第50卷 第2期 吉林大学学报(理学版) Vol.50 No.2
2012年3月 Journal of Jilin University (Science Edition) Mar 2012

点不交的 m 个 C_3 的并的点可区别全染色

辛小青[1,2], 王治文[3], 陈祥恩[1], 姚 兵[1]
(1. 西北师范大学 数学与信息科学学院, 兰州 730070; 2. 包头师范学院 数学科学学院, 内蒙古 包头 014030;
3. 宁夏大学 数学计算机学院, 银川 750021)

摘要: 利用 $\mu(G)$ 的定义确定了点不交的 m 个 $C_3(m\geqslant 2)$ 的并的点可区别全色数的下界, 并借助矩阵给出了点不交的 m 个 $C_3(m\geqslant 2)$ 的并的点可区别全染色方法, 进而确定了它的点可区别全色数.

关键词: 图; 点可区别全染色; 点可区别全色数; 点不交的并
中图分类号: O157.5 **文献标志码**: A **文章编号**: 1671-5489(2012)02-0251-07

Vertex Distinguishing Total Chromatic Number of mC_3

XIN Xiao-qing[1,2], WANG Zhi-wen[3], CHEN Xiang-en[1], YAO Bing[1]
(1. *College of Mathematics and Information Science*, *Northwest Normal University*, *Lanzhou* 730070, *China*;
2. *School of Mathematics Science*, *Baotou Teachers' College*, *Baotou* 014030, *Inner Mongolia Autonomous Region*, *China*;
3. *School of Mathematics and Computer Science*, *Ningxia University*, *Yinchuan* 750021, *China*)

Abstract: On the basis of definition of $\mu(G)$, we got the lower bound of vertex-distinguishing total chromatic number of vertex disjoint $mC_3(m\geqslant 2)$, and then gave the concrete vertex-distinguishing total coloring of vertex disjoint $mC_3(m\geqslant 2)$ with the help of matrix. Furthermore, we have obtained its vertex-distinguishing total chromatic number.

Key words: graphs; vertex-distinguishing total coloring; vertex-distinguishing total chromatic number; the vertex-disjoint union

本文讨论的图均为有限、无向、简单连通图. 用 $\delta(G)(\Delta(G))$ 表示图 G 的最小度(最大度). 如果对图 G 的两个不同点 u 和 v, 与点 u 关联的所有边的颜色构成的集合和与点 v 关联的所有边的颜色构成的集合不同, 则图 G 的一个正常边染色称为点可区别的, 点可区别的正常边染色也称为强染色. 对一个图 G 进行点可区别正常边染色所需要的最少颜色数称为图 G 的点可区别正常边色数(或者observability), 记为 $\chi_s'(G)$ 或 obs(G). 文献[1-4]得到了图 G 的点可区别正常边色数的相关结果. 设 f 是图 G 的一个使用了 k 种色的正常全染色. 对 G 的任意顶点 x, 用 $C_f(x)$ 或 $C(x)$ 表示在 f 下 x 的颜色以及与 x 关联的所有边的颜色构成的集合, 称为点 x 的色集合. 如果对 G 的任意两个不同顶点 u 与 v, 均有 $C(u)\neq C(v)$, 则称 f 为 G 的 k-点可区别正常全染色或 k-点可区别全染色(简记为 k-VDTC). 使 G 有 k-点可区别全染色的最小的 k 称为 G 的点可区别全色数, 记作 $\chi_{vt}(G)$. 文献[5-11]得到了图的点可区别全色数相关结果.

收稿日期: 2011-02-03.
作者简介: 辛小青(1980—), 女, 汉族, 硕士, 讲师, 从事图论及其应用的研究, E-mail: xinxq1203@163.com. 通讯作者: 陈祥恩(1965—), 男, 汉族, 硕士, 教授, 从事图染色理论与图代数理论的研究, E-mail: chenxe@nwnu.edu.cn.
基金项目: 国家自然科学基金(批准号: 61163037; 61163054)、宁夏自然科学基金(批准号: NZ1154)和宁夏大学科学研究基金(批准号: ndzr10-7).

对于图 G, 用 n_i 表示图 G 的度为 i 的顶点个数, 且记 $\mu(G)=\min\left\{l \,\middle|\, \binom{l}{i+1}\geqslant n_i,\ \delta\leqslant i\leqslant\Delta\right\}$. 显然有 $\chi_{vt}(G)\geqslant\mu(G)$.

猜想1[3]　$\chi_{vt}(G)=\mu(G)$ 或 $\mu(G)+1$.

文献[3]给出了对 C_n 的点可区别全色数的相关结果, 且有 $\chi_{vt}(C_3)=5$. 本文讨论点不相交的 m 个 C_3 的并的点可区别全染色($m\geqslant2$). 结果表明, 猜想1对于 mC_3 成立.

