第50卷 第3期 吉林大学学报(理学版) Vol. 50 No. 3
2012年5月 Journal of Jilin University (Science Edition) May 2012

分布 Henstock-Kurzweil 积分与 Darboux 问题

王 颖, 叶国菊, 刘 尉, 周雪圆
(河海大学 理学院, 南京 210098)

摘要: 利用不动点定理及分布 Henstock-Kurzweil 积分的性质, 研究 Darboux 问题最值解的存在性及最值解对广义函数的依赖性, 在广义导数下证明了 Darboux 问题最大最小解的存在性定理.

关键词: 分布 Henstock-Kurzweil 积分; Darboux 问题; 不动点; 最小最大解
中图分类号: O172.2 **文献标志码**: A **文章编号**: 1671-5489(2012)03-0452-05

Darboux Problem and the Distributional Henstock-Kurzweil Integral

WANG Ying, YE Guo-ju, LIU Wei, ZHOU Xue-yuan
(*College of Sciences*, *Hohai University*, *Nanjing* 210098, *China*)

Abstract: Using the fixed point theorem and the properties of the distributional Henstock-Kurzweil integral, we investigated the existence of extremal solutions of the Darboux problem, as well as their dependence on the distributions.

Key words: distributional Henstock-Kurzweil integral; Darboux problem; fixed point; minimal and maximal solutions

0 引 言

考虑如下 Darboux 问题:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f(x, y, z, z_{xy}), \\ z(x, c) = 0, \quad a \leqslant x \leqslant b, \\ z(a, y) = 0, \quad c \leqslant y \leqslant d, \end{cases} \tag{1}$$

其中: f 为分布(即广义函数); $Q = \{(x, y) \mid a < x < b,\ c < y < d\}$, $\overline{Q}$ 表示 Q 的闭包, $z \in C(\overline{Q})$, $C(\overline{Q})$ 是 $\overline{Q}$ 上的连续函数空间; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 表示 z 关于 x, y 的广义导数.

文献[1]利用 Sadovskii 定理和 Lipschitz 条件研究了常导数意义下的 Darboux 问题. 而广义导数包含通常意义下的导数与近似导数. 本文用广义导数考虑 Darboux 问题, 证明了 Darboux 问题(1)最大最小解的存在性定理. 首先给出了分布 Henstock-Kurzweil 积分(简称 D_{HK} 积分)在 Q 上的定义, 即如果存在连续函数 $F \in B_C(\overline{Q})$, 使其广义导数为 f, 则称 f 是 D_{HK} 可积的. 该积分推广了 Lebesgue 积分及

收稿日期: 2011-07-06.
作者简介: 王 颖(1986—), 女, 汉族, 硕士研究生, 从事泛函分析的研究, E-mail: wangying124209@163.com. 通讯作者: 叶国菊(1965—), 女, 汉族, 博士, 教授, 从事泛函分析的研究, E-mail: yegj@hhu.edu.cn.
基金项目: 国家自然科学基金(批准号: 10871059).

Henstock-Kurzweil积分[2-3]；其次，给出了分布 Henstock-Kurzweil 积分的一些良好性质[4-8]；最后，应用不动点定理讨论了 Darboux 问题最大最小解的存在性，并证明了最值解依赖于分布 f 递增.

1　预备知识

分布是定义在由一类性质较好的函数组成基本空间上的连续线性泛函，每个连续函数都可视为分布，在广义导数意义下，每个分布都是无穷次可微的.

记 $Q=\{(x,y):a<x<b,\ c<y<d\}$，$Q$ 上的基本空间定义为

$$\mathscr{D}(Q)=C_c^\infty(Q)=\{\phi:\phi\in C^\infty \text{ 且 } \phi \text{ 具有紧支集}\},$$

其中函数 $\phi(x)$ 的支集是使得 $\phi(x)\neq 0$ 全体点集的闭包.

$\mathscr{D}(Q)$ 上的连续线性泛函称为分布，$\mathscr{D}(Q)$ 上分布全体组成的空间是基本空间 $\mathscr{D}(Q)$ 的共轭空间，简记为 $\mathscr{D}'(Q)$. 有时也记 $T(\phi)=\langle T,\phi\rangle$，这里：$T\in D'$；$\phi\in\mathscr{D}(Q)$.

定义分布 T 的广义导数 T' 为 $\langle T',\phi\rangle=-\langle T,\phi'\rangle$，其中 $\phi\in\mathscr{D}(Q)$. 在这种广义导数下分布是任意可微的，并且分布的任意阶导数都是分布.

