第49卷 第6期
2011年11月

吉林大学学报(理学版)
Journal of Jilin University (Science Edition)

Vol. 49 No. 6
Nov 2011

Wnil-内射模的若干性质及刻画

陈文兵, 殷晓斌
(安徽师范大学 数学计算机科学学院, 安徽 芜湖 241000)

摘要: 给出了 Wnil-内射模的一些性质及刻画, 并在单奇异左模是 Wnil-内射的条件下讨论了一些特殊环(如约化环、半素环、拟 ZI-环等)之间的关系.

关键词: Wnil-内射模; NI-环; 左半中心; ZC-环; 拟 ZI-环
中图分类号: O153.3 **文献标志码**: A **文章编号**: 1671-5489(2011)06-0985-04

Some Properties and Characterizations on Wnil-Injective Modules

CHEN Wen-bing, YIN Xiao-bin
(*College of Mathematics and Computer Science*, *Anhui Normal University*, *Wuhu* 241000, *Anhui Province*, *China*)

Abstract: We gave some properties and characterizations of Wnil-injective modules, and under the condition that every simple singular left module is Wnil-injective, we discussed the relationship of some special rings (such as reduced rings, semiprime rings and quasi ZI-rings).

Key words: Wnil-injective module; NI-rings; semicentral; ZC-rings; quasi ZI-rings

本文中的环均指含有单位元的结合环, 环上的模为单式模. 设 R 为环, $J(R)$, $Z_l(R)$ ($Z_r(R)$), $N(R)$ 和 $P(R)$ 分别表示 R 的 Jacobson 根、左(右)奇异理想、幂零元集合和素根. 若 $Z_l(R)=0$ ($Z_r(R)=0$), 则环 R 称为左(右)非奇异的. 对任意的 $a\in R$, $l(a)$ 和 $r(a)$ 分别表示 a 的左零化子和右零化子. 如果 R 中不含有非零的幂零元, 则称 R 是约化环[1]. 如果对于任意的 $a\in N(R)$ 及任意左 R-模同态 f: $Ra\to M$ 可以扩张为 R 到 M 的同态, 则左 R-模 M 称为 nil-内射模[2]. 如果$_RR$ 为 nil-内射模, 则环 R 称为左 nil-内射环[2]. 如果对于任意的 $0\neq a\in R$, 存在正整数 n, 使得 $a^n\neq 0$, 且对任意的左 R-模同态 f: $Ra^n\to M$ 可以扩张为 R 到 M 的同态, 则左 R-模 M 称为 GP-内射模[3]. 如果$_RR$ 为 GP-内射模, 则环 R 称为左 GP-内射环[3]. 如果对于任意的 $0\neq a\in N(R)$, 存在正整数 n, 使得 $a^n\neq 0$, 且对任意的左 R-模同态 f: $Ra^n\to M$ 可以扩张为 R 到 M 的同态, 则左 R-模 M 称为 Wnil-内射模[2]. 如果$_RR$ 为 Wnil-内射模, 则环 R 称为左 Wnil-内射环[2]. 易知 GP-内射环一定是 Wnil-内射环.

文献[2,4]分别利用 nil-内射模和 Wnil-内射模研究了一些特殊环的性质. 文献[3]研究了单奇异左模是 GP-内射环的若干性质. 本文给出 Wnil-内射模的一些刻画, 并研究单奇异左模是Wnil-内射的环的若干性质.

1 Wnil-内射模

文献[5]给出了 nil-内射环的一些刻画, 本文给出 Wnil-内射模的一些刻画.

命题 1 设 M 是左 R-模, 则下列命题等价:

收稿日期: 2011-01-17.
作者简介: 陈文兵(1988—), 男, 汉族, 硕士研究生, 从事代数学的研究, E-mail: chenwenbing007@163.com. 通讯作者: 殷晓斌(1972—), 男, 汉族, 博士, 教授, 从事代数学的研究, E-mail: xybingzh@mail.ahnu.edu.cn.
基金项目: 国家自然科学基金(批准号: 10871106; 10901002)和安徽省教育厅自然科学研究重点项目(批准号: KJ2008A026).