当 $n\geqslant6$ 时, 构造矩阵 $\boldsymbol{A}_n$, 使矩阵 $\boldsymbol{A}_n$ 有 $n-2$ 行、$n-2$ 列, 并且使矩阵 $\boldsymbol{A}_n$ 的元素是空集或集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的含 n 的3-子集:

$$\boldsymbol{A}_n=\begin{pmatrix}\{n,1,2\} & \{n,2,3\} & \{n,3,4\} & \cdots & \{n,n-3,n-2\} & \{n,n-2,n-1\}\\ \{n,1,3\} & \{n,2,4\} & \{n,3,5\} & \cdots & \{n,n-3,n-1\} & \varnothing\\ \{n,1,4\} & \{n,2,5\} & \{n,3,6\} & \cdots & \{n,n-4,n-1\} & \varnothing\\ \cdots\cdots & & & & & \\ \{n,1,n-1\} & \varnothing & \varnothing & \cdots & \varnothing & \varnothing\end{pmatrix}.$$

例如:

$$\boldsymbol{A}_6=\begin{pmatrix}\{6,1,2\} & \{6,2,3\} & \{6,3,4\} & \{6,4,5\}\\ \{6,1,3\} & \{6,2,4\} & \{6,3,5\} & \varnothing\\ \{6,1,4\} & \{6,2,5\} & \varnothing & \varnothing\\ \{6,1,5\} & \varnothing & \varnothing & \varnothing\end{pmatrix}.$$

设 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_r\leqslant n-2$, $1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_s\leqslant n-2$. 用 $\boldsymbol{A}_n(i_1,i_2,\cdots,i_r\,|\,j_1,j_2,\cdots,j_s)$ 表示 $\boldsymbol{A}_n$ 的位于第 $i_1,i_2,\cdots,i_r$ 行与第 $j_1,j_2,\cdots,j_s$ 列相交处的元素按原来的相对位置所构成的 $r\times s$ 子矩阵. 如果矩阵 $\boldsymbol{A}_n$ 的 3×2 子矩阵 $\boldsymbol{B}$ 中的元素恰好是顶点不交的2个 C_3 的并在某个点可区别全染色下的每个顶点的色集合, 则称子矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是好的. 当然好的 3×2 子矩阵的每个元素都是非空集. 例如 $\boldsymbol{A}_6(1,2,3,\,|\,1,2)$ 是好的, 因为其全体元素恰是 $2C_3$ 在如图1所示的点可区别全染色下各点的色集合.

图1　$2C_3$ 的VDTC

Fig.1　VDTC of $2C_3$

下面给出两种类型的 C_3 的点可区别全染色:

1) 如图2所示, C_3 的3个顶点的色集合分别为 $\{a,b,c\}$, $\{a,b,d\}$ 和 $\{a,d,e\}$, 记这种染色为 $g(a;b,c;d,e)$;

2) 如图3所示, C_3 的3个顶点的色集合分别为 $\{b,a,c\}$, $\{c,d,f\}$ 和 $\{f,e,b\}$, 记这种染色为 $h(b,a;c,d;f,e)$.

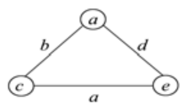

图2　C_3 的VDTC $g(a;b,c;d,e)$

Fig.2　VDTC $g(a;b,c;d,e)$ of C_3

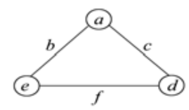

图3　C_3 的VDTC $h(b,a;c,d;f,e)$

Fig.3　VDTC $h(b,a;c,d;f,e)$ of C_3

引理1　当 $i\equiv1\pmod 3$, $j\equiv1\pmod 2$, 并且 $\boldsymbol{A}_n(i,i+1,i+2\,|\,j,j+1)$ 中元素都不是空集时, 则 $\boldsymbol{A}_n(i,i+1,i+2\,|\,j,j+1)$ 是一个好的 3×2 子矩阵.

证明: 如果 $i=1$, 则

$$\boldsymbol{A}_n[i,i+1,i+2\,|\,j,j+1]=\begin{pmatrix}\{n,j,j+1\} & \{n,j+1,j+2\}\\ \{n,j,j+2\} & \{n,j+1,j+3\}\\ \{n,j,j+3\} & \{n,j+1,j+4\}\end{pmatrix}.$$

显然, $\{n,j,j+2\}$, $\{n,j+1,j+3\}$, $\{n,j+1,j+2\}$ 是 C_3 在某个点可区别全染色下所有顶点的色集合, 同理 $\{n,j,j+3\}$, $\{n,j+1,j+4\}$, $\{n,j,j+1\}$ 也是 C_3 在某个点可区别全染色下所有顶点的色集

合(见图 1).

如果 $i\geqslant 4$，则

$$A_n(i,i+1,i+2\mid j,j+1)=\begin{pmatrix}\{n,j,j+i\} & \{n,j+1,j+i+1\}\\ \{n,j,j+i+1\} & \{n,j+1,j+i+2\}\\ \{n,j,j+i+2\} & \{n,j+1,j+i+3\}\end{pmatrix}.$$

显然，$\{n,j,j+i\}$，$\{n,j+1,j+i+1\}$，$\{n,j,j+i+1\}$ 是 C_3 在其点可区别全染色 $g(n;j,j+i;j+i+1,j+1)$ 下所有顶点的色集合，同理 $\{n,j,j+i+2\}$，$\{n,j+1,j+i+2\}$，$\{n,j+1,j+i+3\}$ 也是 C_3 在其点可区别全染色 $g(n;j+i+2,j;j+1,j+i+3)$ 下所有顶点的色集合. 证毕.

