculty of Business, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: For reducing the risk of hedge and enhancing the effect of hedge, we bring forward combination hedge. We establish the model of combination hedge. Thinking of the real condition of the future transaction, we present the model of combination hedge with transaction cost, and study on them and give approach to seek their equilibriums.

Key words: combination hedge; basis risk; transaction cost; the rule of maximum of product

CLC number: F8; O22 **Document code:** A

（责任编辑　章践立）