第50卷 第3期　　吉林大学学报(理学版)　　Vol.50 No.3
2012年5月　　Journal of Jilin University (Science Edition)　　May 2012

一类变保费双 Cox 风险模型的鞅分析

卢树强，包树新
(大庆师范学院 数学学院，黑龙江 大庆 163712)

摘要：讨论一类带有投资收益和再保险的变保费双 Cox 风险模型：

$$U(t) = u + V_1(t) = u_1 + u_2 + \sum_{i=1}^{M_1(t)} X_i - \sum_{j=1}^{M_2(t)} Z_j + u_2 W(t).$$

假设保单数量过程 $M_1(t)$ 与索赔次数过程 $M_2(t)$ 相依，使用鞅方法得到了该模型最终破产概率的一个上界表达式 $\mathrm{e}^{-ru}\cdot C(r)$，并在特定条件 $M_1(t)=\beta(t)M_2(t)$ 下，给出了最终破产概率的一个明确上界 $\psi(u)\leqslant \mathrm{e}^{-Ru}$，其中 R 为 Lundberg 指数.

关键词：Cox 过程；Brown 运动；鞅；停时；Lundberg 指数
中图分类号：O211.6　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1671-5489(2012)03-0477-05

Martingale Analysis on a Double Cox Risk Model with Variable Premium

LU Shu-qiang, BAO Shu-xin
(*College of Mathematics*, *Daqing Normal College*, *Daqing* 163712, *Heilongjiang Province*, *China*)

Abstract: This paper deals with a double Cox risk model of variable premium with investment income and reinsurance

$$U(t) = u + V_1(t) = u_1 + u_2 + \sum_{i=1}^{M_1(t)} X_i - \sum_{j=1}^{M_2(t)} Z_j + u_2 W(t).$$

Using martingale obtained the expression of upper bound of the ultimate ruin probability $\mathrm{e}^{-ru}\cdot C(r)$ on the assumption that $M_1(t)$ and $M_2(t)$ were correlated. And under special conditions $M_1(t)=\beta(t)M_2(t)$, explicit upper bound of the ultimate ruin probability $\psi(u)\leqslant \mathrm{e}^{-Ru}$ was got, where R is Lundberg index.

Key words: Cox process; Brownian motion; martingale; stopping time; Lundberg index

0 引　言

Lundberg 经典风险模型[1]为：$U(n) = u_0 + ct - \sum_{k=1}^{N(t)} X_k$. 在假设模型的独立性、相对安全负载性和调节系数存在唯一性的条件下，文献[1]得出了 Lundberg-Cramer 近似：存在正常数 C，使得最终破产概率 $\psi(u)\to C\mathrm{e}^{-Ru}$，$u\to\infty$. 文献[2]将保费收入推广到随机形式 $R(t) = u + cM(t) - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$；文献[3]将理赔过程的发生由 Poisson 过程推广到 Cox 过程；文献[4]则在模型中加入了随机干扰项

收稿日期：2011-04-15.
作者简介：卢树强(1979—)，男，汉族，硕士，讲师，从事随机过程的研究，E-mail：lusun33917@163.com.
基金项目：黑龙江省教育厅科学技术研究项目(批准号：11553009).

$$R(t) = u + cM(t) - \sum_{k=1}^{N(t)} Z_k + bW(t),$$

考虑了保险人的随机收入和支出; 文献[5]研究了再保险业务

$$R(t) = u + cM(t) - \sum_{i=1}^{N(t)} (Z_i - h(Z_i));$$

文献[6]给出了风险投资

$$U(t, u_0, k) = u_0 + ct + k(t)(at + bW(t));$$

文献[7]在索赔次数过程服从 Cox 过程的基础上, 假设保单数量过程与索赔次数过程相关, 并带有随机扰动, 给出了模型最终破产概率的一个上界表达式. 本文在文献[7]的基础上, 对风险模型做如下推广:

1) 假设保险人参加再保险业务;

2) 假设保险人将部分盈余投资于风险市场;

3) 讨论了保单数量与索赔数量成一定比例的情况.

