文章编号:1001-5132（2007）02-0211-04

关于有限维循环群代数中的可逆元及其应用

孔　翔[1]，岑建苗[2]

（1.宁波工程学院 理学院，浙江 宁波 315016；2.宁波大学 理学院，浙江 宁波 315211）

摘要：讨论有限维循环群代数中的可逆元，给出了有限维循环群代数中的可逆元的逆元表达式，并把结果应用到循环矩阵中.

关键词：循环群代数；可逆元；循环矩阵

中图分类号：O151　　　　文献标识码：A

循环矩阵在数学、物理学和工程技术等领域应用广泛并有多种推广[1-5]，循环矩阵及其推广的求逆算法问题大家都很关注[6-10]. 在本文中，我们讨论有限维循环群代数中的可逆元，给出有限维循环群代数中的可逆元的逆元表达式，把结果应用到循环矩阵以及比循环矩阵更广的几类矩阵中.

设 F 为一个域，$G=<g>$ 为 1 个由 g 生成的 n 阶循环群，那么群代数 $F(G)$ 中的元可表示为：

$$a=a_0e+a_1g+\cdots+a_{n-1}g^{n-1}, \tag{1}$$

其中，e 为 G 中的单位元，$a_i\in F, i=0,1,\cdots,n-1$. 为方便，$e$ 也可不写或记为 1. 记

$$a=G(a_0,a_1,\cdots,\ a_{n-1}). \tag{2}$$

记 $$f_a(x)=\sum_{i=0}^{n-1}a_ix^i, \tag{3}$$

称为 a 的表示多项式.

对于 $a=G(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})$，如果 $a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}$ 中有 k 个元素非零而其余元素为 0，称 a 为 k 位元.

1　二位元的逆元表示式

首先，分析连续二个元素非零的二位元的逆元表示式. 在以下分析中，假定 $n\geq 3$.

定理 1　设 $s,t\in F$，且 $st\neq 0$，$a=G(s,t,0,\cdots,0)$，那么 a 可逆的充要条件是 $s^n+(-1)^{n-1}t^n\neq 0$. 当 a 可逆时，

$$a^{-1}=s^{-1}(1-p^n)^{-1}G(1,p,\cdots,p^{n-1}), \tag{4}$$

其中，$p=-s^{-1}t$.

证明 设 $(s+tg)G(b_0,b_1,\cdots,b_{n-1})=1$，可得的关系式为：

$$\begin{cases} tb_{n-1}+sb_0=1, \\ tb_0+sb_1=0, \\ tb_1+sb_2=0, \\ \cdots\cdots \\ tb_{n-2}+sb_{n-1}=0. \end{cases} \tag{5}$$

考虑递推关系式：

$$sb_m+tb_{m-1}=0, m=1,2,\cdots,n-1,$$

它的特征根为 $p=-s^{-1}t$. 因此其通解为：

$$b_m=xp^m, m=0,1,2,\cdots,n-1,$$

把 b_0,b_{n-1} 代入(5)式的第一个方程后，可得：

$$(tp^{n-1}+s)x=1.$$

如果 $s^n+(-1)^{n-1}t^n\neq 0$，那么 $tp^{n-1}+s=s^{1-n}(s^n+(-1)^{n-1}t^n)\neq 0$. 可得 $x=(tp^{n-1}+s)^{-1}$. 因此，a 可逆，

收稿日期：2006-11-25.　　宁波大学学报（理工版）网址：http://3xb.nbu.edu.cn
作者简介：孔　翔（1979－），男，浙江宁波人，助教，主要研究方向：代数学. E-mail: kongx@nbut.cn

并且可得(4)式.

反之，若 a 可逆，则存在 $b_0, b_1, \cdots, b_{n-1}$ 使得 $a^{-1} = G(b_0, b_1, \cdots, b_{n-1})$. 则 $b_0, b_1, \cdots, b_{n-1}$ 满足(5)式，且 $b_j = xp^j, x \in F, j = 0, 1, \cdots, n-1$ 及 $(s + tp^{n-1})x = 1$，所以 $s + tp^{n-1} \neq 0$. 从而，$s^n + (-1)^{n-1}t^n \neq 0$.

