研究简报

图 $K_{15}-E(K_3)$ 和 $K_{17}-E(K_3)$ 的邻点可区别全染色

陈祥恩, 李泽鹏, 姚 兵
(西北师范大学 数学与信息科学学院, 兰州 730070)

摘要: 利用组合分析法和构造染色的方法, 讨论图 $K_{15}-E(K_3)$ 和 $K_{17}-E(K_3)$ 的邻点可区别全染色, 确定了它们的邻点可区别全色数分别为16和19.

关键词: 图; 邻点可区别全染色; 邻点可区别全色数
中图分类号: O157.5 **文献标志码**: A **文章编号**: 1671-5489(2012)03-0504-03

Adjacent-Vertex-Distinguishing Total Coloring of $K_{15}-E(K_3)$ and $K_{17}-E(K_3)$

CHEN Xiang-en, LI Ze-peng, YAO Bing
(*College of Mathematics and Information Science*, *Northwest Normal University*, *Lanzhou* 730070, *China*)

Abstract: Using the methods of combinatorial analysis and constructing concrete coloring, we discussed the adjacent-vertex-distinguishing total coloring of $K_{15}-E(K_3)$, $K_{17}-E(K_3)$ and obtained that the adjacent-vertex-distinguishing total chromatic numbers of $K_{15}-E(K_3)$ and $K_{17}-E(K_3)$ are 16 and 19 respectively.

Key words: graph; adjacent-vertex-distinguishing total coloring; adjacent-vertex-distinguishing total chromatic number

0 引 言

本文讨论的图均为有限、无向、简单连通图. 设图 $G(V,E)$ 为阶不小于2的简单连通图. $\Delta(G)$ 表示图 G 的最大度. 图 G 的一个 k-正常全染色 f 是指 k 种颜色 $1,2,\cdots,k$ 关于图 G 的顶点和边的分配, 使得任意两个相关联或相邻的元素具有不同的颜色. 对任意的 $x\in V(G)$, 令 $C_f(x)$ (或在不引起混淆时记为 $C(x)$) 表示点 x 的颜色及与点 x 相关联的全体边的颜色构成的集合. $C_f(x)$ 称为点 x 在 f 下的色集合. $C_f(x)$ 在全体颜色构成的集合 $\{1,2,\cdots,k\}$ 中的补集记为 $\overline{C}_f(x)$ 或 $\overline{C}(x)$. 若对 $\forall u,v\in V(G)$, $uv\in E(G)$, 有 $C(u)\neq C(v)$, 即 $\overline{C}(u)\neq\overline{C}(v)$, 则 f 称为图 G 的一个 k-邻点可区别全染色(简称为 k-AVDTC). 数 $\min\{k\mid G$ 有一个 k-AVDTC$\}$ 称为图 G 的邻点可区别全色数, 记作 $\chi_{at}(G)$.

文献[1]提出了图的邻点可区别正常全染色的概念, 并研究了一些特殊图类, 给出如下结果与猜想:

引理1[1] $\chi_{at}(G)\geqslant\Delta(G)+1$; 若图 G 存在相邻的最大度点, 则 $\chi_{at}(G)\geqslant\Delta(G)+2$.

猜想1[1] 对阶数不小于2的简单连通图 G, 有 $\chi_{at}(G)\leqslant\Delta(G)+3$.

文献[2]讨论了图 $K_{2n+1}-E(P_3)$ 以及 $K_{2n+1}-E(K_3)$ $(n\neq 7,8)$ 的邻点可区别全色数, 得到如下结果及猜想:

定理1[2] 设 K_3 是完全图 K_{2n+1} 的3阶完全子图, 则 $\chi_{at}(K_3-E(K_3))=1$; 当 $2\leqslant n\leqslant 6$ 时,

收稿日期: 2011-08-19.
作者简介: 陈祥恩(1965—), 男, 汉族, 硕士, 教授, 从事图论及其应用的研究, E-mail: chenxe@nwnu.edu.cn.
基金项目: 国家自然科学基金(批准号: 61163037; 61163054)、宁夏自然科学基金(批准号: NZ1154)、宁夏大学科学研究基金(批准号: ndzr10-7)和西北师范大学"知识与科技创新工程"项目(批准号: nwnu-kjcxgc-03-61).

$\chi_{at}(K_{2n+1}-E(K_3))=2n+2$; 当 $n\geqslant 9$ 时, $\chi_{at}(K_{2n+1}-E(K_3))=2n+3$.

猜想 2[2]　当 $n=7,8$ 时, 图 $K_{2n+1}-E(K_3)$ 的邻点可区别全色数等于 $2n+2$.

关于邻点可区别全色数的其他研究成果可参见文献[3-7], 相关术语可参见文献[8]. 本文研究猜想 2.