定义

$$B_C(\overline{Q})=\{F\in C(\overline{Q}):F(a,y)=0,\ F(x,c)=0\}.$$

易知，B_C 在一致范数

$$\|F\|_\infty=\max\{|F(x,y)|:(x,y)\in\overline{Q},\ F(x,y)\in C(\overline{Q})\}$$

下是 Banach 空间.

定义 1　如果存在 $F\in B_C(\overline{Q})$，使得 F 的广义导数为 f，则称 f 是分布 Henstock-Kurzweil 可积的，F 称为 f 的原函数.

分布 Henstock-Kurzweil 可积空间记为

$$D_{\mathrm{HK}}(Q)=\{f\in\mathscr{D}'(Q):f=F',\ F\in B_C(\overline{Q})\},$$

其中 F' 是 F 的广义导数.

分布 Henstock-Kurzweil 积分是一种包含了 Riemann 积分、Lebesgue 积分、Denjoy 积分和 Henstock-Kurzweil 积分的更广泛积分. 本文用 f,g,h 表示 $D_{\mathrm{HK}}(Q)$ 中的函数，它们的原函数分别记为 F,G,H.

对于 $f\in D_{\mathrm{HK}}(Q)$，定义 $D_{\mathrm{HK}}(Q)$ 中的 Alexiewicz 范数为

$$\|f\|=\sup\{|F(x,y)|:(x,y)\in\overline{Q}\}.$$

由广义导数的性质，可得：

引理 1[4]　$(D_{\mathrm{HK}}(Q),\|\cdot\|)$ 为可分的 Banach 空间，且同构于 $(B_C(\overline{Q}),\|\cdot\|_\infty)$.

下面引进 $D_{\mathrm{HK}}(Q)$ 空间中的序关系[9]. 若 $f,g\in D_{\mathrm{HK}}(Q)$，定义 $f\succeq g$（或 $g\preceq f$）当且仅当 $f-g$ 是一个测度. 文献[4]表明 $D_{\mathrm{HK}}(Q)$ 积分具有保序性，即

$$\int_Q f\geqslant\int_Q g,\qquad f\succeq g. \tag{2}$$

设 $D_{\mathrm{HK}}((a,b))$ 为定义在 (a,b) 上的分布 Henstock-Kurzweil 积分，则有

$$D_{\mathrm{HK}}((a,b))=\{f\in\mathscr{D}'(a,b):f=F',\ F\in B_C([a,b])\},$$

其中：$B_C([a,b])=\{F\in C([a,b]):F(a)=0\}$；$f$ 为 F 的广义导数.

定义 2　对于 $f\in D_{\mathrm{HK}}(Q)$，$x\in[a,b]$，$y\in[c,d]$，定义

$$\int_a^x f(\xi,\cdot)\,\mathrm{d}\xi=\partial_2F(x,\cdot),\qquad\int_c^y f(\cdot,\eta)\,\mathrm{d}\eta=\partial_1F(\cdot,y),$$

其中 ∂_1F 和 ∂_2F 分别为 F 关于 x 和 y 的广义导数. 显然

$$\int_a^x f(\xi,\cdot)\,\mathrm{d}\xi\in D_{\mathrm{HK}}((c,d)),\qquad\int_c^y f(\cdot,\eta)\,\mathrm{d}\eta\in D_{\mathrm{HK}}((a,b)).$$

引理 2（富比尼定理）[4]　设 $f\in D_{\mathrm{HK}}(Q)$，则

$$\int_Q f=\int_a^b\left(\int_c^d f(\cdot,\eta)\,\mathrm{d}\eta\right)\mathrm{d}\xi=\int_c^d\left(\int_a^b f(\xi,\cdot)\,\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}\eta.$$

序列$\{f_n\}\subset D_{\mathrm{HK}}(Q)$, $f\in D_{\mathrm{HK}}(Q)$, 若当$n\to\infty$时, $\|f_n-f\|\to 0$, 则称$\{f_n\}$强收敛于f.

引理3(**单调收敛定理**)[4] 若$\{f_n\}_{n=0}^{\infty}\subset D_{\mathrm{HK}}(Q)$且$f_0\leq f_1\leq\cdots\leq f_n\leq\cdots$, 当$n\to\infty$时,

$$(D_{\mathrm{HK}})\int_Q f_n\to A,$$

则存在$f\in D_{\mathrm{HK}}(Q)$, 使得$f_n\to f$, 且$(D_{\mathrm{HK}})\int_Q f=A$.