推论 1 设 $r, q \in F$，且 $r \neq 0, q^n \neq 1$，对于等比序列 $r, rq, \cdots, rq^{n-1}$，则

$$(G(r, rq, \cdots, rq^{n-1}))^{-1} = r^{-1}(1-q^n)^{-1} \cdot G(1, -q, 0, \cdots, 0). \tag{6}$$

引理 1 设 $a = G(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1})$，$k$ 为自然数，则

$$g^k a = ag^k = G(a_{n-k}, \cdots, a_{n-1}, a_0, \cdots, a_{n-k-1}), 1 \leq k \leq n-1, \tag{7}$$

$$g^{-k} a = ag^{-k} = G(a_k, \cdots, a_{n-1}, a_0, \cdots, a_{k-1}), 1 \leq k \leq n-1. \tag{8}$$

根据定理 1 和引理 1 可得下面的结果.

推论 2 设 $s, t \in F$，且 $st \neq 0$，$a = G(0, \cdots, 0, s, t, 0, \cdots, 0)$，$1 \leq k \leq n-2$，那么 a 可逆的充要条件为 $s^n + (-1)^{n-1}t^n \neq 0$. 当 a 可逆时，

$$a^{-1} = s^{-1}(1-p^n)^{-1}G(p^k, \cdots, p^{n-1}, 1, p, \cdots, p^{k-1}), \tag{9}$$

其中，$p = -s^{-1}t$.

推论 3 设 $s, t \in F$，且 $st \neq 0, a = G(t, 0, \cdots, 0, s)$，那么 a 可逆的充要条件为 $s^n + (-1)^{n-1}t^n \neq 0$. 当 a 可逆时，

$$a^{-1} = s^{-1}(1-p^n)^{-1}G(p^{n-1}, 1, p, \cdots, p^{n-2}), \tag{10}$$

其中，$p = -s^{-1}t$.

下面，讨论二个非零元素之间有 1 个零的二位元的逆元表示式.

定理 2 设 $n = 2m, m \geq 2, a = G(s, 0, t, 0, \cdots, 0)$，其中 $s, t \in F$，且 $st \neq 0$，那么 a 可逆的充要条件为 $s^m + (-1)^{m-1}t^m \neq 0$. 当 a 可逆时，

$$a^{-1} = s^{-1}(1-p^m)^{-1}G(1, 0, p, 0, \cdots, p^{m-1}, 0), \tag{11}$$

其中，$p = -s^{-1}t$.

证明：设

$$(s + tg^2)G(b_0, b_1, \cdots, b_{2m-1}) = 1,$$

那么可得的关系式为：

$$\begin{cases} tb_{2m-2} + sb_0 = 1, \\ tb_{2m-1} + sb_1 = 0, \\ tb_0 + sb_2 = 0, \\ tb_1 + sb_3 = 0, \\ \cdots\cdots \\ tb_{2m-3} + sb_{2m-1} = 0. \end{cases} \tag{12}$$

考虑递推关系式：

$$sb_h + tb_{h-2} = 0, h = 0, 1, 2, \cdots, 2m-1,$$

得

$$\begin{cases} b_{2k} = p^{k+1-m}b_{2m-2}, 0 \leqslant k \leqslant m-1, \\ b_{2k-1} = p^{k-m}b_{2m-1}, 1 \leqslant k \leqslant m, \end{cases} \tag{13}$$

其中，$p = -s^{-1}t$. 把 b_0, b_1 分别代入(12)式的第一个方程和第二个方程后可得：

$$\begin{cases} (s^m + (-1)^{m-1}t^m)b_{2m-2} = (-1)^{m-1}t^{m-1}, \\ (s^m + (-1)^{m-1}t^m)b_{2m-1} = 0. \end{cases} \tag{14}$$

如果 $s^m + (-1)^{m-1}t^m \neq 0$，由(14)式可得：

$$b_{2m-1} = 0, b_{2m-2} = (-1)^{m-1}t^{m-1}(s^m + (-1)^{m-1}t^m)^{-1},$$

因此，a 可逆，并且可得(11)式.

反之，若 a 可逆，则有 $(s^m + (-1)^{m-1}t^m)b_{2m-2} = (-1)^{m-1}t^{m-1} \neq 0$，所以，$s^m + (-1)^{m-1}t^m \neq 0$.

用类似于定理 2 的证明方法可得 $n = 2m+1$ 时的结果.

定理 3 设 $n = 2m+1, m \geq 1, a = G(s, 0, t, 0, \cdots, 0)$，其中 $s, t \in F$，且 $st \neq 0$，那么 a 可逆的充要条件是 $s^n + t^n \neq 0$. 当 a 可逆时，

$$a^{-1} = s^{-1}(1-p^n)^{-1}G(1, p^{m+1}, p, p^{m+2}, \cdots, p^{m-1}, p^{2m}, p^m), \tag{15}$$

其中，$p = -s^{-1}t$.