1　主要结果

定理 2　设 K_3 是完全图 K_{2n+1} 的子图, 则:

$$\chi_{at}(K_{17}-E(K_3))=19; \qquad \chi_{at}(K_{15}-E(K_3))=16.$$

证明: 当 $n=8$ 时, 设

$$V(K_{17}-E(K_3))=\{v_1,v_2,\cdots,v_{17}\}, \qquad K_3=v_1v_2v_3v_1.$$

由于 $K_{17}-E(K_3)$ 有相邻的度为 16 的点, 故

$$\chi_{at}(K_{17}-E(K_3))\geqslant 18.$$

先证明 $K_{17}-E(K_3)$ 没有 18-AVDTC. 假设 $K_{17}-E(K_3)$ 有一个 18-AVDTC f, 所使用的颜色的集合为 $C=\{1,2,\cdots,18\}$. 设

$$E_i=\{e\in E(K_{17}-E(K_3))\mid f(e)=i\}, \qquad i=1,2,\cdots,18.$$

则 E_i 是 $K_{17}-E(K_3)$ 的匹配, 所以 $|E_i|\leqslant 8$. 事实上, 对 $\forall i\in\{1,2,\cdots,18\}$, $|E_i|\geqslant 6$. 否则, 若存在 $j\in\{1,2,\cdots,18\}$, 使得 $|E_j|\leqslant 5$, 则最多有 10 个点, 使得 j 在其某条关联边上表现, 所以至少存在 4 个点 $u_1,u_2,u_3,u_4\in\{v_4,v_5,\cdots,v_{17}\}$, 使得 j 在每个 $u_i(i=1,2,3,4)$ 的关联边上都不表现, 但 j 最多染了 u_1,u_2,u_3,u_4 这 4 个顶点中的一个顶点, 因此 u_1,u_2,u_3,u_4 中至少有 3 个点的色集合相同(都不含 j). 这与 f 是 18-AVDTC 矛盾. 令

$$C_1=\{i\mid i\in\{1,2,\cdots,18\},|E_i|=8\};$$
$$C_2=\{i\mid i\in\{1,2,\cdots,18\},|E_i|=7\};$$
$$C_3=\{i\mid i\in\{1,2,\cdots,18\},|E_i|=6\}.$$

设 $m_k=|C_k|$, $k=1,2,3$, 有

$$m_1+m_2+m_3=18, \qquad 8m_1+7m_2+6m_3=133.$$

消去 m_2, 有

$$m_1=7+m_3\geqslant 7,$$

又 $f(v_4),f(v_5),\cdots,f(v_{17})$ 互异, 且均与 $f(v_1),f(v_2),f(v_3)$ 不同, 故至多有 3 种颜色不染点. 因此在 C_1 中至少存在 $4+m_3$ 种颜色属于 $K_{17}-E(K_3)$ 的所有点的色集合; 另一方面, 由于 $\bar{C}(v_4),\bar{C}(v_5),\cdots,\bar{C}(v_{17})$ 互异, 则只有 4 种颜色在 $v_4,v_5,\cdots,v_{17}$ 上都表现. 所以, 在所有点的色集合都出现的颜色恰有 4 种, 且 $m_3=0$, $m_1=7$. 此外, 有 $f(v_1)=f(v_2)=f(v_3)$(否则, 染点的颜色至少有 16 种, 即至多有 2 种色不染点, C_1 中至少有 5 种色属于 $K_{17}-E(K_3)$ 的每个点的色集合, 矛盾). 不妨设 $C_1=\{1,2,\cdots,7\}$, 其中 1,2,3,4 在所有点的色集合中都出现. 设 $f(v_1)=f(v_2)=f(v_3)=l$, 若 $l\in C_1$, 则 l 在 16 个点的关联边上出现, 矛盾. 若 $l\in C_2$, 则 l 在 14 个点的关联边上出现, 故 l 在 $K_{17}-E(K_3)$ 的所有点的色集合中都出现了, 又 $l\notin\{1,2,3,4\}$, 所以有 5 种颜色在 $K_{17}-E(K_3)$ 的所有点的色集合中都出现了, 矛盾.

下面给出 $K_{17}-E(K_3)$ 的一个 19-AVDTC f. 以下所提到的颜色均在集合 $\{1,2,\cdots,19\}$ 中, 如超出此范围, 则取模 19. 对 $\forall v_iv_j\in E(K_{17}-E(K_3))$, $f(v_iv_j)=i+j$; 及 $\forall v_i\in V(K_{17}-E(K_3))$, $f(v_i)=2i$. 则在上述染色下, 有

$$\bar{C}(v_1)=\{1,3,4,19\}, \quad \bar{C}(v_2)=\{1,2,3,5\}, \quad \bar{C}(v_3)=\{2,3,4,5\};$$
$$\bar{C}(v_i)=\{i-1,i\}, \qquad i=4,5,\cdots,17.$$