引理 2　如果 $n\equiv 1,2,4,5(\bmod 6)$，$n\geqslant 7$，则可将矩阵 A_n 的除了 $\varnothing$ 以外的所有元素划分成 $\frac{1}{3}\binom{n-1}{2}$ 个组，使得每组恰好包含 3 个子集，并且每组的 3 个子集都是在 C_3 的某个点可区别全染色下该 C_3 的所有顶点的色集合.

证明：由引理 1，只需考虑 A_n 的剩余元素：即既不是 $\varnothing$ 又不是引理 1 中所描述的任何好的 3×2 子矩阵中的元素.

情形 1：$n\equiv 1(\bmod 6)$. 对 $i\equiv 1(\bmod 6)$，$1\leqslant i\leqslant n-6$，考虑在第 i 列、第 $i+1$ 列的剩余元素：$\{n,i,n-1\}$，$\{n,i,n-2\}$，$\{n,i+1,n-1\}$，显然这 3 个子集是在 C_3 的点可区别全染色 $g(n;i,n-2;n-1,i+1)$ 下 C_3 的全体顶点的色集合. 本文将能够成为在 C_3 的某个点可区别全染色下 C_3 的全体顶点色集合的 3 个集合构成的组称为好组. 第 $i+2$ 列、第 $i+3$ 列、第 $i+4$ 列的剩余元素可分成 2 个好组：$\{\{n,i+2,n-1\},\{n,i+2,n-3\},\{n,i+4,n-1\}\}$ 和 $\{\{n,i+2,n-2\},\{n,i+3,n-1\},\{n,i+3,n-2\}\}$.

情形 2：$n\equiv 2(\bmod 6)$. 对于在第 1 列、第 2 列、第 3 列、第 $n-3$ 列、第 $n-2$ 列的剩余元素可分成 3 个好组，分别为：$\{\{n,1,n-3\},\{n,3,n-1\},\{n,n-3,n-1\}\}$，$\{\{n,1,n-2\},\{n,2,n-2\},\{n,2,n-3\}\}$ 和 $\{\{n,n-3,n-2\},\{n,n-2,n-1\},\{n,1,n-1\}\}$. 对应的 C_3 的点可区别全染色依次为 $g(n;n-3,1;n-1,3)$，$g(n;2,n-3;n-2,1)$ 和 $g(n;n-2,n-3;n-1,1)$.

当 $i\equiv 5(\bmod 6)$，$5\leqslant i\leqslant n-9$ 时，若 $n\geqslant 14$，则可将在第 i 列、第 $i+1$ 列、第 $i+2$ 列、第 $i+3$ 列、第 $i+4$ 列的剩余元素分成 3 个好组：$\{\{n,i,n-1\},\{n,i,n-2\},\{n,i+1,n-1\}\}$，$\{\{n,i+2,n-1\},\{n,i+2,n-3\},\{n,i+4,n-1\}\}$ 和 $\{\{n,i+2,n-2\},\{n,i+3,n-1\},\{n,i+3,n-2\}\}$.

情形 3：$n\equiv 4(\bmod 6)$. 对于在第 1 列、第 2 列、第 3 列、第 4 列、第 5 列、第 $n-3$ 列、第 $n-2$ 列的剩余元素，可恰好分成 4 个好组：$\{\{n,1,n-2\},\{n,2,n-1\},\{n,n-2,n-1\}\}$，$\{\{n,n-3,n-2\},\{n,n-3,n-1\},\{n,1,n-1\}\}$，$\{\{n,3,n-3\},\{n,3,n-1\},\{n,5,n-1\}\}$，$\{\{n,3,n-2\},\{n,4,n-1\},\{n,4,n-2\}\}$.

设 $i\equiv 1(\bmod 6)$，$7\leqslant i\leqslant n-9(n\geqslant 16)$，可将在第 i 列、第 $i+1$ 列、第 $i+2$ 列、第 $i+3$ 列、第 $i+4$ 列的剩余元素分成 3 个好组：$\{\{n,i,n-2\},\{n,i,n-1\},\{n,i+1,n-1\}\}$，$\{\{n,i+2,n-2\},\{n,i+3,n-1\},\{n,i+3,n-2\}\}$ 和 $\{\{n,i+4,n-1\},\{n,i+2,n-1\},\{n,i+2,n-3\}\}$.

情形 4：$n\equiv 5(\bmod 6)$. 对于在第 1 列、第 2 列、第 3 列的剩余元素，可恰好分成 2 个好组：$\{\{n,1,n-2\},\{n,2,n-1\},\{n,2,n-2\}\}$ 和 $\{\{n,1,n-1\},\{n,1,n-3\},\{n,3,n-1\}\}$.

