广义 d_{I}-V-Ⅰ型一致不变凸条件下的不可微多目标规划问题

焦合华[1,2]，刘三阳[1]
(1. 西安电子科技大学 理学院，西安 710071；2. 长江师范学院 数学与计算机学院，重庆 408100)

摘要：利用 d_{I}-不变凸性，提出一类新的广义 d_{I}-V-Ⅰ型一致不变凸的概念. 考虑带不等式约束的不可微多目标规划问题，并在广义 d_{I}-V-Ⅰ型一致不变凸性条件下，得到了一些最优性充分条件，同时建立一个Mond-Weir型对偶，并证明了弱对偶、逆对偶和严格对偶定理.
关键词：多目标规划；广义 d_{I}-不变凸性；Ⅰ型一致不变凸；最优充分性；对偶
中图分类号：O221.6 **文献标志码**：A **文章编号**：1671-5489(2012)03-0391-06

Nondifferentiable Multiobjective Programming Problem under Generalized d_{I}-V-Type-Ⅰ Univexity

JIAO He-hua[1,2], LIU San-yang[1]
(1. *School of Science*, *Xidian University*, *Xi'an* 710071, *China*;
2. *College of Mathematics and Computer*, *Yangtze Normal University*, *Chongqing* 408100, *China*)

Abstract: With the help of d_{I}-invexity, a new class of concept of generalized d_{I}-V-type-Ⅰ univexity was introduced and a nondifferentiable multiobjective programming problem with inequality constraints was considered and some sufficient optimality conditions were derived under the assumptions of generalized d_{I}-V-type-Ⅰ univexity. Furthermore, a Mond-Weir type dual was formulated and weak duality, converse duality and strict duality theorems were proved.
Key words: multiobjective programming; generalized d_{I}-invexity; type-Ⅰ univexity; sufficient optimality; duality

凸性在数学规划的许多方面包括最优性和对偶性等方面具有重要作用. 许多研究者都致力于弱化凸性的条件对多目标规划的最优性和对偶性进行研究，并取得了丰硕成果[1-10]. Hanson 等[4]为一类优化问题引入了Ⅰ型函数；Kaul 等[5]推广了该类函数，并讨论了多目标规划问题的最优性和对偶性；Hanson 等[6]引进了关于 η 的V-Ⅰ型问题，并建立了多目标规划问题的最优性条件和对偶；Mishra 等[7]在广义 d-不变凸性条件下讨论了不可微多目标规划的最优性和对偶性；Antczak[8]在广义 d-r-Ⅰ型条件下得到了不可微多目标规划的最优性充分条件和各种Mond-Weir型对偶结果；Jayswal 等[9]提出了 d-V-Ⅰ型一致不变凸函数，并建立了多目标规划问题的K-K-T型最优性充分条件和Mond-Weir型对偶；Slimani 等[10]把 d-不变凸推广到 d_{I}-不变凸，并讨论了不可微多目标规划问题的F-J和K-K-T型最优性条件及Mond-Weir型对偶.

本文利用 d_{I}-不变凸性，通过引入广义 d_{I}-V-Ⅰ型一致不变凸性的概念，考虑一个带不等式约束

收稿日期：2011-08-12.
作者简介：焦合华(1969—)，男，汉族，博士研究生，副教授，从事最优化理论和应用的研究，E-mail：jiaohh361@126.com.
基金项目：国家自然科学基金(批准号：60974082)和国家重点实验室专项科研基金(批准号：ISN02080003).

的不可微多目标规划问题, 并在广义 d_1-Ⅴ-Ⅰ型一致不变凸性条件下, 得到了几个最优性充分条件, 建立了一个 Mond-Weir 型对偶, 并证明了弱对偶、逆对偶和严格对偶定理.

1 预备知识

对 $\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in R^n$, 规定: $\boldsymbol{x}<\boldsymbol{y} \Leftrightarrow x_i<y_i$, $i=1,2,\cdots,n$; $\boldsymbol{x}\leqq\boldsymbol{y} \Leftrightarrow x_i\leqq y_i$, $i=1,2,\cdots,n$; $\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{y} \Leftrightarrow x_i\leqq y_i$, $i=1,2,\cdots,n$, 但 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}$.

设 $X_0\subseteq R^n$, $\boldsymbol{\eta}$: $X_0\times X_0\to R^n$, $R^n_{\geqq}(R^n_{\geqslant},R^n_{>})=\{\boldsymbol{x}\in R^n\,|\,\boldsymbol{x}\geqq(\geqslant,>)0\}$, $P=\{1,2,\cdots,p\}$, $M=\{1,2,\cdots,m\}$.

