HIV 传播人群生态动力学模型的匹配解

温朝晖[1], 陈丽华[2], 姚静荪[3], 欧阳成[4], 莫嘉琪[3,4]
(1. 安徽财经大学 应用数学研究所, 安徽 蚌埠 233030;
2. 福建师范大学福清分校 数学与计算机科学系, 福建 福清 350300;
3. 安徽师范大学 数学系, 安徽 芜湖 241003; 4. 湖州师范学院 理学院, 浙江 湖州 313000)

摘要: 利用奇摄动方法研究一类 HIV 传播的动力学模型, 先构造模型解的外部解和内层解, 再进行匹配, 得到了模型解的合成展开式, 并对解进行了精度比较, 证实了渐近展开式具有较高的精度. 结果表明, 得到的近似解可以描述流行性传染病区域的人群传播规律.

关键词: HIV 传播; 奇摄动; 渐近解
中图分类号: O175.29　　**文献标志码**: A　　**文章编号**: 1671-5489(2012)02-0179-04

Matched Solution for Bionomics Dynamic Model of HIV Propagation in Human Groups

WEN Zhao-hui[1], CHEN Li-hua[2], YAO Jing-sun[3], OUYANG Cheng[4], MO Jia-qi[3,4]
(1. *Institute of Applied Mathematics*, *Anhui University of Finance and Economics*, *Bengbu* 233030, *Anhui Province*, *China*;
2. *Department of Mathematics and Computer Science*, *Fuqing Branch of Fujian Normal University*, *Fuqing* 350300, *Fujian Province*, *China*; 3. *Department of Mathematics*, *Anhui Normal University*, *Wuhu* 241003, *Anhui Province*, *China*;
4. *Faculty of Science*, *Huzhou Teacher College*, *Huzhou* 313000, *Zhejiang Province*, *China*)

Abstract: A class of mode for HIV propagation dynamics was studied. By means of the singular perturbation method, firstly, the outer solution and interior solution were constructed; secondly, they were matched, obtaining composite expansions of solution for the model; finally, comparing the accuracies for the solutions verifies the asymptotic expansion possesses a better accuracy. Finded approximate solution may describe the law of HIV propagation in the crowd of epidemics region.

Key words: HIV transmission; singular perturbation; asymptotic solution

目前关于流行性传染病的传播研究, 主要使用动力学的研究方法[1-3]. 本文以相应的一个非线性动力学模型为基础, 利用奇摄动理论, 从人群生态学的观点研究艾滋病(HIV)的传播. 关于非线性奇摄动问题的研究目前已有许多结果[4-6], 其方法包括边界层法、多重尺度法、匹配渐近展开法和平均法等. 利用解的渐近理论, 文献[7-10]研究了一类奇摄动非线性反应扩散方程、椭圆型边值问题、奇摄动问题的激波层解和大气物理问题等.

收稿日期: 2011-05-27.

作者简介: 温朝晖(1959—), 男, 汉族, 硕士, 副教授, 从事应用数学的研究, E-mail: wzh590624@sina.com. 通讯作者: 莫嘉琪(1937—), 男, 汉族, 教授, 从事应用数学的研究, E-mail: mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn.

基金项目: 国家自然科学基金(批准号: 11071205)、安徽高校自然科学研究重点项目(批准号: KJ2011A135; KJ2011Z003)、浙江省自然科学基金(批准号: Y6110502)、江苏省自然科学基金(批准号: BK2008119)和福建省教育厅项目(A 类)基金(批准号: JA10288).

1 HIV 人群传播动力学模型

考虑如下一个 HIV 传播人群的生态动力学微分系统模型[1,3]:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\alpha xy-\beta x,\tag{1}$$

$$\alpha\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-\alpha xy-\gamma x^2y+\delta x+c,\tag{2}$$

$$x(0)=A,\quad y(0)=B,\tag{3}$$

其中: $x(t)$表示在 HIV 传播区域内的感染者人数; $y(t)$表示易感者人数; t 为时间; $c\geqslant 0$ 表示易感者的出生率; $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 为正常数, 并设 α 为小参数; αxy 表示感染者与易感者因“交感”而导致的患者增加速度; $-\beta x$ 表示由于患者死亡而引起的患者减少速度; $-\alpha xy$ 表示感染者与易感者“交感”易感者变为患者后使得易感者减少的速度; $-\gamma x^2y$ 表示采取防疫措施后使易感者减少的速度; δx 表示患者增多时易感者的增加率. 问题(1)-(3)是一个在患区人群的 HIV 传播生态动力学模型. 设在系统(1),(2)中, α 为小的正参数, 表示在 HIV 传播过程中易感染人数的变化为一个相对小量. 本文将利用匹配方法构造模型(1)-(3)解的渐近展开式, 从而用所得的表示式研究 HIV 的传播性态和规律.