设 $i\equiv 5(\bmod 6)$，$5\leqslant i\leqslant n-6$，可将第 i 列、第 $i+1$ 列、第 $i+2$ 列、第 $i+3$ 列、第 $i+4$ 列的剩余元素分成 3 个好组：$\{\{n,i,n-2\},\{n,i,n-1\},\{n,i+1,n-1\}\}$，$\{\{n,i+2,n-2\},\{n,i+3,n-1\},\{n,i+3,n-2\}\}$ 和 $\{\{n,i+4,n-1\},\{n,i+2,n-1\},\{n,i+2,n-3\}\}$. 证毕.

引理 3　如果 $n\equiv 0,3(\bmod 6)$，$n\geqslant 12$，则将矩阵 A_n 中的除所有空集和恰一个非空子集外的其余所有元素划分成 $\frac{1}{3}\left(\binom{n-1}{2}-1\right)$ 个组，使得每组有 3 个子集，并且每组的 3 个子集是 C_3 在它的某个点可区别全染色下所有顶点的色集合.

证明：由引理1，只需考虑$\boldsymbol{A}_n$的剩余元素：既不是$\varnothing$又不是引理1中所描述的任何好的3×2子矩阵中的元素.

情形1：$n\equiv0(\bmod 6)$. 分3种情况：

1) $n\equiv3(\bmod 9)$，对于$i\equiv3(\bmod 6)$，$3\leqslant i\leqslant n-9$，可将位于第$i$列、第$i+1$列、第$i+2$列、第$i+3$列、第$i+4$列的剩余元素分成3个好组：$\{\{n,i,n-2\},\{n,i,n-1\},\{n,i+1,n-1\}\}$，$\{\{n,i+2,n-3\},\{n,i+2,n-1\},\{n,i+4,n-1\}\}$和$\{\{n,i+3,n-2\},\{n,i+3,n-1\},\{n,i+2,n-2\}\}$. 而第1列、第$n-3$列的剩余元素恰好为一个好组：$\{\{n,1,n-1\},\{n,n-3,n-2\},\{n,n-3,n-1\}\}$，遗留下第$n-2$列元素$\{n,n-2,n-1\}$. 所以除元素$\{n,n-2,n-1\}$之外恰好将$\boldsymbol{A}_n$的非空元素划分成$\frac{1}{3}\left(\binom{n-1}{2}-1\right)$个好组.

2) $n\equiv6(\bmod 9)$，对于$i\equiv3(\bmod 6)$，$3\leqslant i\leqslant n-15$，可将第$i$列、第$i+1$列、第$i+2$列、第$i+3$列、第$i+4$列的剩余元素分成3个好组：$\{\{n,i,n-2\},\{n,i,n-1\},\{n,i+1,n-1\}\}$，$\{\{n,i+2,n-3\},\{n,i+2,n-1\},\{n,i+4,n-1\}\}$和$\{\{n,i+3,n-2\},\{n,i+3,n-1\},\{n,i+2,n-2\}\}$.

对于在第1列、第$n-9$列、第$n-8$列、第$n-7$列、第$n-6$列、第$n-3$列、第$n-2$列的剩余元素，可分成4个好组：$\{\{n,n-9,n-1\},\{n,n-9,n-2\},\{n,n-8,n-1\}\}$，$\{\{n,n-7,n-3\},\{n,n-7,n-1\},\{n,n-2,n-1\}\}$，$\{\{n,n-7,n-2\},\{n,n-6,n-1\},\{n,n-6,n-2\}\}$和$\{\{n,n-3,n-2\},\{n,n-3,n-1\},\{n,1,n-1\}\}$，但遗留下第$n-5$列元素$\{n,n-5,n-1\}$. 因此，当$n\equiv6(\bmod 9)$时，除第$n-5$列的元素$\{n,n-5,n-1\}$外，恰好将$\boldsymbol{A}_n$的非空元素划分成$\frac{1}{3}\left(\binom{n-1}{2}-1\right)$个好组.

3) $n\equiv0(\bmod 9)$，对于$i\equiv3(\bmod 6)$，$3\leqslant i\leqslant n-15$，可将第$i$列、第$i+1$列、第$i+2$列、第$i+3$列、第$i+4$列的剩余元素分成3个好组：$\{\{n,i,n-2\},\{n,i,n-1\},\{n,i+1,n-1\}\}$，$\{\{n,i+2,n-3\},\{n,i+2,n-1\},\{n,i+4,n-1\}\}$，$\{\{n,i+3,n-2\},\{n,i+3,n-1\},\{n,i+2,n-2\}\}$.

对于在第1列、第$n-9$列、第$n-8$列、第$n-6$列、…、第$n-3$列、第$n-2$列的剩余元素，可恰好分成4个好组：$\{\{n,n-9,n-1\},\{n,n-9,n-2\},\{n,n-8,n-1\}\}$，$\{\{n,n-7,n-1\},\{n,n-6,n-1\},\{n,n-6,n-2\}\}$，$\{\{n,n-7,n-2\},\{n,n-5,n-1\},\{n,n-1,n-2\}\}$和$\{\{n,n-3,n-2\},\{n,n-3,n-1\},\{n,1,n-1\}\}$，但遗留下第$n-7$列元素$\{n,n-7,n-3\}$. 因此，当$n\equiv0(\bmod 9)$时，除第$n-7$列的元素$\{n,n-7,n-3\}$外，恰好将$\boldsymbol{A}_n$的非空元素划分成$\frac{1}{3}\left(\binom{n-1}{2}-1\right)$个好组.