定义1[11] 如果对任意的 $\boldsymbol{d}\in R^n$, 方向导数 $f'(\bar{\boldsymbol{x}};\boldsymbol{d})$ 都存在且有限, 则称 f: $X_0\to R$ 在 $\bar{\boldsymbol{x}}\in X_0$ 是方向可微的, 其中 $f'(\bar{\boldsymbol{x}};\boldsymbol{d})=\lim\limits_{\lambda\to0^+}\dfrac{f(\bar{\boldsymbol{x}}+\lambda\boldsymbol{d})-f(\bar{\boldsymbol{x}})}{\lambda}$.

定义2[12] 设 X_0 为非空开集, f: $X_0\to R^p$ 在 $\bar{\boldsymbol{x}}\in X_0$ 方向可微, 如果存在 $\boldsymbol{\eta}$, 使得对任意的 $\boldsymbol{x}\in X_0$, 有

$$f_i(\boldsymbol{x})-f_i(\bar{\boldsymbol{x}})\geqq f_i'(\bar{\boldsymbol{x}};\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})),\qquad \forall i\in P,\tag{1}$$

则 f 称为 X_0 上 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 点处关于 $\boldsymbol{\eta}$ 的 d-不变凸函数, 其中

$$f_i'(\bar{\boldsymbol{x}};\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}))=\lim_{\lambda\to0^+}\frac{f_i(\bar{\boldsymbol{x}}+\lambda\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}))-f_i(\bar{\boldsymbol{x}})}{\lambda}.$$

如果式(1)对所有的 $\bar{\boldsymbol{x}}\in X_0$ 都成立, 则称 f 在 X_0 上关于 $\boldsymbol{\eta}$ 是 d-不变凸函数.

定义3[10] 设 X_0 为非空开集, 如果对任意的 $\boldsymbol{x}\in X_0$, 有

$$f_i(\boldsymbol{x})-f_i(\bar{\boldsymbol{x}})\geqq f_i'(\bar{\boldsymbol{x}};\boldsymbol{\eta}_i(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})),\qquad \forall i\in P,\tag{2}$$

则称 f: $X_0\to R^p$ 为 X_0 上 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 点处的关于 $(\boldsymbol{\eta}_i)_{i\in P}$ 的 d_1-不变凸函数, 其中

$$f_i'(\bar{\boldsymbol{x}};\boldsymbol{\eta}_i(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}))=\lim_{\lambda\to0^+}\frac{f_i(\bar{\boldsymbol{x}}+\lambda\boldsymbol{\eta}_i(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}))-f_i(\bar{\boldsymbol{x}})}{\lambda}.$$

若式(2)对任意的 $\bar{\boldsymbol{x}}\in X_0$ 都成立, 则称 f 为 X_0 上关于 $(\boldsymbol{\eta}_i)_{i\in P}$ 的 d_1-不变凸函数.

注1 定义3中, 对每个 $f_i(i\in P)$ 并不需要方向导数在任何方向都存在且有限, 而且也不需要对所有的 $f_i(i\in P)$ 在同一方向上方向可微.

考虑如下多目标规划问题:

$$(\mathrm{VP})\quad\begin{cases}\min f(\boldsymbol{x})=(f_1(\boldsymbol{x}),f_2(\boldsymbol{x}),\cdots,f_p(\boldsymbol{x})),\\ \text{s. t. } g_j(\boldsymbol{x})\leqq0,\quad j\in M,\\ \boldsymbol{x}\in X_0,\end{cases}$$

其中, X_0 为非空开集. 设 $X=\{\boldsymbol{x}\in X_0\,|\,g_j(\boldsymbol{x})\leqq0,\ j\in M\}$ 为问题(VP)的可行集. 记 $f=(f_1,f_2,\cdots,f_p)$, $g=(g_1,g_2,\cdots,g_m)$, $M(\bar{\boldsymbol{x}})=\{j\in M\,|\,g_j(\bar{\boldsymbol{x}})=0,\ \bar{\boldsymbol{x}}\in X\}$, $N(\bar{\boldsymbol{x}})=\{j\in M\,|\,g_j(\bar{\boldsymbol{x}})<0,\ \bar{\boldsymbol{x}}\in X\}$. 显然, $M(\bar{\boldsymbol{x}})\cup N(\bar{\boldsymbol{x}})=M$.

定义4[10] 若不存在 $\boldsymbol{x}\in X$, 使得 $(f(\boldsymbol{x})<f(\bar{\boldsymbol{x}}))$ $f(\boldsymbol{x})\leqslant f(\bar{\boldsymbol{x}})$, 则 $\bar{\boldsymbol{x}}\in X$ 称为问题(VP)的(弱)有效解.