1 模 型

目前在保险市场, 为争取竞争优势, 许多保险企业都通过降低保费吸引客户, 导致承保利润越来越低, 使得投资成为保险业一个必不可少的利润增长点. 因此, 保险公司有必要开展风险投资, 以提高保险资金运用效率.

保险人将其承担的保险业务以分保形式部分或全部转移给其他保险人的保险称为再保险. 再保险业务能够分散风险、控制损失、扩大承保能力、稳定经营. 所以, 本文考虑风险投资和再保险对双 Cox 风险模型的共同作用.

定义 1[8] 如果 $N(t)$ 满足下列条件, 则称 $N(t)$ 是强度过程为 $\{\lambda(t), t \geqslant 0\}$、累计强度过程为 $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s)\,\mathrm{d}s$ 的 Cox 过程:

1) $N(t)$ 对 F_∞^Λ 有条件独立增量;

2) $N(t) - N(s)$ 对 F_∞^Λ 服从均值为 $\Lambda(t) - \Lambda(s)$ 的条件 Poisson 分布, 即对 $\forall\, 0 \leqslant s < t$ 和非负整数 k 以概率 1, 有

$$P(N(t) - N(s) = k \mid F_\infty^\Lambda) = \exp\{-\Lambda(t) + \Lambda(s)\} \cdot \frac{(\Lambda(t) - \Lambda(s))^k}{k!}.$$

Cox 过程也称为重随机 Poisson 过程, 是 Poisson 过程在强度上进行推广得到的, 在强度过程 $\{\lambda(t), t \geqslant 0\}$ 轨道给定的情况下, $N(t)$ 服从以该给定轨道为强度的 Poisson 过程. Cox 过程作为索赔次数过程更能描述灾害性事故发生的周期性.

设 $\{M_1(t), t \geqslant 0\}$ 和 $\{M_2(t), t \geqslant 0\}$ 为两个 Cox 过程, 累积强度分别为 $\Lambda_1(t)$ 和 $\Lambda_2(t)$; $\{X_i, i \geqslant 1\}$ 表示第 i 张保单的保费, $\{Y_j, j \geqslant 1\}$ 表示第 j 次理赔额, $\{X_i, i \geqslant 1\}$ 和 $\{Y_j, j \geqslant 1\}$ 是两个独立同分布的非负随机变量序列, 分布函数分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(x)$; $u > 0$ 为常数, 表示保险人初始准备金, $u = u_1 + u_2$ (u_1 表示用于日常开支和被保险人出险而产生的理赔, $u_2 > 0$ 为常数, 表示从 u 中分离出用于风险投资的部分); $W(t)$ 为标准 Brown 运动, 表示保险公司的不确定投资收益率. 考虑如下变保费双 Cox 风险模型:

$$U(t) = u + V_1(t) = u_1 + u_2 + \sum_{i=1}^{M_1(t)} X_i - \sum_{j=1}^{M_2(t)} Z_j + u_2 W(t), \tag{1}$$

$$Z_j = Y_j - g(Y_j), \qquad g(Y_j) = \begin{cases} 0, & Y_j \leqslant M, \\ Y_j - M, & Y_j \geqslant M \quad (j = 1, 2, 3\cdots), \end{cases} \tag{2}$$

其中: $g(Y_j)$ 为再保险公司支付额度; M 为保险公司自留额; Z_j 为保险公司赔付额, 分布函数为 $F_Z(x)$; $M_1(t) = N_1(t) + N(t)$ 且 $M_2(t) = N_2(t) + N(t)$, $N_1(t), N_2(t), N(t)$ 为 3 个独立的 Cox 过程,

强度过程分别为 $\lambda_1(t),\lambda_2(t),\lambda(t)$，累积强度过程为 $\Lambda_1(t),\Lambda_2(t),\Lambda(t)$.