对于一般的二个非零元素之间有 1 个零的二位元的逆元表示式可根据定理 2、定理 3 和引理 1 得到. 对于一般的二位元的逆元表示式均可按上述方法得到，此处从略.

2 三位元的逆元表示式

首先，讨论的是连续 3 个元素非零的三位元的

逆元表示式. 为不失一般性，只要讨论下面的三位元

$$a = G(s, t, 0, \cdots, 0, u), s, t \in F. \tag{16}$$

因为一般的连续 3 个元素非零的三位元可分解为有(15)式形式的三位元与 g 的方幂的乘积.

在本节中，假定 F 的特征 $\neq 2$，并且 F 上的二次方程在它的一个扩域中均有解.

定理 4　设 $s, t, u \in F$，且 $stu \neq 0$，$a = G(s, t, 0, \cdots, 0, u)$，那么 a 可逆的充要条件是 $s^n + t^n \neq 0$. 当 a 可逆时，记 $a^{-1} = G(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1})$.

(1) 如果 $s^2 - 4tu \neq 0$，那么

$$a_j = \frac{q_1 q_2}{t(q_1 - q_2)}\left(\frac{q_1^j}{1-q_1^n} - \frac{q_2^j}{1-q_2^n}\right), \quad j = 0, 1, \cdots, n-1, \tag{17}$$

其中，$q_1 = \dfrac{-s + \sqrt{s^2 - 4tu}}{2u}, q_2 = \dfrac{-s - \sqrt{s^2 - 4tu}}{2u}$.

(2) 如果 $s^2 - 4tu = 0$，那么

$$a_j = \frac{q^{j+1}}{t(1-q^n)}\left(\frac{n}{1-q^n} - (n-j)\right), \quad j = 0, 1, \cdots, n-1, \tag{18}$$

其中，$q = (-s)/2u$.

证明：因为

$$(s1 + tg + ug^{n-1})G(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}) = 1,$$

可得的关系式为：

$$\begin{aligned} &sa_0 + ta_{n-1} + ua_1 = 1, \\ &sa_1 + ta_0 + ua_2 = 0, \\ &sa_2 + ta_1 + ua_3 = 0, \\ &\cdots\cdots \\ &sa_{n-2} + ta_{n-3} + ua_{n-1} = 0, \\ &sa_{n-1} + ta_{n-2} + ua_0 = 0. \end{aligned} \tag{19}$$

考虑递推关系式：

$$ua_m + sa_{m-1} + ta_{m-2} = 0, m = 0, 1, \cdots, \tag{20}$$

它的特征根为：

$$q_1 = \frac{-s + \sqrt{s^2 - 4tu}}{2u}, q_2 = \frac{-s - \sqrt{s^2 - 4tu}}{2u}.$$

当 $s^2 - 4tu \neq 0$ 时，它的通解为：

$$a_m = t_1 q_1^m + t_2 q_2^m, m = 0, 1, \cdots.$$

把它代入(19)式的第一个和最后一个方程得：

$$\begin{cases} (s + tq_1^{n-1} + uq_1)t_1 + (s + tq_2^{n-1} + uq_2)t_2 = 1, \\ (sq_1^{n-1} + tq_1^{n-2} + u)t_1 + (sq_2^{n-1} + tq_2^{n-2} + u)t_2 = 0. \end{cases} \tag{21}$$

因为 q_1, q_2 为方程 $ux^2 + sx + t = 0$ 的根，所以(21)式的线性方程组可化为：

$$\begin{cases} \dfrac{t(q_1^n - 1)}{q_1} t_1 + \dfrac{t(q_2^n - 1)}{q_2} t_2 = 1, \\ (1 - q_1^n)t_1 + (1 - q_2^n)t_2 = 0. \end{cases}$$

由此可得：

$$\begin{cases} t_1 = \dfrac{q_1 q_2}{t(1 - q_1^n)(q_1 - q_2)}, \\ t_2 = -\dfrac{q_1 q_2}{t(1 - q_2^n)(q_1 - q_2)}. \end{cases}$$

(1) 当 $s^2 - 4tu \neq 0$ 时，

$$a_j = \frac{q_1 q_2}{t(1-q_1^n)(q_1 - q_2)} q_1^j - \frac{q_1 q_2}{t(1-q_2^n)(q_1 - q_2)} q_2^j, \quad j = 0, 1, \cdots, n-1,$$

由此可得(17)式.

