用试验数据修正刚度矩阵

戴　华
（南京航空航天大学数理力学系，南京，210016）

STIFFNESS MATRIX CORRECTION USING TEST DATA

Dai Hua
(Department of Mathematics, Physics and Mechanics,
Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing, 210016)

摘　要　讨论用试验数据修正刚度矩阵的问题。依据特征方程、刚度矩阵的对称性和半正定性，利用代数特征值反问题的理论和方法，研究了这个问题解的存在性和唯一性，提出了修正刚度矩阵的一个新方法。用这个方法修正的刚度矩阵不仅满足特征方程，而且是唯一的对称半正定矩阵。

关键词　结构模型，动态试验，反问题

中图分类号　V216.2，V215.3

Abstract　The problem of stiffness matrix correction using test data is discussed in this paper. Based on the characteristic equation, the symmetry and positive semidefiniteness of stiffness matrix, the existence and uniqueness of solution to the problem is studied by means of the theory and method of the algebraic inverse eigenvalue problems. A new method of stiffness matrix correction is presented. The stiffness matrix corrected by the method not only satisfies the characteristic equation, but also is the unique symmetric positive semidefinite matrix.

Key words　structural model, dynamic experiment, inverse problem

动力学模型修正是结构振动分析的反问题，随着航空、航天结构的大型化和复杂化，日益迫切需要解决这个问题。十多年来，国内外许多学者在这方面已作了大量研究，取得了丰富的成果。就修正刚度矩阵的矩阵型方法而言，其中典型的研究工作是 Baruch[1~3]、Wei[4,5]和 Berman[5,6]等人提出的误差矩阵范数极小化的方法。这类方法的共同点是依据特征方程和刚度矩阵的对称性，由不完备试验数据利用 Lagrange 乘子法修正刚度矩阵。但迄今所有的方法在理论上都不能保证修正的刚度矩阵一定对称半正定。然而从物理和力学意义上讲，刚度矩阵一般都是对称半正定矩阵。

本文依据特征方程、刚度矩阵的对称性和半正定性，利用代数特征值反问题的理论和方法[7,8]给出修正刚度矩阵的一个新方法。与现有的方法相比，本文方法修正的刚度矩阵不仅满足特征方程，而且是唯一最优的对称半正定矩阵。

1　理论分析

假定结构的自由度为 n，已测得结构前 m 阶固有频率 $\omega_1,\cdots,\omega_m$ 和相应的振型 $\Phi_1,\cdots,\Phi_m (m \leqslant n)$。记

$$\Phi = [\Phi_1,\cdots,\Phi_m], \Omega^2 = \mathrm{diag}(\omega_1^2,\cdots,\omega_m^2) \tag{1}$$

质量矩阵 M 是已知的 n 阶对称正定矩阵，并且假定测试振型 Φ 已校正[1]，使得如下正交条

1993 年 6 月 23 日收到，1993 年 12 月 28 日收到修改稿
国家自然科学基金资助课题

件成立

$$\Phi^{\mathrm{T}} M \Phi = I_m \tag{2}$$

其中 I_m 表示 m 阶单位矩阵。

以 K_0 表示刚度矩阵的初始估计，K_0 未必是对称半正定矩阵。根据文献[2～6]，求“最接近”K_0 的对称半正定刚度矩阵 K 的最简单方法是极小化如下加权 Euclidean 范数。

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \| M^{-\frac{1}{2}} (K - K_0) M^{-\frac{1}{2}} \| \tag{3}$$

其中要求修正的刚度矩阵 K 必须满足特征方程、对称性和半正定性的约束条件，即

$$\begin{cases} K\Phi = M\Phi \quad \Omega^2 & (4) \\ K^{\mathrm{T}} = K & (5) \\ K \geqslant 0 & (6) \end{cases}$$

其中 $K \geqslant 0$ 表示 K 是半正定矩阵。

如果不考虑约束条件(6)式，利用 Lagrange 乘子法处理约束条件(4)式、(5)式下极小化目标函数(3)式的线性约束最优化问题，可得文献[2～6]中的结果。由此修正的刚度矩阵并不能保证具有半正定性，也就不能准确地模拟实际结构。因此，必须考虑约束条件(6)式，而这个约束条件是高度非线性的，用最优化方法来解决约束条件(4)式～(6)式下极小化目标函数(3)式的问题是不适宜的。将利用代数特征值反问题的理论和方法来解决这个问题。