1) M 是左 Wnil-内射模;

2) 对任意的 $0\neq a\in N(R)$, 存在正整数 n, 使得 $a^n\neq 0$, 且 $r_M(l(a^n))=a^nM$;

3) 对任意的 $a,b\in R$ 且 $0\neq ba\in N(R)$, 存在正整数 n, 使得 $(ba)^n\neq 0$, 且

$$r_M(Rb\cap l((ab)^{n-1}a))=r_M(b)+(ab)^{n-1}aM.$$

证明: 1)⇒3). 对任意的 $a,b\in R$, $ba(\neq 0)\in N(R)$, 则 $Rb\cap l((ab)^{n-1}a)=l((ba)^n)b$. 对任意的 $x\in r_M(Rb\cap l((ab)^{n-1}a))$, 有 $l((ba)^n)bx=0$. 若 $r_1,r_2\in R$, 使得 $r_1(ba)^n=r_2(ba)^n$, 则有 $r_1-r_2\in l((ba)^n)$, 从而 $(r_1-r_2)bx=0$, 即 $r_1bx=r_2bx$. 于是, 可以定义映射

$$f: R(ba)^n\to M;\quad r(ba)^n\mapsto rbx,\quad \forall r\in R.$$

易证 f 为左 R-模同态. 故由 M 是 Wnil-内射模知, f 可以扩充为 R 到 M 的同态, 即存在 $y\in M$, 使得 $bx=f((ba)^n)=(ba)^ny$, 从而 $b(x-(ab)^{n-1}ay)=0$, 即 $x-(ab)^{n-1}ay\in r_M(b)$. 又因为

$$x=(x-(ab)^{n-1}ay)+(ab)^{n-1}ay\in r_M(b)+(ab)^{n-1}aM,$$

所以

$$r_M(Rb\cap l((ab)^{n-1}a))\subseteq r_M(b)+(ab)^{n-1}aM.$$

另一包含关系易证. 故3)成立.

3)⇒2). 取 $b=1$, $a\in N(R)$即可.

2)⇒1). 对任意的 $0\neq a\in N(R)$, 存在正整数 n, 使得 $a^n\neq 0$, 且 $r_Ml(a^n)=a^nM$. 设 f 为 Ra^n 到 M 的一个左 R-模同态, 则对任意的 $b\in l(a^n)$, 有 $bf(a^n)=f(ba^n)=f(0)=0$, 从而 $f(a^n)\in r_Ml(a^n)=a^nM$. 于是, 存在 $y\in M$, 使得 $f(a^n)=a^ny$. 故 f 可以扩充为 R 到 M 的同态, 即 M 为左 Wnil-内射模.

推论1　R 为环, 下列条件等价:

1) R 是左 Wnil-内射环;

2) 对任意的 $0\neq a\in N(R)$, 存在正整数 n, 使得 $a^n\neq 0$, 且 $rl(a^n)=a^nR$;

3) 对任意的 $a,b\in R$, $ba(\neq 0)\in N(R)$, 存在正整数 n, 使得 $(ba)^n\neq 0$, 且

$$r(Rb\cap l((ab)^{n-1}a))=r(b)+(ab)^{n-1}aR.$$

命题2　设 R 是左 Wnil-内射环, 则 $P(R)\subseteq Z_l(R)$.

证明: 设 $b\in P(R)$, 但 $b\notin Z_l(R)$. 于是, 存在非零左理想 I, 使得 $I\cap l(b)=0$, 即有 $0\neq c\in I$, 使得 $cb\neq 0$. 因为 $cb\in P(R)\subseteq N(R)$, 而 R 为 Wnil-内射环, 所以存在正整数 n, 使得 $(cb)^n\neq 0$, 且任一左 R-模同态 f: $R(cb)^n\to R$ 可扩充为 R 的自同态. 记

$$f: R(cb)^n\to R;\quad r(cb)^n\to rc(bc)^{n-1},\quad \forall r\in R.$$

易知 f 是一个左 R-模同态. 所以存在 $u\in R$, 使得 $c(bc)^{n-1}=f((cb)^n)=(cb)^nu$, 即 $(cb)^{n-1}c(1-bu)=0$. 又因为 $bu\in P(R)\subseteq J(R)$, 所以 $1-bu$ 可逆, 从而 $(cb)^{n-1}c=0$, 故 $(cb)^n=0$, 矛盾. 于是 $P(R)\subseteq Z_l(R)$.