(2) 当 $s^2 - 4tu = 0$ 时，把(17)式化为：

$$a_j = \frac{q_1 q_2}{t(1-q_1^n)(1-q_2^n)}\left(\frac{q_1^j - q_2^j}{q_1 - q_2} - \frac{q_1^j q_2^j (q_1^{n-j} - q_2^{n-j})}{q_1 - q_2}\right), \quad j = 0, 1, \cdots, n-1.$$

令 $q = q_1 = q_2 = (-s)/2u$. 则

$$a_j = \frac{q^2}{t(1-q^n)^2}(jq^{j-1} + q^{2j}(n-j)q^{n-j-1}), \quad j = 0, 1, \cdots, n-1,$$

化简可得：

$$a_j = \frac{q^{j+1}}{t(1-q^n)}\left(\frac{n}{1-q^n} - (n-j)\right), j = 0, 1, \cdots, n-1.$$

对于一般的三位元的逆元表示式均可按上述方法得到，此处从略.

3　一般元的逆元表示式及其应用

利用二位元和三位元讨论 $F(G)$ 中的一般元的逆元表示式，并把结果应用到矩阵论.

设 $a \in F(G)$，且 a 的表示多项式为 $f_a(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$，其中 $a_j \in F, j = 0, 1, \cdots, n-1$. 如果 F 是

代数闭域，如复数域C，那么$f_a(x)$有如下的分解式：

$$f_a = kx^s\prod_{j=1}^{t}(x+\alpha_j),$$

其中，$k, \alpha_j \in F, s, t$为非负整数，$\alpha_j \neq 0,\ j=1,2,\cdots,t$. 如果$F$上的多项式都能分解成一次或二次多项式的乘积，如实数域R，那么$f_a(x)$有如下的分解式：

$$f_a(x) = kx^s(x+\alpha)^t\prod_{j=1}^{m}(x^2+u_jx+v_j),$$

其中，$k, \alpha, u_j, v_j \in F$，$s, m$为非负整数，$t=0$或$1$，$v_j \neq 0,\ j=1,2,\cdots,m$. 因此，在这些情况下，$F(G)$中的元可表示为一位元、二位元或三位元的乘积. 对于$a \in F(G)$，如果a可逆，根据上面的叙述，可得到a^{-1}的表达式.

设F_n为F上的n阶方阵的集合，$P \in F_n$，如果P的最小多项式为$m_P(x) = x^m - 1$，那么$G = <P>$是一个m阶循环群. 特别，如果P为n阶基本循环矩阵，那么$F(G)$就是n阶循环矩阵的全体. 因此，上面的结果可应用到循环矩阵中，也可应用到比循环矩阵更广的几类矩阵中. 例如，对角因子循环矩阵[2]. 又利用此方法，可类似讨论$r-$循环矩阵以及$f(x)-$循环矩阵等.

参考文献：

[1] Davis P J. Circulant Matrices[M]. New York: Wiley Press, 1987.

[2] Stuar J L, Weacer J R. Diaonally scaled permutations and circulant matrices[J]. Linear Algebra Appl, 1994, 212: 397-411.

[3] 沈光星. 关于某些循环矩阵的特征值[J]. 应用数学, 1991(3):76-82.

[4] 曾泳泓. $r-$循环矩阵的快速算法和并行算法[J]. 数值计算和计算机应用, 1989(3):36-42.

[5] 武际可，邵秀民. 循环矩阵及其在结构计算中的应用[J]. 计算数学, 1979(2):144-154.

[6] Bell C L. Generalized inverses of circulant and generalized circulant matrix[J]. Linear Algebra Appl, 1981, 39: 133-142.

[7] 詹颖. 循环矩阵的逆[J]. 数学通报, 1989(5):29-31.

[8] 王济荣. 反循环矩阵的逆矩阵[J]. 数学通报，1992(3): 40-41.

[9] 李淑敏，王炳安. 关于$\mu-$循环矩阵的逆矩阵[J]. 大连大学学报, 1999(2):109-111.

[10] 王炳安，李淑敏. 二元$\mu-$循环矩阵的逆及其应用[J]. 大连大学学报, 2000(2):13-20.

Invertible Elements in Finite Dimensional Group Algebra and its Application

KONG Xiang, CEN Jian-miao

(1.Faculty of Science, Ningbo University of Technology, Ningbo 315016, China; 2.Faculty of Science, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: The invertible elements in the finite dimensional group algebra is discussed. The representation formulae are given for the inverse elements of the invertible elements in the finite dimensional group algebra, and the results are applied to the circulant matrices.

Key words: finite dimensional group algebra; invertible element; circulant matrix

CLC number: O151 **Document code:** A

（责任编辑 章践立）