$U(t)$ 可以改写为

$$U(t) = u + V(t) = u + \sum_{i=1}^{N_{12}(t)} \tilde{X}_i - \sum_{j=1}^{N(t)} \tilde{Z}_j + u_2 W(t), \tag{3}$$

其中：$\{\tilde{X}_i, i\geqslant 1\}$ 和 $\{\tilde{Z}_j, j\geqslant 1\}$ 为两个独立同分布的随机变量序列，分布函数分别为 $F_{\tilde{X}}(x)$ 和 $F_{\tilde{Z}}(x)$；$N_{12}(t) = N_1(t) + N_2(t)$ 是强度过程为 $\lambda_{12}(t) = \lambda_1(t) + \lambda_2(t)$ 的 Cox 过程，累积强度为 $\Lambda_{12}(t) = \Lambda_1(t) + \Lambda_2(t)$；并且 $\tilde{Z}_j = Z_j I_{(\xi_i=1)} - X_i I_{(\xi_i=0)}$，$\tilde{X}_i = X_i - Y_j \xi_i$ 服从两点分布，分布[7]为 $P(\xi_i=0) = \dfrac{\alpha_1}{\alpha_{12}}$ 和 $P(\xi_i=1) = \dfrac{\alpha_2}{\alpha_{12}}$，这里 $\alpha_1 = \lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{N_1(t)}{t}$，$\alpha_2 = \lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{N_2(t)}{t}$，$\alpha_{12} = \alpha_1 + \alpha_2$.

记 $\alpha = \lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{N(t)}{t}$，为了保险公司的稳定经营，要求 $\alpha_{12}E[\tilde{X}] > \alpha E[\tilde{Z}]$.

定义 2[9]　$T_u = \inf\limits_{t\geqslant 0}\{t, U(t) < 0\}$ 称为破产时刻，$\psi(u) = P\{T_u < +\infty\}$ 称为相对于 T_u 的最终破产概率.

2　主要结果

令 $F_\infty^{\Lambda_{12}} = \sigma(\Lambda_{12}(t), t\geqslant 0)$，$F_\infty^{\Lambda} = \sigma(\Lambda(t), t\geqslant 0)$，$F_t^{N_{12}} = \sigma(N_{12}(s), s\leqslant t)$，$F_t^{N} = \sigma(N(s), s\leqslant t)$，$F_\infty^{\tilde{\Lambda}} = F_\infty^{\Lambda_{12}} \vee F_\infty^{\Lambda}$，$F_t^{\tilde{N}} = F_t^{N_{12}} \vee F_t^{N}$，$F_t^{W} = \sigma(W(s), s\leqslant t)$，$F_t = F_\infty^{\tilde{\Lambda}} \vee F_t^{\tilde{N}} \vee F_t^{W}$，$h_{\tilde{X}}(r) = \int_0^\infty e^{r\tilde{X}} dF_{\tilde{X}}(x) - 1$，$h_{\tilde{Z}}(r) = \int_0^\infty e^{r\tilde{Z}} dF_{\tilde{Z}}(x) - 1$.

引理 1　设 r 为任意实数，则

$$E[\exp\{-rV(t) \mid F_\infty^{\tilde{\Lambda}}\}] = \exp\{\theta(r,t)\},$$

其中[4] $\theta(r,t) = \Lambda_{12}(t) h_{\tilde{X}}(-r) + \Lambda(t) h_{\tilde{Z}}(r) + \dfrac{1}{2}u_2^2 r^2 t$.

证明：

$$\begin{aligned} E[\exp\{-rV(t) \mid F_\infty^{\tilde{\Lambda}}\}] &= E\Big[\exp\Big\{-r\sum_{t=1}^{N_{12}(t)} \tilde{X}_i \mid F_\infty^{\tilde{\Lambda}}\Big\}\Big] \cdot E\Big[\exp\Big\{r\sum_{j=1}^{N(t)} \tilde{Z}_j \mid F_\infty^{\tilde{\Lambda}}\Big\}\Big] \cdot \\ & E[\exp\{-ru_2 W(t) \mid F_\infty^{\tilde{\Lambda}}\}] = \\ & \exp\Big\{\Lambda_{12}(t) h_{\tilde{X}}(-r) + \Lambda(t) h_{\tilde{Z}}(r) + \frac{1}{2}u_2^2 r^2 t\Big\} = \exp\{\theta(r,t)\}. \end{aligned}$$

定理 1　令 $M(t) = \dfrac{\exp\{-rU(t)\}}{\exp\{\theta(r,t)\}}$，则 $M(t)$ 是 F_t-鞅.