如果 $N(R)$ 构成 R 的一个理想, 则环 R 称为 NI 环[2]. 如果 $N(R)=P(R)$, 则环 R 称为 2-素环[5]. 2-素环也称为 N-环. 易知 2-素环是 NI 环.

引理1　设 R 是左 Wnil-内射环, 且满足下列条件之一, 则有 $N(R)\subseteq Z_l(R)$:

1) R 是 NI 环;

2) R 是 2-素环.

证明: 1) 类似命题2的证明.

2) 由1)即得.

如果 $Re=eRe$ $(eR=eRe)$, 则环 R 的幂等元 e 称为左(右)半中心的[6]. 如果对任意的 $a,b\in R$, $ab=0$, 有 $ba=0$, 则环 R 称为 ZC-环[7]. 如果对任意的 $a,b\in R$, $ab=0$, 有 $aRb=0$, 则环 R 称为 ZI-环[8]. 显然 ZC-环是 ZI-环.

定理1　设 R 为左 Wnil-内射环, 则下列条件等价:

1) R 是约化环;

2）R 是 ZC 左非奇异环；

3）R 是 ZI 左非奇异环；

4）R 是 2-素左非奇异环；

5）R 是 NI 左非奇异环.

证明：5）$\Rightarrow$ 1）. 因为 R 是 NI 环，故由引理 1 知 $N(R)\subseteq Z_l(R)$. 又因为 R 为左非奇异环，所以 $N(R)=0$. 即 R 是约化环. 其余结论显然.

2　单奇异左模是 Wnil-内射模的环

如果对任意的 $a,b\in R$，$ab=0$，存在正整数 n，使得 $a^n\neq 0$ 且 $a^nRb^n=0$，则环 R 称为拟 ZI-环[9]. 显然 ZI-环是拟 ZI-环. 易知拟 ZI-环的幂等元是中心的.

定理 2　R 为环，且 R 的任一单奇异左 R-模为 Wnil-内射模，则下列条件等价：

1）R 为约化环；

2）R 为左半中心的，且 $N(R)$ 为 R 的一个右理想；

3）R 为拟 ZI 环，且对任意 $a\in N(R)$，有 $l(Ra)=Re$，$e^2=e\in N(R)$.

证明：1）$\Rightarrow$ 2），3）显然.

2）$\Rightarrow$ 1）. 对任意的 $a\in R$，$a^2=0$，则存在 R 的一个左理想 L，使得 $l(a)\oplus L$ 是 R 的一个本质子模. 若 $l(a)\oplus L\neq R$，则存在 R 的极大子模 M，使得 $l(a)\oplus L\subseteq M$，显然 M 本质. 可定义左 R-模同态

$$f:\ Ra\rightarrow R/M;\quad ra\mapsto r+M,\quad \forall r\in R. \tag{1}$$

因为单奇异左 R-模 R/M 为 Wnil-内射的，所以存在 $c\in R$，使得 $1+M=f(a)=ac+M$，从而 $1-ac\in M$. 又因为 $N(R)$ 为 R 的右理想，于是 $ac\in N(R)$，故 $1-ac$ 可逆，从而 $1\in M$. 此与 M 的极大性矛盾，所以 $l(a)\oplus L=R$. 从而存在 $e^2=e\in R$，$l(a)=Re$. 而 R 是左半中心的，所以 $a=ae=eae=0$，于是 R 是约化的.

3）$\Rightarrow$ 1）. 对任意的 $a\in R$，$a^2=0$，由假设知 $l(Ra)=Re$. 对任意的 $x\in l(a)$，则 $xa=0$，而 R 为拟 ZI-环，故 $xRa=0$，即 $x\in l(Ra)$，所以 $l(a)=l(Ra)=Re$. 又因为 R 为拟 ZI-环，所以 R 的幂等元是中心的，从而 $a=ae=ea=0$，于是 R 是约化环.