定义5[10] 若存在一个正数 $L>0$, 使得对任意的 $i\in P$, 满足 $f_i(\boldsymbol{x})<f_i(\bar{\boldsymbol{x}})$ 的任意 $x\in X$ 及满足 $f_j(\boldsymbol{x})>f_j(\bar{\boldsymbol{x}})$ 的某个 $j\in P$, 都有 $f_i(\bar{\boldsymbol{x}})-f_i(\boldsymbol{x})\leqq L[f_j(\boldsymbol{x})-f_j(\bar{\boldsymbol{x}})]$, 则 $\bar{\boldsymbol{x}}\in X$ 称为问题(VP)的真有效解.

设 $\mu\in R^p_{\geqq}$, $\lambda\in R^m_{\geqq}$; η_i,θ_j: $X_0\times X_0\to R^n$, $i\in P$, $j\in M$; b_0,b_1: $X_0\times X_0\to R_{\geqq}$, ϕ_0,ϕ_1: $R\to R$.

定义6 如果存在 $\boldsymbol{\eta}_i(i\in P)$ 和 $\theta_j(j\in M)$, 使得对任意的 $\boldsymbol{x}\in X_0$, 都有

$$b_0(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})\phi_0[f_i(\boldsymbol{x})-f_i(\bar{\boldsymbol{x}})]\geqq f_i'(\bar{\boldsymbol{x}};\boldsymbol{\eta}_i(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})),\qquad i\in P,\tag{3}$$

$$-b_1(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})\phi_1[g_j(\bar{\boldsymbol{x}})]\geqq g_j'(\bar{\boldsymbol{x}};\theta_j(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})),\qquad j\in M,\tag{4}$$

则称问题(VP)在点 $\bar{\boldsymbol{x}}\in X_0$ 是关于 $(\boldsymbol{\eta}_i)_{i\in P}$ 和 $(\theta_j)_{j\in M}$ 的 d_1-Ⅴ-Ⅰ型一致不变凸的. 当 $\boldsymbol{x}\neq\bar{\boldsymbol{x}}$ 时, 如果式(3)中不等号严格成立, 则称问题(VP)在点 $\bar{\boldsymbol{x}}\in X_0$ 是关于 $(\boldsymbol{\eta}_i)_{i\in P}$ 和 $(\theta_j)_{j\in M}$ 的半严格 d_1-Ⅴ-Ⅰ型一致

不变凸的.

定义 7　如果存在 $\boldsymbol{\eta}_i(i\in P)$ 和 $\theta_j(j\in M)$, 使得对 $\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\lambda}$ 都有

$$b_0(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})\phi_0\{\sum_{i=1}^{p}\mu_i[f_i(\boldsymbol{x})-f_i(\bar{\boldsymbol{x}})]\}\leqq 0\Rightarrow\sum_{i=1}^{p}\mu_i f_i'(\bar{\boldsymbol{x}};\eta_i(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}))\leqq 0,\tag{5}$$

$$-b_1(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})\phi_1[\sum_{j=1}^{m}\lambda_j g_j(\bar{\boldsymbol{x}})]\leqq 0\Rightarrow\sum_{j=1}^{m}\lambda_j g_j'(\bar{\boldsymbol{x}};\theta_j(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}))\leqq 0,\tag{6}$$

则称问题(VP)在点 $\bar{\boldsymbol{x}}\in X_0$ 是关于$(\boldsymbol{\eta}_i)_{i\in P}$和$(\theta_j)_{j\in M}$的拟 d_{I}-V-I 型一致不变凸的.

当 $\boldsymbol{x}\neq\bar{\boldsymbol{x}}$ 时, 如果式(5)中第二个不等号严格成立, 则称问题(VP)在点 $\bar{\boldsymbol{x}}\in X_0$ 是关于$(\boldsymbol{\eta}_i)_{i\in P}$和$(\theta_j)_{j\in M}$的半严格拟 d_{I}-V-I 型一致不变凸的.

定义 8　如果存在 $\boldsymbol{\eta}_i(i\in P)$ 和 $\theta_j(j\in M)$, 使得对 $\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\lambda}$ 都有

$$\sum_{i=1}^{p}\mu_i f_i'(\bar{\boldsymbol{x}};\eta_i(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}))\geqq 0\Rightarrow b_0(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})\phi_0\{\sum_{i=1}^{p}\mu_i[f_i(\boldsymbol{x})-f_i(\bar{\boldsymbol{x}})]\}\geqq 0,\tag{7}$$

$$\sum_{j=1}^{m}\lambda_j g_i'(\bar{\boldsymbol{x}};\theta_j(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}))\geqq 0\Rightarrow -b_1(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})\phi_1[\sum_{j=1}^{m}\lambda_j g_j(\bar{\boldsymbol{x}})]\geqq 0,\tag{8}$$

则称问题(VP)在点 $\bar{\boldsymbol{x}}\in X_0$ 是关于$(\boldsymbol{\eta}_i)_{i\in P}$和$(\theta_j)_{j\in M}$的伪 d_{I}-V-I 型一致不变凸的.