引理4(**控制收敛定理**)[4] 设$\{f_n\}\subset D_{\mathrm{HK}}(Q)$, 且$f_n\to f\in\mathscr{D}'(Q)$, 若存在$g,h\in D_{\mathrm{HK}}(Q)$, 使得对$\forall n\in\mathbb{N}$, 有$g\leq f_n\leq h$, 则$f\in D_{\mathrm{HK}}(Q)$, 且$\lim\limits_{n\to\infty}(D_{\mathrm{HK}})\int_Q f_n=(D_{\mathrm{HK}})\int_Q f$.

2 主要结果

设f满足以下条件:

(H_1) 对任意的$z\in C(\overline{Q})$, $z_{xy}\in D_{\mathrm{HK}}(Q)$, $f(\cdot,\cdot,z,z_{xy})$是D_{HK}可积的;

(H_2) 对于任意的$(x,y)\in\overline{Q}$, $f(x,y,\cdot,\cdot)$单调递增;

(H_3) 存在$g,h\in D_{\mathrm{HK}}$, 使得对于任意的$z\in C(\overline{Q})$, $z_{xy}\in D_{\mathrm{HK}}(Q)$, 有

$$g(\cdot,\cdot)\leq f(\cdot,\cdot,z,z_{xy})\leq h(\cdot,\cdot).$$

设$G,H\in C(\overline{Q})$. 记$G\leqslant H$, 如果对于任意的$(x,y)\in\overline{Q}$, 有$G(x,y)\leqslant H(x,y)$, 记

$$[G,H]=\{z\in C(\overline{Q}): G(x,y)\leqslant z(x,y)\leqslant H(x,y),\ (x,y)\in\overline{Q}\}.$$

若E为实值Banach空间, K为E的非空子集, 算子T: $K\to E$称为增算子当且仅当$Tu\leqslant Tv$, 其中$u,v\in K$, $u\leqslant v$.

引理5[10] $u_0,v_0\in E$, $u_0<v_0$, 增算子T: $[u_0,v_0]\to E$满足$u_0\leqslant Tu_0$, $Tv_0\leqslant v_0$, 若$T([u_0,v_0])$是一个相对紧集, 则T在$[u_0,v_0]$中存在最小不动点z_*和最大不动点z^*, 且

$$z_*=\lim_{n\to\infty}u_n,\qquad z^*=\lim_{n\to\infty}v_n,\tag{3}$$

其中$u_n=Tu_{n-1}$, $v_n=Tv_{n-1}(n=1,2,3,\cdots)$, 满足

$$u_0\leqslant u_1\leqslant\cdots\leqslant u_n\leqslant\cdots\leqslant z_*\leqslant z^*\leqslant\cdots\leqslant v_n\leqslant\cdots\leqslant v_1\leqslant v_0.\tag{4}$$

定理1 在条件(H_1)~(H_3)下, 存在$C(\overline{Q})$上的单调序列$\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$, 其中$u_0=G$, $v_0=H$, 使得

$$\lim_{n\to\infty}u_n(x,y)=z_*(x,y),\qquad \lim_{n\to\infty}v_n(x,y)=z^*(x,y),$$

其中z_*,z^*分别为Darboux问题(1)的最小、最大解.

证明: 显然, Darboux问题(1)等价于如下积分方程

$$z(x,y)=\int_a^x\int_c^y f(\xi,\eta,z(\xi,\eta),\omega(\xi,\eta))\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta,\tag{5}$$

其中$\omega=z_{xy}$.

由$g,h\in D_{\mathrm{HK}}$可知, 其原函数G,H在$\overline{Q}$上连续, 又由条件(H_3)和式(2)可知,

$$G(x,y)=\int_a^x\int_c^y g(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\leqslant\int_a^x\int_c^y f(\xi,\eta,z(\xi,\eta),\omega(\xi,\eta))\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\leqslant$$
$$\int_a^x\int_c^y h(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta=H(x,y).\tag{6}$$

对于任意的$z(x,y)\in[G,H]$, 定义

$$T(z)(x,y)=\int_a^x\int_c^y f(\xi,\eta,z(\xi,\eta),\omega(\xi,\eta))\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta,\tag{7}$$