引理 1[7]　设 $n \times m (m \leqslant n)$ 列满秩矩阵 X 的正交三角分解为

$$X = Q \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

其中 $Q = (Q_1, Q_2)$ 是 n 阶正交矩阵；Q_1 是 $n \times m$ 矩阵；R 是 m 阶非奇异上三角矩阵；$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_m)$ 是 m 阶对角矩阵，则 $AX = X\Lambda$ 有对称半正定矩阵解 A 的充分必要条件是

$$\lambda_i \geqslant 0, \quad (\lambda_i - \lambda_j) x_i^{\mathrm{T}} x_j = 0, \qquad i, j = 1, \cdots, m \tag{8}$$

其中 x_i 是 X 的第 i 列。并且当条件(8)式满足时，$AX = X\Lambda$ 的对称半正定矩阵解 A 的通式可表为

$$A = X\Lambda X^{+} + Q_2 G Q_2^{\mathrm{T}} \tag{9}$$

其中 X^{+} 是矩阵 X 的 Moore—Penrose 广义逆；G 是$(n—m)$阶任意的对称半正定矩阵。

令

$$A = M^{-1/2} K M^{-1/2}, \quad X = M^{1/2} \Phi, \quad \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_m) = \Omega^2 \tag{10}$$

由(10)式，则(4)式化为

$$AX = X\Lambda$$

因此 K 是对称半正定矩阵的充分必要条件是 A 是对称半正定矩阵，并且广义特征值问题 $Kx = \lambda Mx$ 的特征值为矩阵 A 的特征值相同。

由(2)式和(10)式知 X 是列满秩矩阵，$X^{\mathrm{T}} X = I_m$，　$X^{+} = X^{\mathrm{T}}$，　X 的正交三角分解(7)式中可取 $Q_1 = X$，　$R = I_m$，　Q_2 的列是 X^{T} 的零空间 $N(X^{\mathrm{T}})$ 的一组标准正交基，并且 $\lambda_i = \omega_i^2 > 0$，　$(\lambda_i - \lambda_j) x_i^{\mathrm{T}} x_j = (\omega_i^2 - \omega_j^2) \Phi_i^{\mathrm{T}} M \Phi_j = 0 (i, j = 1, \cdots, m)$。因此，由引理 1

和(10)式、(11)式可得如下定理。

定理1　如果测试振型Φ和已知质量矩阵M满足正交条件(2)式，则存在满足约束条件(4)式～(6)式的对称半正定刚度矩阵K，并且其通式可表示为

$$K = M\Phi\Omega^2\Phi^{\mathrm{T}}M + M^{1/2}Q_2GQ_2^{\mathrm{T}}M^{1/2} \tag{12}$$

其中G是$(n-m)$阶任意对称半正定矩阵。

引理2[9]　给定n阶实矩阵B，令$B_1=(B+B^{\mathrm{T}})/2$。假定$B_1=UH$(其中U阶是n正交矩阵；H是n阶对称半正定矩阵)是B_1的极分解，则$\hat{B}=(B_1+H)/2$是B的唯一对称半正定矩阵最佳逼近，即$\hat{B}$使，

$$\|\hat{B}-B\| = \min_{Y\geqslant 0}\|Y-B\|$$

定理2　如果测试振型Φ和已知质量矩阵M满足正交条件(2)式，则存在满足约束条件(4)式～(6)式的唯一刚度矩阵$\hat{K}$使目标函数(3)式达到最小值。并且$\hat{K}$可表示为

$$\hat{K} = M\Phi\Omega^2\Phi^{\mathrm{T}}M + \frac{1}{2}M^{\frac{1}{2}}Q_2(B_1+H)Q_2^{\mathrm{T}}M^{\frac{1}{2}} \tag{13}$$

其中$B_1=\frac{1}{2}Q_2^{\mathrm{T}}M^{-\frac{1}{2}}(K_0+K_0^{\mathrm{T}})M^{-1/2}Q_2$，$B_1=UH$是$B_1$的极分解；$U$是$(n-m)$阶正交矩阵；$H$是$(n-m)$阶对称半正定矩阵。