当 $\boldsymbol{x}\neq\bar{\boldsymbol{x}}$ 时, 如果式(7)(式(8))中第二个不等号严格成立, 则称问题(VP)在 f 上(g 上)点 $\bar{\boldsymbol{x}}\in X_0$ 处是关于$(\boldsymbol{\eta}_i)_{i\in P}$和$(\theta_j)_{j\in M}$的半严格伪 d_{I}-V-I 型一致不变凸的. 如果式(7),(8)中第二个不等号同时严格成立, 则称问题(VP)在点 $\bar{\boldsymbol{x}}\in X_0$ 是关于$(\boldsymbol{\eta}_i)_{i\in P}$和$(\theta_j)_{j\in M}$的严格伪 d_{I}-V-I 型一致不变凸的.

定义 9　如果存在 $\boldsymbol{\eta}_i(i\in P)$ 和 $\theta_j(j\in M)$, 使得对 $\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\lambda}$ 都有式(5)和式(8)成立, 则称问题(VP)在点 $\bar{\boldsymbol{x}}\in X_0$ 是关于$(\boldsymbol{\eta}_i)_{i\in P}$和$(\theta_j)_{j\in M}$的拟伪 d_{I}-V-I 型一致不变凸的.

当 $\boldsymbol{x}\neq\bar{\boldsymbol{x}}$ 时, 如果式(8)中第二个不等号严格成立, 则称问题(VP)在点 $\bar{\boldsymbol{x}}\in X_0$ 是关于$(\boldsymbol{\eta}_i)_{i\in P}$和$(\theta_j)_{j\in M}$的拟严格伪 d_{I}-V-I 型一致不变凸的.

定义 10　如果存在 $\eta_i(i\in P)$ 和 $\theta_j(j\in M)$, 使得对 $\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\lambda}$ 都有式(7)和式(6)成立, 则称问题(VP)在点 $\bar{\boldsymbol{x}}\in X_0$ 是关于$(\boldsymbol{\eta}_i)_{i\in P}$和$(\theta_j)_{j\in M}$的伪拟 d_{I}-V-I 型一致不变凸的.

当 $\boldsymbol{x}\neq\bar{\boldsymbol{x}}$ 时, 如果式(7)中第二个不等号严格成立, 则称问题(VP)在点 $\bar{\boldsymbol{x}}\in X_0$ 是关于$(\boldsymbol{\eta}_i)_{i\in P}$和$(\theta_j)_{j\in M}$的严格伪拟 d_{I}-V-I 型一致不变凸的.

注 2　当 $b_0(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})=b_1(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})=1$, 且 ϕ_0,ϕ_1 为恒等映射时, 则定义 6 ~ 定义 10 分别退化为文献[10]中的定义 16 ~ 定义 20.

2　最优性充分条件

下面在各种广义 d_{I}-V-I 型一致不变凸性条件下建立多目标规划问题(VP)的最优性充分条件.

定理 1　设 $\bar{\boldsymbol{x}}\in X$; $u\leqq 0\Rightarrow\phi_0(u)\leqq 0$; $u\geqq 0\Rightarrow\phi_1(u)\geqq 0$. 如果存在 $\lambda_j\geqq 0$, $\mu_i\geqq 0$, $\boldsymbol{\eta}_i,\theta_j$, $i\in P$, $j\in M(\bar{\boldsymbol{x}})$, 使得

$$\sum_{i=1}^{p}\mu_i f_i'(\bar{\boldsymbol{x}};\eta_i(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}))+\sum_{j\in M(\bar{\boldsymbol{x}})}\lambda_j g_j'(\bar{\boldsymbol{x}};\theta_j(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}))\geqq 0,\qquad\forall\boldsymbol{x}\in X,\tag{9}$$

并且下列条件之一成立:

(i) 问题(VP)在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 点对 $\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\lambda}$ 是关于$(\boldsymbol{\eta}_i)_{i\in P}$,$(\theta_j)_{j\in M(\bar{\boldsymbol{x}})}$的拟严格伪 d_{I}-V-I 型一致不变凸的;

(ii) 问题(VP)在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 点对 $\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\lambda}$ 是关于$(\boldsymbol{\eta}_i)_{i\in P}$,$(\theta_j)_{j\in M(\bar{\boldsymbol{x}})}$的半严格拟 d_{I}-V-I 型一致不变凸的;

(iii) 问题(VP)在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 点对 $\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\lambda}$ 是关于$(\boldsymbol{\eta}_i)_{i\in P}$,$(\theta_j)_{j\in M(\bar{\boldsymbol{x}})}$的严格伪 d_{I}-V-I 型一致不变凸的.

则 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是问题(VP)的一个有效解.