综上所述，当$n\equiv0(\bmod 6)$时，结论成立.

情形2：$n\equiv3(\bmod 6)$，分3种情况：

1) $n\equiv6(\bmod 9)$，对于$i\equiv3(\bmod 6)$，$3\leqslant i\leqslant n-12$，可将第$i$列、第$i+1$列、第$i+2$列、第$i+3$列、第$i+4$列的剩余元素分成3个好组：$\{\{n,i,n-2\},\{n,i,n-1\},\{n,i+1,n-1\}\}$，$\{\{n,i+2,n-3\},\{n,i+2,n-1\},\{n,i+4,n-1\}\}$，$\{\{n,i+3,n-2\},\{n,i+3,n-1\},\{n,i+2,n-2\}\}$.

对于在第1列、第$n-6$列、第$n-5$列、第$n-4$列、第$n-3$列、第$n-2$列的剩余元素，可恰好分成3个好组：$\{\{n,n-6,n-1\},\{n,n-6,n-2\},\{n,n-5,n-1\}\}$，$\{\{n,n-4,n-1\},\{n,n-4,n-2\},\{n,n-3,n-1\}\}$和$\{\{n,n-3,n-2\},\{n,n-2,n-1\},\{n,1,n-1\}\}$，但遗留下第$n-4$列元素$\{n,n-4,n-3\}$. 因此，当$n\equiv6(\bmod 9)$时，除第$n-4$列的元素$\{n,n-4,n-3\}$外，恰好将$\boldsymbol{A}_n$的非空元素划分成$\frac{1}{3}\left(\binom{n-1}{2}-1\right)$个好组.

2）$n\equiv 3(\bmod 9)$，对于 $i\equiv 3(\bmod 6)$，$3\leqslant i\leqslant n-12$，可将第 i 列、第 $i+1$ 列、第 $i+2$ 列、第 $i+3$ 列、第 $i+4$ 列的剩余元素分成 3 个好组：$\{\{n,i,n-2\},\{n,i,n-1\},\{n,i+1,n-1\}\}$，$\{\{n,i+2,n-3\},\{n,i+2,n-1\},\{n,i+4,n-1\}\}$ 和 $\{\{n,i+3,n-2\},\{n,i+3,n-1\},\{n,i+2,n-2\}\}$.

对于在第 1 列、第 $n-6$ 列、第 $n-5$ 列、第 $n-4$ 列、第 $n-3$ 列的剩余元素，可分成 3 个好组：$\{\{n,n-6,n-1\},\{n,n-6,n-2\},\{n,n-5,n-1\}\}$，$\{\{n,n-4,n-1\},\{n,n-4,n-3\},\{n,1,n-1\}\}$ 和 $\{\{n,n-4,n-2\},\{n,n-3,n-1\},\{n,n-3,n-2\}\}$，但遗留下第 $n-2$ 列元素 $\{n,n-2,n-1\}$. 因此，当 $n\equiv 3(\bmod 9)$ 时，除第 $n-2$ 列的元素 $\{n,n-2,n-1\}$ 外，恰好将 $\boldsymbol{A}_n$ 的非空元素划分成 $\frac{1}{3}\left(\binom{n-1}{2}-1\right)$ 个好组.

3）$n\equiv 0(\bmod 9)$，对于 $i\equiv 3(\bmod 6)$，$3\leqslant i\leqslant n-12$，可将第 i 列、第 $i+1$ 列、第 $i+2$ 列、第 $i+3$ 列、第 $i+4$ 列的剩余元素分成 3 个好组：$\{\{n,i,n-2\},\{n,i,n-1\},\{n,i+1,n-1\}\}$，$\{\{n,i+2,n-3\},\{n,i+2,n-1\},\{n,i+4,n-1\}\}$ 和 $\{\{n,i+3,n-2\},\{n,i+3,n-1\},\{n,i+2,n-2\}\}$.

对于在第 1 列、第 $n-6$ 列、第 $n-5$ 列、第 $n-4$ 列、第 $n-3$ 列、第 $n-2$ 列的剩余元素，与第 $n-6$ 列、第 $n-5$ 列的好的子矩阵 $\boldsymbol{A}_n(1,2,3\mid n-6,n-5)$ 中的子集共分解成 5 个好组：$\{\{n,n-6,n-1\},\{n,n-6,n-2\},\{n,n-5,n-1\}\}$，$\{\{n,n-6,n-4\},\{n,n-5,n-3\},\{n,n-5,n-4\}\}$，$\{\{n,n-6,n-5\},\{n,n-2,n-1\},\{n,n-5,n-2\}\}$，$\{\{n,n-4,n-2\},\{n,n-3,n-1\},\{n,n-3,n-2\}\}$ 和 $\{\{n,n-4,n-3\},\{n,n-4,n-1\},\{n,1,n-1\}\}$，但遗留下第 $n-6$ 列元素 $\{n,n-6,n-3\}$. 因此，当 $n\equiv 3(\bmod 9)$ 时，除第 $n-6$ 列的元素 $\{n,n-6,n-3\}$ 外，恰好将 $\boldsymbol{A}_n$ 的非空元素划分成 $\frac{1}{3}\left(\binom{n-1}{2}-1\right)$ 个好组.