设 R 是环，L 是 R 的左（右）理想. 如果对于任意的 $a\in R$，存在正整数 n，使得 $a^nR\subseteq L(Ra^n\subseteq L)$，则称 L 是 R 的广义弱理想（简称 GW-理想）[10]. 如果对于任意的 $a\in R$，存在正整数 n，使得 $a^n\neq 0$，且 $a^nR\subseteq L(Ra^n\subseteq L)$，则称 L 是 R 的弱理想（简称 W-理想）[10]. 显然 W-理想是 GW-理想，W-理想是理想的真正推广，GW-理想是 W-理想的真正推广[10].

命题 3　若 R 的每个极大本质理想是 GW-理想，且每个单奇异左 R-模是 Wnil-内射，则 R 是左非奇异的.

证明：若不然，则存在 $0\neq a\in Z_l(R)$，使得 $a^2=0$. 于是，存在 R 的极大本质左理想 M，使得 $l(a)\subseteq M\subsetneq R$. 由于每个单奇异左 R-模是 Wnil-内射的，故 R/M 是 Wnil-内射的. 又因为 $l(a)\subseteq M$，于是可以定义左 R-模同态式（1），从而存在 $b\in R$，使得 $1-ab\in M$. 进而 $ba\in M$，$b-bab\in M$. 由 M 是 GW-理想知，存在正整数 n，使得 $(ba)^nb\in M$. 于是

$$(ba)^{n-1}b-(ba)^nb=(ba)^{n-1}(b-bab)\in M,$$
$$(ba)^{n-1}b=((ba)^{n-1}b-(ba)^nb)+(ba)^nb\in M.$$

以此类推则有 $bab\in M$. 从而 $b=(b-bab)+bab\in M$，因而 $ab\in M$，即有 $1=(1-ab)+ab\in M$，此与 M 的极大性矛盾. 故 R 是左非奇异的.

命题 4　若 R 是右半中心的，且每个单奇异左 R-模是 Wnil-内射的，则对于任意的 $a\in R$ 且 $a^2=0$，有 $RaR+l(a)=R$.

证明：设存在 $a\in R$，$a^2=0$ 且 $RaR+l(a)\neq R$，则存在 R 的一个极大左理想 M，使得 $RaR+l(a)\subseteq M$. 可以证明 M 是 R 的本质左理想（事实上，若 M 是 R 的直和项，则存在 $0\neq e^2=e\in R$，使得 $M=l(e)$. 由于 $a\in RaR\subseteq M=l(e)$，则有 $ea=eae=0$，即有 $e\in l(a)\subseteq M=l(e)$，从而 $e=e^2=0$，矛盾）. 因此单奇

异左 R-模 R/M 是 Wnil-内射的. 类似命题3 的证明可知, 存在 $b\in R$, 使得 $1-ab\in M$, 而$ab\in RaR\subseteq M$, 于是 $1\in M$, 与 M 的极大性矛盾. 故 $RaR+l(a)=R$.

引理 2[3] 设 R 是环, 若 R 的每个补左(右)理想是 GW-理想, 则 R 的每个幂等元是中心的.

定理 3 若 R 的每个补右理想是 W-理想, 且每个单奇异左 R-模是 Wnil-内射的, 则有:

1) R 为约化环;

2) R 为半素环;

3) R 为左(右)非奇异的.

证明: 只需证1). 假设存在 $0\neq a\in R$, 使得 $a^2=0$, 则存在 R 的右理想 K, 使得 $r(a)\oplus K$ 是 R 的本质右理想. 下证 $K=0$. 若不然, 由条件知存在 $0\neq b\in K$ 及正整数 n, 使得 $b^n\neq 0$ 且 $Rb^n\subseteq K$. 从而 $ab^n\in K\cap r(a)=0$, 于是 $b^n\in K\cap r(a)=0$, 这与 $b^n\neq 0$ 矛盾. 故 $K=0$, 因此 $a\in Z_r(R)$. 由命题4 和引理2知 $RaR+l(a)=R$, 因而存在 $b\in RaR\subseteq Z_r(R)$, 使得 $a=ba$. 注意 $r(b)\cap aR\neq 0$, 从而存在 $0\neq r\in R$, 使得 $ar\neq 0$ 且 $bar=0$, 但 $ar=bar=0$, 矛盾. 故 R 为约化环.