证明: 假设 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 不是问题(VP)的有效解, 则存在 $\boldsymbol{x}\in X$, 使得 $f(\boldsymbol{x})\leqslant f(\bar{\boldsymbol{x}})$. 由 $\mu_i\geqq 0$, $b_0(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})\geqq 0$ 及 $u\leqq 0\Rightarrow\phi_0(u)\leqq 0$, 得

$$b_0(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})\phi_0\{\sum_{i=1}^{p}\mu_i[f_i(\boldsymbol{x})-f_i(\bar{\boldsymbol{x}})]\}\leqq 0.\tag{10}$$

利用条件(i)可推出

$$\sum_{i=1}^{p}\mu_i f_i'(\bar{\boldsymbol{x}};\eta_i(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})) \leqq 0, \tag{11}$$

根据式(9), 有

$$\sum_{j\in M(\bar{\boldsymbol{x}})}\lambda_j g_j'(\bar{\boldsymbol{x}};\theta_j(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})) \geqq 0, \tag{12}$$

再由条件(i)可知 $b_1(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})\phi_1\left[\sum_{j\in M(\bar{\boldsymbol{x}})}\lambda_j g_j(\bar{\boldsymbol{x}})\right]<0$, 这与 $g_j(\bar{\boldsymbol{x}})=0$, $\forall j\in M(\bar{\boldsymbol{x}})$ 矛盾. 所以, $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是问题(VP)的一个有效解.

(ii)的证明与(i)类似. 除了式(11)变为严格不等式外, 式(12)也变为严格不等式. 最后由式(6)的逆否命题可得矛盾.

下证(iii). 由 $\lambda_j\geqq 0$, $g_j(\bar{\boldsymbol{x}})=0$, $\forall j\in M(\bar{\boldsymbol{x}})$, $b_1(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})\geqq 0$ 及 $u\geqq 0\Rightarrow\phi_1(u)\geqq 0$ 可得

$$b_1(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})\phi_1\left[\sum_{j\in M(\bar{\boldsymbol{x}})}\lambda_j g_j(\bar{\boldsymbol{x}})\right]\geqq 0.$$

由条件(iii)中关系(8)的逆否命题可得 $\sum_{j\in M(\bar{\boldsymbol{x}})}\lambda_j g_j'(\bar{\boldsymbol{x}};\theta_j(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}))<0$, $\forall \boldsymbol{x}\in X\setminus\{\bar{\boldsymbol{x}}\}$. 利用关系(9)可得 $\sum_{i=1}^{p}\mu_i f_i'(\bar{\boldsymbol{x}};\eta_i(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}))>0$, $\forall \boldsymbol{x}\in X\setminus\{\bar{\boldsymbol{x}}\}$. 再根据条件(iii)中关系(7)知

$$b_0(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})\phi_0\left\{\sum_{i=1}^{p}\mu_i[f_i(\boldsymbol{x})-f_i(\bar{\boldsymbol{x}})]\right\}>0,\qquad \forall \boldsymbol{x}\in X\setminus\{\bar{\boldsymbol{x}}\},$$

这与式(10)矛盾.

所以, $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是问题(VP)的一个有效解.

定理2 设 $\bar{\boldsymbol{x}}\in X$; $u<0\Rightarrow\phi_0(u)<0$; $u\geqq 0\Rightarrow\phi_1(u)\geqq 0$; $b_0(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})>0$. 如果存在 $\mu_i>0$, $\lambda_j\geqq 0$, η_i,θ_j, $i\in P$, $j\in M(\bar{\boldsymbol{x}})$使得式(9)成立, 并且满足下列条件之一:

(i) 问题(VP)在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 点是关于$(\eta_i)_{i\in P},(\theta_j)_{j\in M(\bar{\boldsymbol{x}})}$的 d_1-V-Ⅰ型一致不变凸的;

(ii) 问题(VP)在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 点对μ,λ 是关于$(\eta_i)_{i\in P},(\theta_j)_{j\in M(\bar{\boldsymbol{x}})}$的伪拟 d_1-V-Ⅰ型一致不变凸的;

(iii) 问题(VP)在 g 上 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 点对μ,λ 是关于$(\eta_i)_{i\in P},(\theta_j)_{j\in M(\bar{\boldsymbol{x}})}$的半严格伪 d_1-V-Ⅰ型一致不变凸的.

则 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是问题(VP)的一个真有效解.