因此，当 $n\equiv 3(\bmod 6)$ 时，结论成立. 证毕.

定理 1　如果 $\binom{k-1}{3}<3m\leqslant\binom{k}{3}$，$m\geqslant 2$，$k\geqslant 5$，则 $\chi_{vt}(mC_3)=k$.

证明：显然有 $\chi_{vt}(mC_3)\geqslant\mu(mC_3)=k$. 因此只需给出 mC_3 的 k-VDTC 染色即可.

当 $m=2,3$ 时，$\chi_{vt}(mC_3)\geqslant 5$. 下面给出 mC_3 的 5-VDTC 染色. 3 个 C_3 能被 $g(3;2,4;1,5)$，$g(4;1,2;3,5)$ 和 $g(5;4,1;2,3)$ 分别染色，所以 $\chi_{vt}(3C_3)=5$，此时遗留下 3-子集 $\{5,1,2\}$. 而由 $3C_3$ 的染色很容易得到 $2C_3$ 的 5-VDTC.

当 $4\leqslant m\leqslant 6$ 时，$\chi_{vt}(mC_3)\geqslant 6$. 可用染色法 $g(3;2,4;1,5)$，$g(4;1,2;3,5)$，$g(5;4,1;2,3)$，$g(6;1,4;2,5)$，$g(6;3,1;2,4)$ 和 $g(6;5,1;3,4)$ 分别去染 6 个 C_3，显然可得 $6C_3$ 的 6-点可区别全染色. 此时，集合 $\{1,2,3,4,5,6\}$ 中的 3-子集除 $\{5,1,2\}$，$\{5,1,6\}$ 外都已用完. 由 $6C_3$ 的 6-VDTC 易得 $mC_3(m=4,5)$ 的 6-VDTC.

当 $7\leqslant m\leqslant 11$ 时，$\chi_{vt}(mC_3)\geqslant 7$. 下面给出 mC_3 的 7-VDTC 染色即可. 在 $6C_3$ 的基础上只需给出第 7,8,9,10,11 个三角形 C_3 的染色如下：$g(7;2,5;1,4)$，$g(7;3,1;2,4)$，$g(7;1,5;6,2)$，$g(7;3,4;6,5)$，$g(7;5,3;4,6)$，显然得到 $11C_3$ 的 7-点可区别全染色. 而上述染色中将 $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ 的所有含 7 的 3 子集都已用完，遗留的 3 子集仍然是 $\{5,1,2\}$，$\{5,1,6\}$. 由 $11C_3$ 的 7-点可区别全染色易得当 $7\leqslant m<11$ 时 mC_3 的 7-点可区别全染色.

当 $12\leqslant m\leqslant 18$ 时，$\chi_{vt}(mC_3)\geqslant 8$. 利用前面所述方法，前 11 个 C_3 的并已用 7 种颜色 1,2,3,4,5,6,7 染好，下面对从第 12 个 C_3 到第 18 个 C_3 进行染色. 由引理 2 可以得到 7 个 C_3 的并的 VDTC，它将 $\{1,2,\cdots,8\}$ 中所有含 8 的 3-子集都已用完，所以遗留的 3 子集仍然是 $\{5,1,2\}$，$\{5,1,6\}$. 由 $18C_3$ 的 8-点可区别全染色易得当 $12\leqslant m<18$ 时 mC_3 的 8-点可区别全染色.

如果当 $19\leqslant m\leqslant 28$ 时，$\chi_{vt}(mC_3)\geqslant 9$. 在所给出的 $18C_3$ 的 VDTC 的基础上，再用如下方法分别去染第 19,20,21,22,23,24,25,26,27 个 C_3：$g(9;1,4;2,5)$，$g(9;3,1;2,4)$，$g(9;3,6;4,7)$，

$g(9;5,3;4,6)$, $g(9;1,5;6,2)$, $g(9;7,1;2,8)$, $g(9;3,7;8,4)$, $g(9;5,7;8,6)$, $g(9;8,1;7,6)$, 此时集合$\{1,2,\cdots,9\}$中含 9 的 3-子集除$\{5,6,9\}$外都已用完. 显然所得染色是 $27C_3$ 的 9-VDTC. 由于$\{\{5,1,2\},\{5,1,6\},\{5,6,9\}\}$是一个好组, 因此可给第 28 个 C_3 用 $g(5;1,2;6,9)$进行染色, 可使第 28 个 C_3 的 3 个点的色集合分别为$\{\{5,1,2\},\{5,1,6\},\{5,6,9\}\}$, 从而得到了 $28C_3$ 的 9-VDTC 染色. 至此, 已把$\{1,2,\cdots,9\}$中的所有 3-子集都用完. 由 $28C_3$ 的 9-点可区别全染色易得: 当 $19\leqslant m<28$ 时, mC_3 的 9-点可区别全染色.