2 HIV 传播人群模型的解

2.1 HIV 传播人群模型的外部解

设 HIV 传播人群模型(1)-(3)外部解(X,Y)的形式渐近展开式为

$$X(t,\alpha)=\sum_{i=0}^{\infty}X_i(t)\alpha^i,\qquad Y(t,\alpha)=\sum_{i=0}^{\infty}Y_i(t)\alpha^i.\tag{4}$$

将式(4)代入式(1)-(3), 按 α 展开非线性项, 合并 α 同次幂的系数, 并令 ε^0 等式两边的系数相等, 得

$$\frac{\mathrm{d}X_0}{\mathrm{d}t}=-\beta X_0,\tag{5}$$

$$\gamma X_0^2Y_0-\delta X_0=c,\tag{6}$$

由式(5),(6)可以得到解(X_0,Y_0):

$$X_0(t)=C_1\exp(-\beta t),\qquad Y_0(t)=\frac{c}{\gamma C_1^2}\exp(2\beta t)+\frac{\delta}{\gamma C_1}\exp(\beta t),\tag{7}$$

因此, 有外部解

$$X(t,\alpha)=C_1\exp(-\beta t)+O(\alpha),\quad 0<\alpha\ll 1,\tag{8}$$

$$Y(t,\alpha)=\frac{c}{\gamma C_1^2}\exp(2\beta t)+\frac{\delta}{\gamma C_1}\exp(\beta t)+O(\alpha),\quad 0<\alpha\ll 1.\tag{9}$$

HIV 传播人群模型(1)-(3)的外部解式(8),(9)未必满足初始条件式(3), 故需构造 $t=0$ 附近的内层解$(\bar{X},\bar{Y})$.

2.2 HIV 传播人群模型在 $t=0$ 附近的内层解

引入伸长变量[1] $\tau=t/\alpha$, 则方程(1),(2)变为

$$\alpha^{-1}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}=\alpha xy-\beta x,\tag{10}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}=-\alpha xy-\gamma x^2y+\delta x+c.\tag{11}$$

令

$$\bar{X}(\tau,\alpha)=\sum_{i=0}^{\infty}x_i(\tau)\alpha^i,\qquad \bar{Y}(\tau,\alpha)=\sum_{i=0}^{\infty}y_i(\tau)\alpha^i.\tag{12}$$

将式(12)代入式(10),(11)和式(3), 展开非线性项, 并使等式两边 α 的同次幂相等, 有

$$\frac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}\tau}=0, \tag{13}$$

$$\frac{\mathrm{d}y_0}{\mathrm{d}\tau}=-\gamma x_0^2 y_0+\delta x_0+c, \tag{14}$$

$$x_0(0)=A,\quad y_0(0)=B, \tag{15}$$

由问题(13)-(15), 有

$$x_0(\tau)=A,\qquad y_0(\tau)=\left(B-\frac{\delta A+c}{\gamma A^2}\right)\exp(-\gamma A^2\tau)+\frac{\delta A+c}{\gamma A^2}. \tag{16}$$

由式(16), 便可构造 HIV 传播人群模型(1)-(3)的内层解:

$$\bar{X}_1(\tau)=A+O(\alpha),\quad 0<\alpha\ll 1, \tag{17}$$

$$\bar{Y}_1(\tau)=\left(B-\frac{\delta A+c}{\gamma A^2}\right)\exp(-\gamma A^2\tau)+\frac{\delta A+c}{\gamma A^2}+O(\alpha),\quad 0<\alpha\ll 1. \tag{18}$$

2.3 内层解与外部解的匹配

下面用 Van Dyke 匹配原理[11], 将 HIV 传播人群模型的外部解和内层解进行匹配.

1) 将外部解式(8),(9)渐近式主项

$$X=C_1\exp(-\beta t),\qquad Y=\frac{c}{\gamma C_1^2}\exp(2\beta t)+\frac{\delta}{\gamma C_1}\exp(\beta t)$$

中的外变量 t 用内变量 τ 表示, 得

$$X=C_1\exp(-\beta\alpha\tau),\qquad Y=\frac{c}{\gamma C_1^2}\exp(2\beta\alpha\tau)+\frac{\delta}{\gamma C_1}\exp(\beta\alpha\tau).$$

固定 τ 按 α 展开, 并取其关于 α 零次幂项的内展开式得

$$(X)^i=C_1,\qquad (Y)^i=c/(\gamma C_1^2)+\delta/(\gamma C_1). \tag{19}$$

2) 将内层解式(17),(18)主项

$$\bar{X}=A,\qquad \bar{Y}=\left(B-\frac{\delta A+c}{\gamma A^2}\right)\exp(-\gamma A^2\tau)+\frac{\delta A+c}{\gamma A^2}$$

中的内变量 τ 用外变量 t 表示, 得

$$\bar{X}=A,\qquad \bar{Y}=\left(B-\frac{\delta A+c}{\gamma A^2}\right)\exp\left(-\frac{\gamma A^2 t}{\alpha}\right)+\frac{\delta A+c}{\gamma A^2}.$$