证明: 若条件(i)成立, 则由已知及式(3),(9),(4), 可得

$$b_0(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})\phi_0\left\{\sum_{i=1}^{p}\mu_i[f_i(\boldsymbol{x})-f_i\bar{\boldsymbol{x}})]\right\}\geqq\sum_{i=1}^{p}\mu_i f_i'(\bar{\boldsymbol{x}};\eta_i(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}))\geqq-\sum_{j\in M(\bar{\boldsymbol{x}})}\lambda_j g_j'(\bar{\boldsymbol{x}};\theta_j(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}))\geqq$$
$$b_1(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})\phi_1\left[\sum_{j\in M(\bar{\boldsymbol{x}})}\lambda_j g_j(\bar{\boldsymbol{x}})\right]=0,$$

所以 $b_0(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})\phi_0\left\{\sum_{i=1}^{p}\mu_i[f_i(\boldsymbol{x})-f_i(\bar{\boldsymbol{x}})]\right\}\geqq 0$. 再由 $b_0(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})>0$ 及 $u<0\Rightarrow\phi_0(u)<0$ 可知 $\sum_{i=1}^{p}\mu_i[f_i(\boldsymbol{x})-f_i(\bar{\boldsymbol{x}})]\geqq 0$, $\boldsymbol{x}\in X$, 即$\sum_{i=1}^{p}\mu_i f_i(\boldsymbol{x})\geqq\sum_{i=1}^{p}\mu_i f_i(\bar{\boldsymbol{x}})$, $\forall \boldsymbol{x}\in X$. 根据文献[13]中定理1可知, $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是问题(VP)的真有效解.

若条件(ii)成立, 则由 $g_j(\bar{\boldsymbol{x}})=0$, $\lambda_j\geqq 0$, $\forall j\in M(\bar{\boldsymbol{x}})$, $b_1(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})\geqq 0$ 和 $u\geqq 0\Rightarrow\phi_1(u)\geqq 0$, 可得 $b_1(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})\phi_1\left[\sum_{j\in M(\bar{\boldsymbol{x}})}\lambda_j g_j(\bar{\boldsymbol{x}})\right]\geqq 0$, 从而根据条件(ii)可得$\sum_{j\in M(\bar{\boldsymbol{x}})}\lambda_j g_j'(\bar{\boldsymbol{x}};\theta_j(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}))\leqq 0$, $\forall \boldsymbol{x}\in X$. 再由式(9)知$\sum_{i=1}^{p}\mu_i f_i'(\bar{\boldsymbol{x}};\eta_i(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}))\geqq 0$, $\forall \boldsymbol{x}\in X$. 根据条件(ii), 可得

$$b_0(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})\phi_0\left\{\sum_{i=1}^{p}\mu_i[f_i(\boldsymbol{x})-f_i(\bar{\boldsymbol{x}})]\right\}\geqq 0,\qquad \forall \boldsymbol{x}\in X.$$

又由 $b_0(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})>0$ 和 $u<0\Rightarrow\phi_0(u)<0$, 有 $\sum_{i=1}^{p}\mu_i[f_i(\boldsymbol{x})-f_i(\bar{\boldsymbol{x}})]\geqq 0$, $\forall \boldsymbol{x}\in X$, 所以, $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是问题(VP)的

一个真有效解.

若条件(iii)成立，则与(ii)一样，满足 $b_1(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})\phi_1[\sum_{j\in M(\bar{\boldsymbol{x}})}\lambda_j g_j(\bar{\boldsymbol{x}})]\geqq 0$，再根据条件(iii)中关系(8)的逆否命题，可得 $\sum_{j\in M(\bar{\boldsymbol{x}})}\lambda_j g_j'(\bar{\boldsymbol{x}};\theta_j(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}))<0$，$\forall \boldsymbol{x}\in X\backslash\{\bar{\boldsymbol{x}}\}$. 与(ii)的过程一样，同理可得 $\sum_{i=1}^{p}\mu_i f_i(\boldsymbol{x})\geqq\sum_{i=1}^{p}\mu_i f_i(\bar{\boldsymbol{x}})$，$\forall \boldsymbol{x}\in X$.

因此，$\bar{\boldsymbol{x}}$ 是问题(VP)的一个真有效解.

3　Mond-Weir 型对偶

下面建立多目标规划问题(VP)的 Mond-Weir 型对偶：

$$(\text{MWD})\quad\begin{cases}\max f(\boldsymbol{y})=(f_1(\boldsymbol{y}),\cdots,f_p(\boldsymbol{y})),\\ \text{s.t.}\ \sum_{i=1}^{p}\mu_i f_i'(\boldsymbol{y};\eta_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))+\sum_{j\in M(\boldsymbol{y})}\lambda_j g_j'(\boldsymbol{y};\theta_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\geqq 0,\quad \forall x\in X,\\ \boldsymbol{y}\in X,\ \mu_i\geqslant 0,\ \lambda_j\geqq 0,\ i\in P,\ j\in M(\boldsymbol{y}).\end{cases}$$

令

$$Y=\Big\{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\lambda},(\eta_i)_i,(\theta_j)_j):\ \sum_{i=1}^{p}\mu_i f_i'(\boldsymbol{y};\eta_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))+\sum_{j\in M(\boldsymbol{y})}\lambda_j g_j'(\boldsymbol{y};\theta_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\geqq 0,\ \forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in X,\ \mu_i\geqslant 0,\ \lambda_j\geqq 0,\ i\in P,\ j\in M(\boldsymbol{y})\Big\}$$

表示问题(MWD)的可行集. $Pr_X Y$ 为集 Y 在 X 上的投影.