假设前 28 个 C_3 都已用 9 种颜色染好, 当 $m\geqslant 29$ 时, 下面给出 mC_3 的 k-VDTC 染色, 其中 $\binom{k-1}{3}<3m\leqslant\binom{k}{3}$, $k\geqslant 10$. 如果给出$\left\lfloor\frac{1}{3}\binom{k}{3}\right\rfloor C_3$ 的 k-VDTC, 则当$\binom{k-1}{3}<3m\leqslant\binom{k}{3}$, 且$m\neq\left\lfloor\frac{1}{3}\binom{k}{3}\right\rfloor$时, 即得 mC_3 的 k-VDTC 染色. 下面给出当 $k\geqslant 10$ 时$\left\lfloor\frac{1}{3}\binom{k}{3}\right\rfloor C_3$ 的 k-VDTC.

当 $k\equiv 10,11(\bmod 18)$时, $k\equiv 4,5(\bmod 6)$, 则由引理 2 可知, $\frac{1}{3}\binom{k}{3}C_3$ 有 k-VDTC, 该染色用完了$\{1,2,\cdots,k\}$的所有 3-子集.

当 $k\equiv 12,13,14(\bmod 18)$时, 由引理 2 和引理 3 及其证明过程可知, $\frac{1}{3}\left(\binom{k}{3}-1\right)C_3$ 即$\left\lfloor\frac{1}{3}\binom{k}{3}\right\rfloor C_3$ 有 k-VDTC, 该染色用完了$\{1,2,\cdots,k\}$的除以下一个 3-子集外的所有 3-子集: $\{k,k-2,k-1\}$ (当 $k\equiv 12(\bmod 18)$时) 或$\{k-1,k-3,k-2\}$ (当 $k\equiv 13(\bmod 18)$时) 或$\{k-2,k-4,k-3\}$ (当 $k\equiv 14(\bmod 18)$时).

当 $k\equiv 15,16,17(\bmod 18)$时, 由引理 2 和引理 3 及其证明过程可知, $\frac{1}{3}\left(\binom{k}{3}-2\right)C_3$ 即$\left\lfloor\frac{1}{3}\binom{k}{3}\right\rfloor C_3$ 有 k-VDTC, 该染色用完了$\{1,2,\cdots,k\}$的除以下两个 3-子集外的所有 3-子集: $\{k-3,k-5,k-4\}$, $\{k,k-4,k-3\}$ (当 $k\equiv 15(\bmod 18)$时)或$\{k-4,k-6,k-5\}$, $\{k-1,k-5,k-4\}$ (当 $k\equiv 16(\bmod 18)$时)或$\{k-5,k-7,k-6\}$, $\{k-2,k-6,k-5\}$ (当 $k\equiv 17(\bmod 18)$时).

当 $k\equiv 0,1,2(\bmod 18)$时, 由引理 2 和引理 3 及其证明过程可知, $\frac{1}{3}\binom{k}{3}C_3$ 即$\left\lfloor\frac{1}{3}\binom{k}{3}\right\rfloor C_3$ 有 k-VDTC, 该染色用完了$\{1,2,\cdots,k\}$的所有 3-子集. 注意, 当 $k\equiv 0(\bmod 18)$时, $\{k,k-7,k-3\}$与前面遗留下来的子集$\{k-6,k-8,k-7\}$, $\{k-3,k-7,k-6\}$是一个 C_3 的 VDTC $g(k-7;k-6,k-8;k-3,k)$下 C_3 的各点的色集合.

当 $k\equiv 3,4,5(\bmod 18)$时, 由引理 2 和引理 3 及其证明过程可知, $\frac{1}{3}\left(\binom{k}{3}-1\right)C_3$ 即$\left\lfloor\frac{1}{3}\binom{k}{3}\right\rfloor C_3$ 有 k-VDTC, 该染色用完了$\{1,2,\cdots,k\}$的除以下一个 3-子集外的所有 3-子集: $\{k,k-2,k-1\}$ (当 $k\equiv 3(\bmod 18)$时) 或$\{k-1,k-3,k-2\}$ (当 $k\equiv 4(\bmod 18)$时) 或$\{k-2,k-4,k-3\}$ (当 $k\equiv 5(\bmod 18)$时).

当 $k\equiv 6,7,8(\bmod 18)$时, 由引理 2 和引理 3 及其证明过程可知, $\frac{1}{3}\left(\binom{k}{3}-2\right)C_3$ 即$\left\lfloor\frac{1}{3}\binom{k}{3}\right\rfloor C_3$ 有 k-VDTC, 该染色用完了$\{1,2,\cdots,k\}$的除以下两个 3-子集外的所有 3-子集: $\{k-3,k-5,k-4\}$, $\{k,k-5,k-1\}$ (当 $k\equiv 6(\bmod 18)$时)或$\{k-4,k-6,k-5\}$, $\{k-1,k-6,k-2\}$ (当 $k\equiv 7(\bmod 18)$时)或$\{k-5,k-7,k-6\}$, $\{k-2,k-7,k-3\}$ (当 $k\equiv 8(\bmod 18)$时).