证明　由定理1知，满足约束条件(4)式～(6)式的任一刚度矩阵K可表示为(12)式，从而

$$M^{-\frac{1}{2}}KM^{-\frac{1}{2}} = M^{1/2}\Phi\Omega^2\Phi^{\mathrm{T}}M^{1/2} + Q_2GQ_2^{\mathrm{T}} = M^{1/2}\Phi\Omega^2\Phi^{\mathrm{T}}M^{1/2} + Q\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & G\end{pmatrix}Q^{\mathrm{T}} \tag{14}$$

由酉(正交)不变范数的性质[10]，有

$$\begin{aligned}
&\|M^{-1/2}(K-K_0)M^{-1/2}\|^2\\
&= \left\|Q\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & G\end{pmatrix}Q^{\mathrm{T}} - (M^{-1/2}K_0M^{-1/2} - M^{1/2}\Phi\Omega^2\Phi^{\mathrm{T}}M^{1/2}\right\|^2\\
&= \|\Omega^2 - Q_1^{\mathrm{T}}M^{-1/2}K_0M^{-1/2}Q_1\|^2 + \|Q_1^{\mathrm{T}}M^{-1/2}K_0M^{-1/2}Q_2\|^2\\
&\quad + \|Q_2^{\mathrm{T}}M^{-1/2}K_0M^{-1/2}Q_1\|^2 + \|G - Q_2^{\mathrm{T}}M^{-1/2}K_0M^{-1/2}Q_2\|^2
\end{aligned} \tag{15}$$

因此，在约束条件(4)式～(6)式下，目标函数(3)式达到极小的充分必要条件是存在$(n-m)$阶对称半正定矩阵$\hat{G}$，使

$$\|\hat{G} - Q_2^{\mathrm{T}}M^{-1/2}K_0M^{-1/2}Q_2\| = \min_{G\geqslant 0}\|G - Q_2^{\mathrm{T}}M^{-1/2}K_0M^{-1/2}Q_2\| \tag{16}$$

令

$$B = Q_2^{\mathrm{T}}M^{-1/2}K_0M^{-1/2}Q_2, \qquad B_1 = \frac{1}{2}Q_2^{\mathrm{T}}M^{-1/2}(K_0+K_0^{\mathrm{T}})M^{-1/2}Q_2 \tag{17}$$

假定B_1的极分解为$B_1=UH$，由引理2知，存在唯一的对称半正定矩阵$\hat{G}$使(16)式成立，并且

$$\hat{G} = (B_1+H)/2 \tag{18}$$

因此，由(15)式知，存在唯一的满足约束条件(4)式～(6)式的刚度矩阵$\hat{K}$使目标函数(3)式达到最小。将(18)式代入(14)式，即得$\hat{K}$的表达式(13)式，证毕。

定理2不仅保证了修正的刚度矩阵是唯一最优的对称半正定矩阵，而且公式(13)给出了修正刚度矩阵的一个新方法，克服了现有其它方法不能保证修正刚度矩阵具有半正定性的缺点。

2 结 论

由本文方法修正的刚度矩阵是刚度矩阵初始估计的唯一最优校正，它不仅精确地满足特征方程和对称性，而且满足半正定性，并且对刚度矩阵的初始估计没有任何限制。

参 考 文 献

1 Baruch M, Bar Itzhack I Y. Optimal weighted orthogonalization of measured modes. AIAA J, 1978; 16(4): 345—351

2 Baruch M. Optimization procedure to correct stiffness and flexibility matrices using vibration tests . AIAA J, 1978; 16(11): 1208—1210

3 Baruch M. Optimal correction of mass and stiffness matrices using measured modes . AIAA J, 1982; 20(11): 1623—1626

4 Wei F S. Stiffness matrix correction from incomplete test data. AIAA J, 1980; 18(10): 1274—1275

5 Berman A, Wei F S. Automated dynamic analytical model improvement. NASA—3452, 1981

6 Berman A, Nagy E J. Improvement of a large analytical model using test data. AIAA J, 1983; 21(8): 1168—1173

7 张磊. 对称非负定矩阵反问题解存在的条件. 计算数学, 1989; 11(4): 337—343

8 周树荃, 戴华. 代数特征值反问题 . 郑州: 河南科学技术出版社, 1991: 304—346

9 Higham N J. Computing a nearest symmetric positive semidefinite matrix. Linear Algebra and Its Applications, 1988; 103: 103－118

10 孙继广. 矩阵扰动分析. 北京: 科学出版社, 1987: 70--71