定理 3(弱对偶)　设 $\boldsymbol{x}\in X$，$(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\lambda},(\eta_i)_{i\in P},(\theta_j)_{j\in M(\boldsymbol{y})})\in Y$，$u\leqq 0\Rightarrow\phi_0(u)<0$，$u\geqq 0\Rightarrow\phi_1(u)\geqq 0$，$b_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})>0$，并且下列条件之一成立：

(i) 问题(VP)在 $\boldsymbol{y}$ 点对 $\mu(>0)$，λ 是关于 $(\eta_i)_{i\in P}$，$(\theta_j)_{j\in M(\boldsymbol{y})}$ 的伪拟 d_1-V-Ⅰ型一致不变凸的；

(ii) 问题(VP)在 $\boldsymbol{y}$ 点对 μ，λ 是关于 $(\eta_i)_{i\in P}$，$(\theta_j)_{j\in M(\boldsymbol{y})}$ 的严格伪拟 d_1-V-Ⅰ型一致不变凸的；

(iii) 问题(VP)在 $\boldsymbol{y}$ 点对 μ，λ 是关于 $(\eta_i)_{i\in P}$，$(\theta_j)_{j\in M(\boldsymbol{y})}$ 的拟严格伪 d_1-V-Ⅰ型一致不变凸的.

则 $f(x)\nleqslant f(y)$.

证明：由 $\lambda_j\geqq 0$，$g_j(\boldsymbol{y})=0$，$j\in M(\boldsymbol{y})$，$b_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\geqq 0$ 及 $u\geqq 0\Rightarrow\phi_1(u)\geqq 0$，可得 $b_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\phi_1[\sum_{j\in M(\boldsymbol{y})}\lambda_j g_j(\boldsymbol{y})]\geqq 0$. 从而由条件(i)，可知

$$\sum_{j\in M(\boldsymbol{y})}\lambda_j g_j'(\boldsymbol{y};\theta_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\leqq 0.\tag{13}$$

又由 $(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\lambda},(\eta_i)_{i\in P},(\theta_j)_{j\in M(\boldsymbol{y})})\in Y$，可得

$$\sum_{i=1}^{p}\mu_i f_i'(\boldsymbol{y};\eta_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\geqq 0.\tag{14}$$

再由条件(i)，可得

$$b_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\phi_0\Big\{\sum_{i=1}^{p}\mu_i[f_i(\boldsymbol{x})-f_i(\boldsymbol{y})]\Big\}\geqq 0.\tag{15}$$

又因为 $u\leqq 0\Rightarrow\phi_0(u)<0$ 及 $b_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})>0$，所以

$$\sum_{i=1}^{p}\mu_i[f_i(\boldsymbol{x})-f_i(\boldsymbol{y})]>0.\tag{16}$$

假设 $f(\boldsymbol{x})\leqslant f(\boldsymbol{y})$，由 $\mu>0$ 可得

$$\sum_{i=1}^{p}\mu_i[f_i(\boldsymbol{x})-f_i(\boldsymbol{y})]<0.\tag{17}$$

这与式(16)矛盾. 故 $f(\boldsymbol{x})\nleqslant f(\boldsymbol{y})$.

(ii)和(iii)的证明与(i)类似.

注 3　如果条件(i)中的"$\mu>0$"与条件(ii)中的"严格"去掉，则可得 $f(\boldsymbol{x})\nless f(\boldsymbol{y})$.

定理4(逆对偶)　设 $\bar{y}\in X$, $(\bar{y},\mu,\lambda,(\eta_i)_{i\in P},(\theta_j)_{j\in M(\bar{y})})\in Y$, 并且定理1(定理2中 $\mu>0$)中的(i)~(iii)在 $Pr_X Y$ 中的点 $\bar{y}$ 处成立, 则 $\bar{y}$ 是问题(VP)的有效解(真有效解).

证明: 只需用$(\bar{y},\mu,\lambda,(\eta_i)_{i\in P},(\theta_j)_{j\in M(\bar{y})})$的可行性代替关系(9), 其他的分别与定理1和定理2的证明类似.

定理5(严格对偶)　设 $\bar{x}\in X$, $(\bar{y},\mu,\lambda,(\eta_i)_{i\in P},(\theta_j)_{j\in M(\bar{y})})\in Y$, 满足

$$\sum_{i=1}^{p}\mu_i f_i(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{p}\mu_i f_i(\bar{y}), \tag{18}$$

并且 $b_0(\bar{x},\bar{y})>0$, $\mu\leqq 0\Rightarrow\phi_0(u)\leqq 0$ 及 $u\geqq 0\Rightarrow\phi_1(u)\geqq 0$, 问题(VP)在 $\bar{y}$ 对 μ,λ 是关于$(\eta_i)_{i\in P}$, $(\theta_j)_{j\in M(\bar{y})}$的严格伪拟 d_{I}-V-Ⅰ型一致不变凸的, 则 $\bar{x}=\bar{y}$.