当 $k\equiv 9(\bmod 18)$时, 由引理 3 及其证明过程可知, $\frac{1}{3}\binom{k}{3}C_3$ 即$\left\lfloor\frac{1}{3}\binom{k}{3}\right\rfloor C_3$ 有 k-VDTC, 该染色用完了$\{1,2,\cdots,k\}$的所有 3-子集. 注意此时$\{k,k-6,k-3\}$与前面遗留下来的子集$\{k-6,k-8,k-7\}$, $\{k-3,k-8,k-4\}$是一个 C_3 的 VDTC $h(k-3,k;k-6,k-7;k-8,k-4)$下 C_3 的各点的色集合.

至此，递归地给出了当 $k\geqslant 10$ 时$\lfloor \frac{1}{3}\binom{k}{3} \rfloor C_3$ 的 k-VDTC. 证毕.

参 考 文 献

[1] Burris A C, Schelp R H. Vertex-Distinguishing Proper Edge-Colorings [J]. J of Graph Theory, 1997, 26(2): 73-82.

[2] Balister P N, Bollobás B, Shelp R H. Vertex Distinguishing Colorings of Graphs with $\Delta(G)=2$ [J]. Discrete Mathematics, 2002, 252(1/2/3): 17-29.

[3] WANG Hong-jie, WANG Zhi-wen, ZHU En-qiang, et al. Vertex Distinguishing Edge Coloring Chromatic Number of $K_n-\{v_1v_2, v_3v_4, v_5v_6, v_7v_8\}$, $(n\geqslant 20,\ n\equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2))$ [J]. Journal of Jilin University: Science Edition, 2010, 48(5): 777-782. (王鸿杰，王治文，朱恩强，等. $K_n-\{v_1v_2, v_3v_4, v_5v_6, v_7v_8\}$, $(n\geqslant 20, n\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2))$的点可区别边色数 [J]. 吉林大学学报：理学版，2010，48(5)：777-782.)

[4] CHEN Xiang-en, GAO Yu-ping. Vertex-Distinguishing Proper Edge-Coloring Chromatic Numbers of the Composition of Two Graphs [J]. Journal of Jilin University: Science Edition, 2011, 49(2): 207-212. (陈祥恩，高毓平. 合成图的点可区别正常边色数 [J]. 吉林大学学报：理学版，2011，49(2)：207-212.)

[5] ZHANG Zhong-fu, QIU Peng-xiang, XU Bao-gen, et al. Vertex-Distinguishing Total Colorings of Graphs [J]. Ars Combinatoria, 2008, 87: 33-45.

[6] CHEN Xiang-en. Asymptotic Behaviour of the Vertex-Distinguishing Total Chromatic Numbers of n-Cube [J]. Journal of Northwest Normal University: Natural Science, 2005, 41(5): 1-3. (陈祥恩. n-方体的点可区别全色数的渐近性态 [J]. 西北师范大学学报：自然科学版，2005，41(5)：1-3.)

[7] ZHANG Zhong-fu, LI Jing-wen, CHEN Xiang-en, et al. $D(\beta)$-Vertex-Distinguishing Total Coloring of Graphs [J]. Science in China: Mathematics, 2006, 36(10): 1119-1130.

[8] AN Ming-qiang, LIU Xin-sheng, CHEN Xiang-en. Vertex-Distinguishing Total Chromatic Numbers on Mycielski's Graphs of Several Kinds of Particular Graphs [J]. Journal of Northwest Normal University: Natural Science, 2005, 41(5): 4-7. (安明强，刘信生，陈祥恩. 关于几类特殊图的 Mycielski 图的点可区别全色数 [J]. 西北师范大学学报：自然科学版，2005，41(5)：4-7.)

[9] XIN Xiao-qing, CHEN Xiang-en. Vertex Distinguishing Total Chromatic Number of mC_4 [J]. Journal of Shandong University: Natural Science, 2010, 45(10): 35-39. (辛小青，陈祥恩. m 个点不交的 C_4 的并的点可区别全染色 [J]. 山东大学学报：理学版，2010，45(10)：35-39.)

[10] AN Ming-qiang. Vertex-Distinguishing Total Chromatic Number of $P_m\vee S_n$ [J]. Journal of Lanzhou University of Technology, 2008, 34(5): 163-167. (安明强. $P_m\vee S_n$ 的点可区别全色数 [J]. 兰州理工大学学报，2008，34(5)：163-167.)

[11] XIN Xiao-qing, CHEN Xiang-en. The Vertex-Distinguishing Total Coloring of $P_m\vee C_n$ and $C_m\vee C_n$ [J]. Mathematics in Practice and Theory, 2010, 40(5): 182-186. (辛小青，陈祥恩. $P_m\vee C_n$ 及 $C_m\vee C_n$ 的点可区别全染色 [J]. 数学实践与认识，2010，40(5)：182-186.)

(责任编辑：赵立芹)