证明：1）$M(t)$ 是非负且 F_t 可测的.

2）由引理 1 可得

$$E[M(t) \mid F_\infty^{\tilde{\Lambda}}] = \exp\{-ru\} \cdot \frac{E[\exp\{-rV(t)\} \mid F_\infty^{\tilde{\Lambda}}]}{\exp\{\theta(r,t)\}} = \exp\{-ru\} < \infty.$$

3）对 $\forall 0\leqslant s < t$，有

$$\begin{aligned} E[M(t) \mid F_s] &= E\Big[\frac{\exp\{-rU(t)\}}{\exp\{\theta(r,t)\}}\Big| F_s\Big] = E\Big[\frac{\exp\{-r(u+V(t))\}}{\exp\{\theta(r,t)\}}\Big| F_s\Big] = \\ & E\Big[\frac{\exp\{-r(u+V(s))\}}{\exp\{\theta(r,s)\}} \cdot \frac{\exp\{-r(V(t)-V(s))\}}{\exp\{\theta(r,t)-\theta(r,s)\}}\Big| F_s\Big] = \\ & M(s) E\Big[\frac{\exp\{\theta(r,t)-\theta(r,s)\}}{\exp\{\theta(r,t)-\theta(r,s)\}}\Big| F_s\Big] = M(s), \end{aligned}$$

所以 M_t 是 F_t-鞅. 证毕.

定理 2　设 r 为任意实数，则最终破产概率满足不等式：

$$\psi(u) \leqslant e^{-ru} \cdot C(r),$$

其中 $C(r)=E[\sup\limits_{t\geqslant 0}\exp\{\theta(r,t)\}]$.

证明: 假设 $t_0<\infty$, 则 $r_0 \wedge T_u$ 是有界停时, 由鞅的停时定理得

$$\begin{aligned}\exp\{-ru\} = M(0) = E[M(t_0 \wedge T_u)] = E[M(T_u) \mid T_u \leqslant t_0]P(T_u \leqslant t_0) + \\ E[M_{t_0} \mid T_u > t_0]P(T_u > t_0) \geqslant E[M(T_u) \mid T_u \leqslant t_0]P(T_u \leqslant t_0).\end{aligned} \tag{4}$$

当 $T_u\leqslant t_0$ 时, $u+V(T_u)\leqslant 0$, 由 $M(t)=\dfrac{\exp\{-rU(T_u)\}}{\exp\{\theta(r,T_u)\}}$, 得

$$E[M(T_u) \mid T_u \leqslant t_0] \geqslant E[\exp\{\theta(r,t)\} \mid T_u \leqslant t_0] \geqslant \inf_{0\leqslant t\leqslant t_0} \exp\left\{-g(r)\Lambda(t) - \frac{u_2^2 r^2 t}{2}\right\}. \tag{5}$$

由式(4),(5)得

$$P(T_u \leqslant t_0) \leqslant \frac{\exp\{-ru\}}{E[M(T_u) \mid T_u \leqslant t_0]} \leqslant e^{-ru} \cdot \sup_{0\leqslant t\leqslant t_0} \exp\left\{g(r)\Lambda(t) + \frac{u_2^2 r^2 t}{2}\right\}, \tag{6}$$

对式(6)两边计算期望得

$$P(T_u \leqslant t_0) \leqslant e^{-ru} \cdot E[\sup_{0\leqslant t\leqslant t_0} \exp\{\theta(r,t)\}].$$

令 $t_0\to+\infty$, 得 $\psi(u)\leqslant e^{-ru} \cdot C(r)$.