由条件(H_2)知, T为增算子. 由式(2),(6),(7)知, $G\leqslant Tz\leqslant H$, 故

$$T: [G,H]\to[G,H].$$

进一步, 由式(6)可知,

$$|T(z)(\cdot,\cdot)|\leqslant|G(\cdot,\cdot)|+|H(\cdot,\cdot)|.$$

对于(x_1,y_1), $(x_2,y_2)\in\overline{Q}$, $z\in[G,H]$, 由富比尼定理可知,

$$\begin{aligned}T(z)(x_1,y_1)-T(z)(x_2,y_2) &= \int_a^{x_2}\left(\int_c^{y_1} f(\xi,\eta,z(\xi,\eta),\omega(\xi,\eta))\,\mathrm{d}\eta\right)\mathrm{d}\xi + \\ &\int_{x_2}^{x_1}\left(\int_c^{y_1} f(\xi,\eta,z(\xi,\eta),\omega(\xi,\eta))\,\mathrm{d}\eta\right)\mathrm{d}\xi - \\ &\int_c^{y_1}\left(\int_a^{x_2} f(\xi,\eta,z(\xi,\eta),\omega(\xi,\eta))\,\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}\eta + \\ &\int_{y_2}^{y_1}\left(\int_a^{x_2} f(\xi,\eta,z(\xi,\eta),\omega(\xi,\eta))\,\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}\eta = \\ &\int_{x_2}^{x_1}\left(\int_c^{y_1} f(\xi,\eta,z(\xi,\eta),\omega(\xi,\eta))\,\mathrm{d}\eta\right)\mathrm{d}\xi + \\ &\int_{y_2}^{y_1}\left(\int_a^{x_2} f(\xi,\eta,z(\xi,\eta),\omega(\xi,\eta))\,\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}\eta.\end{aligned}$$

由条件(H_3)知,

$$\begin{aligned}\int_{x_2}^{x_1}\left(\int_c^{y_1} g(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\eta\right)\mathrm{d}\xi + \int_{y_2}^{y_1}\left(\int_a^{x_2} g(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}\eta &\leqslant T(z)(x_1,y_1)-T(z)(x_2,y_2)\leqslant \\ \int_{x_2}^{x_1}\left(\int_c^{y_1} h(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\eta\right)\mathrm{d}\xi &+ \int_{y_2}^{y_1}\left(\int_a^{x_2} h(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}\eta.\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}|T(z)(x_1,y_1)-T(z)(x_2,y_2)| \leqslant &\left|\int_{x_2}^{x_1}\int_c^{y_1} g(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\right| + \left|\int_a^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} g(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\right| + \\ &\left|\int_{x_2}^{x_1}\int_c^{y_1} h(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\right| + \left|\int_a^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} h(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\right|.\end{aligned} \tag{8}$$

由于$G(x,y)$, $H(x,y)$在$\overline{Q}$上连续, 故有界且一致连续. 因此, 对于任意的$z\in[G,H]$, $T([G,H])$在$\overline{Q}$上一致有界且等度一致连续. 由 Ascoli-Arzelà 定理知$T([G,H])$为相对紧集, 又由引理 5 知, $T([G,H])$有最小不动点z_*和最大不动点z^*. 由式(5), (7)知, z_*, z^*为 Darboux 问题(1)的最小、最大解. 令$u_0=G$, $v_0=H$, 则式(3), (4)成立, 证毕.

推论 1 如果将条件(H_3)换成如下条件, 则定理 1 依然成立:

$(\mathrm{H}_3)'$ 存在$u,v\in C(\overline{Q})$, $u\leqslant v$, 使得$u'\leqslant f(\cdot,\cdot,u,u')$, $v'\geqslant f(\cdot,\cdot,v,v')$.

证明: 因为$u,v\in C(\overline{Q})$, 令$u'=g$, $v'=h$, 则类似于定理 1 的证明方法可证明结论.

下面给出一个命题说明 Darboux 问题(1)的最值解依赖于分布f递增.

命题 1 设分布$f,\tilde{f}$满足

$$f(\cdot,\cdot,z,z_{xy})\preceq\tilde{f}(\cdot,\cdot,z,z_{xy}). \tag{9}$$

假设$f,\tilde{f}$满足条件$(\mathrm{H}_1)\sim(\mathrm{H}_3)$, 且$z_*$, z^*为 Darboux 问题(1)在$[G,H]$内的最小、最大解, $\tilde{z}_*$, $\tilde{z}^*$为 Darboux 问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\tilde{f}(x,y,z,z_{xy}),\\ z(x,c)=0,\quad a\leqslant x\leqslant b,\\ z(a,y)=0,\quad c\leqslant y\leqslant d\end{cases} \tag{10}$$

在$[G,H]$内的最小、最大解, 则$z_*\leqslant\tilde{z}_*$, $z^*\leqslant\tilde{z}^*$.