证明: 假设 $\bar{x}\neq\bar{y}$. 由 $g_j(\bar{y})=0$, $\lambda_j\geqq 0$, $\forall j\in M(\bar{y})$, $b_1(\bar{x},\bar{y})\geqq 0$ 及 $u\geqq 0\Rightarrow\phi_1(u)\geqq 0$, 可得

$$-b_1(\bar{x},\bar{y})\phi_1\Big[\sum_{j\in M(\bar{y})}\lambda_j g_j(\bar{y})\Big]\leqq 0,$$

又由问题(VP)在 $\bar{y}$ 对 μ,λ 是关于$(\eta_i)_{i\in P}$, $(\theta_j)_{j\in M(\bar{y})}$的严格伪拟 d_{I}-V-Ⅰ型一致不变凸的, 得

$$\sum_{j\in M(\bar{y})}\lambda_j g_j'(\bar{y};\theta_j(\bar{x},\bar{y}))\leqq 0.$$

再由$(\bar{y},\mu,\lambda,(\eta_i)_{i\in P},(\theta_j)_{j\in M(\bar{y})})\in Y$, 可得 $\sum_{i=1}^{p}\mu_i f_i'(\bar{y};\eta_i(\bar{x},\bar{y}))\geqq 0$. 根据严格伪拟 d_{I}-V-Ⅰ型一致不变凸性, 又有 $b_0(\bar{x},\bar{y})\phi_0\Big\{\sum_{i=1}^{p}\mu_i[f_i(\bar{x})-f_i(\bar{y})]\Big\}>0$, 利用 $b_0(\bar{x},\bar{y})>0$ 及 $u\leqq 0\Rightarrow\phi_0(u)\leqq 0$, 可知 $\sum_{i=1}^{p}\mu_i[f_i(\bar{x})-f_i(\bar{y})]>0$. 这与式(18)矛盾, 所以 $\bar{x}=\bar{y}$.

参 考 文 献

[1] Stancu-Minasian I M. Optimality and Duality in Nonlinear Programming Involving Semilocally B-Preinvex and Related Functions [J]. European Journal of Operational Research, 2006, 173(1): 47-58.

[2] Niculescu C. Optimality and Duality in Multiobjective Fractional Programming Involving ρ-Semilocally Type Ⅰ-Preinvex and Related Functions [J]. Journal of Mathematical Analysis and Its Applications, 2007, 335(1): 7-19.

[3] Fulga C, Preda V. Nonlinear Programming with E-Preinvex and Local E-Preinvex Functions [J]. European Journal of Operational Research, 2009, 192(3): 737-743.

[4] Hanson M A, Mond B. Necessary and Suficient Conditions in Constrained Optimization [J]. Mathematical Programming, 1987, 37(1): 51-58.

[5] Kaul R N, Suneja S K, Srivastava M K. Optimality Criteria and Duality in Multiple-Objective Optimization Involving Generalized Invexity [J]. Journal of Optimization Theory and Its Applications, 1994, 80(3): 465-482.

[6] Hanson M A, Pini R, Singh C. Multiobjective Programming under Generalized Type Ⅰ Invexity [J]. Journal of Mathematical Analysis and Its Applications, 2001, 261(2): 562-577.

[7] Mishra S K, Wang S Y, Lai K K. Optimality and Duality in Nondifferentiable and Multiobjective Programming under Generalized *d*-Invexity [J]. Journal of Global Optimization, 2004, 29(4): 425-438.

[8] Antczak T. Optimality Conditions and Duality for Nondifferentiable Multiobjective Programming Problems Involving *d-r*-Type Ⅰ Functions [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2009, 225(1): 236-250.

[9] Jayswal A, Kumar R. Some Nondifferentiable Multiobjective Programming under Generalized *d*-Ⅴ-type-Ⅰ Univexity [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2009, 229(1): 175-182.

[10] Slimani H, Radjef M S. Nondifferentiable Multiobjective Programming under Generalized d_{I}-Invexity [J]. European Journal of Operational Research, 2010, 202: 32-41.

[11] Clarke F H. Optimization and Nonsmooth Analysis [M]. New York: Wiley, 1983.

[12] Ye Y L. *d*-Invexity and Optimality Conditions [J]. Journal of Mathematical Analysis and Its Applications, 1991, 162(1): 242-249.

[13] Geoffrion A M. Proper Efficiency and the Theory of Vector Maximization [J]. Journal of Mathematical Analysis and Its Applications, 1968, 22(3): 618-630.

(责任编辑: 赵立芹)