3 $M_1(t)=\beta(t)M_2(t)$ 条件下无投资模型最终破产概率的上界估计

令 $F_\infty^{\Lambda_2}=\sigma(\Lambda_2(t),t\geqslant 0)$, $F_t^{M_2}=\sigma(M_2(s),s\leqslant t)$, $F_t=F_\infty^{\Lambda_2} \vee F_t^{M_2}$, $h_X(r) = \int_0^\infty e^{rX}dF_X(x) - 1$, $h_Z(r) = \int_0^\infty e^{rZ}dF_Z(x) - 1$.

引理 2 当 $M_1(t)=\beta(t)M_2(t)$ 时, 无投资风险模型

$$\hat{U}(t) = u + \hat{V}(t) = u + \sum_{i=1}^{M_1(t)} X_i - \sum_{j=1}^{M_2(t)} Z_j,$$

其中: $\beta(t)$ 为一平稳时间序列, 与 $M_1(t)$ 独立, 均值为 μ, 表明保单和索赔发生的比例; $EX>EZ$(保证保险公司稳定经营). 则存在 $\theta(r)$, r 为任意实数, 使得

$$E[\exp\{-r\hat{V}(t)\} \mid F_\infty^{\Lambda_2}] = \exp\{\Lambda_2(t) \cdot (1+\mu) \cdot \theta(r)\},$$

且 $\theta(r)=0$ 存在唯一的正根 R(称为 Lundberg 指数).

证明: 当 $M_1(t)=\beta(t)M_2(t)$ 时, 有 $E[M_1(t)]=E[\beta(t)M_2(t)]$, 即 $\Lambda_1(t)=\mu\Lambda_2(t)$, 由引理 1 得

$$E[\exp\{-r\hat{V}(t)\} \mid F_\infty^{\Lambda_2}] = \exp\{\Lambda_2(t) \cdot (1+\mu)\theta(r)\},$$

其中 $\theta(r)=h_X(-r)+h_Z(r)$.

又由

$$\frac{d\theta}{dr} = E[-Xe^{-rX}] + E[Ze^{rZ}], \qquad \frac{d^2\theta}{dr^2} = E[X^2e^{-rX}] + E[Z^2e^{rZ}],$$

有

$$\theta(0) = 0, \quad \left.\frac{d\theta}{dr}\right|_{r=0} = -(E[X] - E[Z]) < 0, \quad \left.\frac{d^2\theta}{dr^2}\right|_{r=0} = E[X^2] + E[Z^2] > 0,$$

即存在 $\delta>0$, 使得当 $r\in(0,\delta)$ 时, $\theta(r)$ 为下凸函数. 又因当 r 充分大时, $\dfrac{d\theta}{dr}$一直为正, 故 $r=0$ 为 $\theta(r)=0$的平凡解, 且 $\theta(r)=0$ 存在唯一的正根, 记为 R.

定理 3 当 $M_1(t)=\beta(t)M_2(t)$ 时, 变保费双 Cox 风险模型的最终破产概率满足 Lundberg 不等式:

$$\psi(u) \leqslant e^{-Ru},$$

其中 R 为 Lundberg 指数.

证明: 因为 R 为 Lundberg 指数, 则有 $\theta(r)=0$. 从而

$$\Lambda_2(t)\cdot(1+\mu)\cdot\theta(r)=0,\qquad \exp\{\Lambda_2(t)\cdot(1+\mu)\cdot\theta(r)\}=1,$$

由定理 1 知 $\exp\{-R(u+\hat{V})\}$ 为 F_t 鞅. 根据鞅的停时定理[10]，有

$$\begin{aligned}\exp\{-Ru\}&=E[\exp\{-R(u+\hat{V}(t_0+T_u))\}]=\\&E[\exp\{-R(u+\hat{V}(T_u))\}\mid T_u\leqslant t_0]P(T_u\leqslant t_0)+\\&E[\exp\{-R(u+\hat{V}(t_0))\}\mid T_u>t_0]P^{F_0}(T_u>t_0).\end{aligned}$$