证明: 若$\tilde{z}_*$为 Darboux 问题(10)的最小解, 则有

$$\tilde{z}_*(x,y)=\int_a^x\int_c^y\tilde{f}(\xi,\eta,z(\xi,\eta),\omega(\xi,\eta))\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta. \tag{11}$$

定义T: $[G,H]\to[G,H]$, 则由式(2), (9), (11)可知, $T(z_*)\leqslant\tilde{z}_*$. 因为$T$满足引理5 的条件, z_*也是T的最小不动点, 所以$z_*=T(z_*)\leqslant\tilde{z}_*$.

同理, 可证 $z^* \leq \tilde{z}^*$.

3 应用实例

考虑如下 Darboux 问题:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f(x,y,z,z_{xy}) = g(x,y,z,z_{xy}) + l(x,y), \\ z(x,c) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \\ z(a,y) = 0, \quad 0 \leq y \leq 1, \end{cases} \tag{12}$$

其中: $l(x,y)$在$(0,1)\times(0,1)$上 D_{HK}可积, 但非 Lebesgue 可积; $g(x,y,z,z_{xy})$满足下列条件:

1) 对于任意的$(x,y)\in[0,1]\times[0,1]$, $g(x,y,\cdot,\cdot)$是单调递增的;

2) 对于所有的$z\in C([0,1]\times[0,1])$, $z_{xy}\in D_{\mathrm{HK}}((0,1)\times(0,1))$, $g(\cdot,\cdot,z,z_{xy})$是可测的;

3) 对于任意的$(x,y)\in[0,1]\times[0,1]$, 存在$g_1(x,y)\in L^1([0,1]\times[0,1])$, 使得$|g(x,y,z,z_{xy})|\leq g_1(x,y)$.

由于D_{HK}积分包含 Lebesgue 积分, $l(x,y)$是D_{HK}可积的, 因此对于$(x,y)\in[0,1]\times[0,1]$, 由 Darboux问题(12)和条件3)知,

$$l(x,y) - g_1(x,y) \leq f(x,y,z,z_{xy}) \leq l(x,y) + g_1(x,y).$$

又由于$l(x,y)\in D_{\mathrm{HK}}$, $g_1(x,y)\in L^1$, 故$l\pm g_1\in D_{\mathrm{HK}}$. 因此由定理1知, Darboux 问题(12)有最大、最小解. 但由于$l(x,y)$在$(0,1)\times(0,1)$上不是 Lebesgue 可积的, 故 Darboux 问题(12)不能用文献[1]中的方法证明其解的存在性.

参 考 文 献

[1] Rzepecki B. On the Existence of Solutions of the Darboux Problem for the Hyperbolic Partial Differential Equations in Banach Spaces [J]. Rend Sem Mat Univ Padova, 1986, 76: 201-206.

[2] Lee P Y. Lanzhou Lectures on Henstock Integration [M]. Singapore: World Scientific Publishing Company, 1989.

[3] Schwabik Š, YE Guo-ju. Topics in Banach Space Integration [M]. Singapore: World Scientific Publishing Company, 2005.

[4] Ang D D, Schmitt K, Vy L K. A Multidimensional Analogue of the Denjoy-Perron-Henstock-Kurzweil Integral [J]. Bull Belg Math Soc, 1997, 4: 355-371.

[5] LU Yue-ping, YE Guo-ju, WANG Ying, et al. Existence of Solutions of the Wave Equation Involving the Distributional Henstock-Kurzweil Integral [J]. Differential and Integral Equations, 2011, 24(11/12): 1063-1071.

[6] Talvila E. The Distributional Denjoy Integration [J]. Real Anal Exchange, 2008, 33(1): 51-82.

[7] LIU Qiao-ling, YE Guo-ju, LIU Wei. Some Problems on the Convolution of Distributional Denjoy Integral [J]. Journal of Natural Science of Heilongjiang University, 2011, 28(2): 181-183. (刘巧玲, 叶国菊, 刘尉. 广义 Denjoy 可积函数的卷积 [J]. 黑龙江大学自然科学学报, 2011, 28(2): 181-183.)

[8] LIU Qiao-ling, YE Guo-ju. Some Problems on the Convergence of Distributional Denjoy Integral [J]. Acta Mathematica Sinica: Chinese Series, 2011, 54(4): 659-664. (刘巧玲, 叶国菊. 广义函数 Denjoy 积分的收敛性问题 [J]. 数学学报: 中文版, 2011, 54(4): 659-664.)

[9] 钟承奎, 范先令, 陈文原. 非线性泛函分析 [M]. 兰州: 兰州大学出版社, 1998.

[10] 郭大钧. 非线性分析中的半序方法 [M]. 济南: 山东科学技术出版社, 2003.

(责任编辑: 赵立芹)