所以,

$$\chi_{at}(K_{17}-E(K_3))=19.$$

当 $n=7$ 时, 设

$$V(K_{15}-E(K_3))=\{v_1,v_2,\cdots,v_{15}\}, \qquad K_3=v_1v_{14}v_{15}v_1.$$

显然有

$$\chi_{at}(K_{15}-E(K_3))\geq 16.$$

下面给出一个 $K_{15}-E(K_3)$ 的 16-AVDTC f. 设所用颜色集合为 $C=\{1,2,\cdots,15\}\cup\{\alpha\}$, 下面提到的数字颜色不在此集合中时, 取模 15. 对 $\forall v_iv_j\in E(K_{15}-E(K_3))$, i, $j\neq 15$, 用 $i+j$ 染色; 对 $\forall v_iv_{15}\in E(K_{15}-E(K_3))$, 用 $2i$ 染色, 这里 $i\in\{2,3,\cdots,13\}$. 此时, 点 $v_1,v_2,\cdots,v_{15}$ 上未表现的颜色集合依次为 $\{1,2,15,\alpha\}$, $\{2,\alpha\}$, $\{3,\alpha\}$, $\{4,\alpha\}$, $\{5,\alpha\}$, $\{6,\alpha\}$, $\{7,\alpha\}$, $\{8,\alpha\}$, $\{9,\alpha\}$, $\{10,\alpha\}$, $\{11,\alpha\}$, $\{12,\alpha\}$, $\{13,\alpha\}$, $\{13,14,15,\alpha\}$, $\{2,13,15,\alpha\}$.

下面对已染的边中部分边上的颜色重染, 使得上述每个集合中存在一种颜色, 用这种颜色染点, 满足任意相邻两点上的颜色不同, 并且剩下的颜色集合两两不同.

(i) 边 v_1v_2 上的颜色用 2 替换, 边 $v_{13}v_{14}$ 上的颜色用 13 替换, 边 v_3v_5, v_6v_8, $v_{10}v_{12}$, $v_{11}v_{13}$ 上的颜色用 α 替换;

(ii) 边 v_5v_8 上的颜色用 8 替换, 边 v_7v_{10} 上的颜色用 7 替换, 边 v_9v_{11} 上的颜色用 9 替换;

(iii) 边 v_5v_{11} 上的颜色用 5 替换, 边 v_1v_4 上的颜色用 α 替换, 边 v_9v_{14} 上的颜色用 α 替换.

替换后, 点 $v_1,v_2,\cdots,v_{15}$ 上未表现的颜色集合分别为 $\{1,3,15,5\}$, $\{3,\alpha\}$, $\{3,8\}$, $\{4,5\}$, $\{1,13\}$, $\{6,14\}$, $\{2,\alpha\}$, $\{13,14\}$, $\{5,8\}$, $\{2,10\}$, $\{1,11\}$, $\{7,12\}$, $\{9,12\}$, $\{8,12,14,15\}$, $\{2,13,15,\alpha\}$. 令

$$f(v_1)=15,\quad f(v_2)=3,\quad f(v_3)=8,\quad f(v_4)=4,\quad f(v_5)=1,$$
$$f(v_6)=14,\quad f(v_7)=\alpha,\quad f(v_8)=13,\quad f(v_9)=5,\quad f(v_{10})=2,$$
$$f(v_{11})=11,\quad f(v_{12})=12,\quad f(v_{13})=9,\quad f(v_{14})=15,\quad f(v_{15})=15.$$

可以验证 f 是 $K_{15}-E(K_3)$ 的 16-AVDTC.

参考文献

[1] ZHANG Zhong-fu, CHEN Xiang-en, LI Jing-wen, et al. On Adjacent-Vertex-Distinguishing Total Coloring of Graphs [J]. Science in China: Series A, 2005, 48(3): 289-299.

[2] CHEN Xiang-en. Adjacent-Vertex-Distinguishing Total Chromatic Numbers on $K_{2n+1}-E(P_3)$ [J]. International Journal of Pure and Applied Mathematics, 2004, 13(1): 19-27.

[3] CHEN Xiang-en, ZHANG Zhong-fu. AVDTC Numbers of Generalized Halin Graphs with Maximum Degree at Least 6 [J]. Acta Math Appl Sinica: English Series, 2008, 24(1): 55-58.

[4] CHEN Xiang-en. On the Adjacent Vertex Distinguishing Total Coloring Numbers of Graphs with $\Delta=3$ [J]. Discrete Mathematics, 2008, 308(17): 4003-4007.

[5] Hulgan J. Concise Proofs for Adjacent Vertex Distinguishing Total Colorings [J]. Discrete Mathematics, 2009, 309(8): 2548-2550.

[6] CHEN Xiang-en, MA Yan-rong. Adjacent-Vertex-Distinguishing Total Chromatic Numbers of $K_r^c\vee K_s$ [J]. Journal of Jilin University: Science Edition, 2011, 49(1): 68-70. (陈祥恩, 马彦荣. 图 $K_r^c\vee K_s$ 的邻点可区别全色数 [J]. 吉林大学学报: 理学版, 2011, 49(1): 68-70.)

[7] CHEN Xiang-en, ZHANG Zhong-fu. Adjacent-Vertex-Distinguishing Total Chromatic Numbers of $K_{2n+1}-E(2K_2)$ [J]. Journal of Lanzhou University: Natural Sciences, 2005, 41(6): 102-105. (陈祥恩, 张忠辅. 关于图 $K_{2n+1}-E(2K_2)$ 的邻点可区别全色数 [J]. 兰州大学学报: 自然科学版, 2005, 41(6): 102-105.)

[8] Bondy J A, Murty U S R. Graph Theory [M]. London: Springer, 2008.

(责任编辑: 赵立芹)