当 $T_u>t_0$ 时，$u+\hat{V}(t_0)>0$，由强大数定理得 $\lim\limits_{t_0\to\infty}(u+\hat{V}(t))=+\infty$. 由 Lebesgue 控制收敛定理知，当 $t_0\to+\infty$ 时，有

$$E[\exp\{-R(u+\hat{V}(t_0))\}\mid T_u>t_0]P^{F_0}(T_u>t_0)\to 0.$$

令 $t_0\to+\infty$，则

$$\exp\{-Ru\}=E[\exp\{-R(u+\hat{V}(T_u))\}\mid T_u<\infty]P(T_u<\infty),$$

从而有

$$\psi(u)=\frac{\mathrm{e}^{-Ru}}{E[\exp\{-R(u+\hat{V}(T_u))\}\mid T_u<\infty]},$$

因 $u+\hat{V}(T_u)<0$，故 $\exp\{-R(u+\hat{V}(T_u))\}\geqslant 1$，于是有 $\psi(u)\leqslant \mathrm{e}^{-Ru}$.

参　考　文　献

[1] CHENG Shi-xue. The Survey for Researches of Ruin Theory [J]. Advances in Mathematics, 2002, 31(5): 403-422. (成世学. 破产论研究综述 [J]. 数学进展, 2002, 31(5): 403-422.)

[2] GONG Ri-zhao, LI Feng-jun. Ruin Probability in Risk Model with Two Poisson Processes [J]. Journal of Xiangtan Normal University: Natural Science Edition, 2001, 23(1): 55-57. (龚日朝, 李凤军. 双 Poisson 风险模型下的破产概率 [J]. 湘潭师范学院学报: 自然科学版, 2001, 23(1): 55-57.)

[3] Grandell J. Aspects of Risk Theory [M]. New York: Springer-Verlag, 1991.

[4] HE Shu-hong, ZHANG Mao. Discussion on COX Risk Model with Interference [J]. Journal of Yunnan Nationalities University: Natural Science Edition, 2005, 14(2): 172-175. (何树红, 张茂. 带干扰 COX 风险模型的讨论 [J]. 云南民族大学学报: 自然科学版, 2005, 14(2): 172-175.)

[5] HONG Sheng-guang, ZHAO Xiu-qing. A COX Risk Model of Reinsurance [J]. J Changchun Inst Tech: Natural Science Edition, 2008, 9(2): 86-88. (洪圣光, 赵秀青. 再保险的 COX 风险模型 [J]. 长春工程学院学报: 自然科学版, 2008, 9(2): 86-88.)

[6] ZHANG Jian-ye, WANG Yong-mao, QIN Gui-xia. Risk Model Construction of Unit-Linked Insurance and Its Ruin Probability by Martingale Analysis [J]. Journal of Yanshan University, 2008, 32(6): 557-560. (张建业, 王永茂, 秦桂霞. 投资连接保险风险模型的构建及其破产概率的鞅分析 [J]. 燕山大学学报, 2008, 32(6): 557-560.)

[7] LIU Yan, HU Yi-jun. Upper Bound Estimation on the Ruin Probability for a Cox Correlated Risk Model Disturbed by Diffusion in a Markovian Environment [J]. Chinese Annals of Mathematics: Ser A, 2004, 25(4): 579-586. (刘艳, 胡亦钧. 马氏环境下带扰动的 Cox 相关的风险模型破产概率的上界估计 [J]. 数学年刊: A 辑, 2004, 25(4): 579-586.)

[8] LIU Bao-liang, WANG Yong-mao, LI Jing-xia. Ruin Probabilities in Double Cox Risk Model Perturbed by Brownian Motion [J]. Mathematics in Economics, 2006, 23(3): 243-246. (刘宝亮, 王永茂, 李静霞. 带干扰的双 Cox 风险模型的破产概率 [J]. 经济数学, 2006, 23(3): 243-246.)

[9] LIU Zheng-fu, JIN Yan-sheng, ZHAO Juan. A Generalization of a Risk Model with Interference [J]. Journal of Natural Science of Heilongjiang University, 2010, 27(5): 635-638. (刘征福, 金燕生, 赵娟. 推广的带干扰风险模型 [J]. 黑龙江大学自然科学学报, 2010, 27(5): 635-638.)

[10] 张连增. 精算学中的随机过程 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.

(责任编辑：赵立芹)