2), 3)由1)可得.

定理 4 若 R 的每个补左理想是 W-理想, 且每个单奇异左 R-模是 Wnil-内射的, 则有:

1) R 为半素环;

2) R 为右非奇异的.

证明: 1) 假设存在 $0\neq a\in R$, 使得 $RaRa=0$, 则存在左理想 K, 使得 $l(a)\oplus K$ 是 R 的本质左理想. 类似定理3 的证明可得 $K=0$, 即 $l(a)$是 R 的本质左理想. 而 $l(a)\neq R$, 于是存在 R 的极大本质左理想 M, 使得 $l(a)\subseteq M$. 因此单奇异左 R-模 R/M 是 Wnil-内射的, 所以存在 $c\in R$, 使得 $1-ac\in M$. 又 $RaR\in l(a)$, 所以 $ac\in l(a)\subseteq M$, 从而 $1\in M$, 此与 M 的极大性矛盾, 故 $a=0$, $Ra=0$, 从而 R 为半素环.

2) 设 $Z_r(R)\neq 0$, 则存在$0\neq a\in Z_r(R)$, 使得 $a^2=0$. 由命题4 及引理2 知 $RaR+l(a)=R$, 因而存在 $b\in RaR\subseteq Z_r(R)$, 使得 $a=ba$. 注意到 $r(b)\cap aR\neq 0$, 于是存在 $0\neq r\in R$, 使得 $ar\neq 0$ 且 $bar\neq 0$, 但 $ar=bar=0$, 矛盾. 故 R 为右非奇异的.

参 考 文 献

[1] Rege M B. On Von Neumann Regular Rings and SF-Rings [J]. Math Japanica, 1986, 31(6): 927-936.

[2] WEI Jun-chao, CHEN Jian-hua. nil-Injective Rings [J]. International Electronic J Algebra, 2007, 2: 1-21.

[3] YIN Xiao-bin, SHAN Fang-fang, SONG Xian-mei. Von Neumann Regularity of GP-V'-Rings [J]. J of Math, 2009, 29(6): 789-793. (殷晓斌, 单方方, 宋贤梅. GP-V'环的 VonNeumann 正则性 [J]. 数学杂志, 2009, 29(6): 789-793.)

[4] WEI Jun-chao, CHEN Jian-hua. NPP Rings, Reduced Rings and SNF Rings[J]. International Electronic J Algebra, 2008, 4: 9-26.

[5] Hirano Y. Some Studies on Strongly-Regular Rings [J]. Math J Okayam University, 1978, 20: 141-149.

[6] WANG Rui, YIN Xiao-bin. Strong Regularity of Rings with Idempotent Elements Which Are Semicentral [J]. Journal of Anhui Normal University: Natural Science, 2010, 33(6): 518-519. (王瑞, 殷晓斌. 幂等元是左半中心的环的强正则性 [J]. 安徽师范大学学报: 自然科学版, 2010, 33(6): 518-519.)

[7] Kim N K, Nam S B, Kim J K. On Simple Singular GP-Injective Modules [J]. Comm Algebra, 1999, 27(5): 2087-2096.

[8] Hirano Y, Tominaga H. Regular Rings, V-Rings and Their Generalizations [J]. Hiroshima Math J, 1979, 9: 137-149.

[9] LI Xiao-long, WU Jun. On Strong Regularity of Quasi ZI-rings [J]. Journal of Anhui Normal University: Natural Science, 2011, 34(1): 20-22. (李小龙, 吴俊. 拟 ZI-环的强正则性 [J]. 安徽师范大学学报: 自然科学版, 2011, 34(1): 20-22.)

[10] ZHOU Hai-yan. SF-Rings and Regular Rings [D]: [Master's Degree Thesis]. Wuhu: Anhui Normal University, 2002. (周海燕. SF-环与正则环 [D]: [硕士学位论文]. 芜湖: 安徽师范大学, 2002.)