固定 t 按 α 展开, 得 $\bar{X}=A$, $\bar{Y}=(\delta A+c)/(\gamma A^2)+\mathrm{EST}$, 其中 EST 表示具有指数型衰减的项. 再取其关于 α 零次幂项为主项的外展开式得

$$(\bar{X})^0=A,\qquad (\bar{Y})^0=(\delta A+c)/(\gamma A^2). \tag{20}$$

3) 由匹配原则[11]和式(19),(20), 有 $(X)^i=(\bar{X})^0$, $(Y)^i=(\bar{Y})^0$. 于是, 可得

$$C_1=A. \tag{21}$$

2.4 解的合成展开式

由合成展开式的构造理论, HIV 传播人群模型(1)-(3)的合成渐近展开式[11]为

$$x=X(t)+\bar{X}(\tau)+(X)^i+O(\alpha),\quad y=Y(t)+\bar{Y}(\tau)+(Y)^i+O(\alpha),\quad 0<\alpha\ll 1.$$

从而由式(8),(9),(21), 得

$$x(t,\alpha)=A\exp(-\beta t)+O(\alpha),\quad 0<\alpha\ll 1, \tag{22}$$

$$y(t,\alpha)=\frac{c}{\gamma A^2}\exp(2\beta t)+\frac{\delta}{\gamma A}\exp(\beta t)+\left(B-\frac{\delta A+c}{\gamma A^2}\right)\exp(-\gamma A^2\tau)+O(\alpha),\quad 0<\alpha\ll 1. \tag{23}$$

利用不动点定理, 可以证明式(22),(23)是 HIV 传播人群模型(1)-(3)解的一致有效渐近展开式. 用上述方法, 可以得到 HIV 传播人群模型(1)-(3)更高次、精度更高的渐近解.

2.5 匹配渐近解的精度比较

下面给出一组 HIV 传播人群模型(1)-(3)的无量纲参数表述上述匹配渐近解的精度. 给定模型(1)-(3)如下一组无量纲参数: $\alpha=0.5$, $\beta=1$, $\gamma=100$, $\delta=20$, $A=B=c=1$. 可得模型(1)-(3)对易感

者人数 $y(t)$ 用模拟方法得到的数值解曲线和用匹配方法得到的渐近解曲线, 如图1所示.

研究HIV传播模型的主要目的是预报和控制易感者人数 $y(t)$. 由图1可见:

1) HIV传播人群模型(1)-(3)易感者人数的匹配解和模拟解曲线非常接近, 表明匹配渐近解具有较高的精确度, 故可用它作为易感者人数的预测;

2) 当采取了一系列措施(取定相应的模型参数)后, 在感染人群初始时刻, 易感者人数有明显的下降; 但随时间的延续, 易感者人数会反弹回升. 因此, 应不断采取新的有效措施, 改变模型的相关参数, 以阻止易感者人数的反弹趋势.

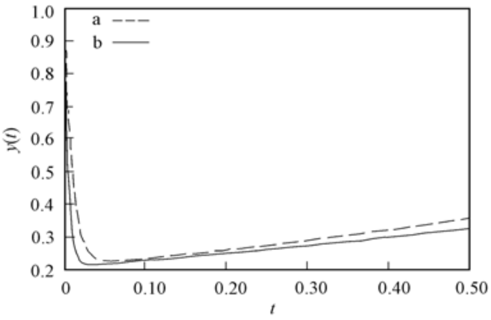

图1 匹配渐近解曲线(a)与模拟数值解曲线(b)

Fig. 1 Curves of the matching asymptotic soltion (a) and the simulate numerical solution (b)

3 结论

求解HIV传播人群模型, 一般不能用初等方法求出其精确解. 因此需要用有效的方法求出其近似解. 本文提出的求奇摄动问题渐近解的匹配方法, 是一种简单而有效的方法.

由渐近式(22),(23)可以得到在某一时刻HIV传播区域内的感染者人数和易感者人数的规律和分布情况, 从而可以进一步采取有效措施对传播人群进行预报和控制.

利用本文的匹配渐近展开法还可继续求出精度更高的展开式, 得到更精确的HIV传播区域内的感染者人数和易感者人数的规律和分布情况. 因此能达到更精确的预报和控制.

由本文方法得到的解还可进行解析运算. 例如, 从得到的结果可以进一步进行微分、积分等解析运算, 从而得到更多的HIV传播人群模型涉及到的物理量渐近性态.

参考文献

[1] Griffiths J, Lowrie D, Williams J. An Age-Structured Model for the AIDS Epidemic [J]. European J Operational Research, 2000, 124(1): 1-24.

[2] Hyman J M, LI Jia, Stanley E A. The Differential Infectivity and Staged Progression Models for the Transmission of HIV [J]. Mathematical Biosciences, 1999, 155(1): 77-109.

[3] LIU Mao-xing, RUAN Yu-hua, HAN Li-tao, et al. The Summary of Dynamic Models for HIV Transmission [J]. J Biomathematics, 2004, 19(5): 551-560.

[4] D'Aprile T, Pistoia A. On the Existence of Some New Positive Interior Spike Solutions to a Semilinear Nuumann Problem [J]. J Diff Eqns, 2010, 248(3): 556-573.

[5] Shin-Ichiro E, Matsuzawa H. The Motion of a Transition Layer for a Bistable Reaction Diffusion Equation with Heterogeneous Environment [J]. Discrete Contin Dyn Syst, 2010, 26(3): 910-921.

[6] Suzuki R. Asymptotic Behavior of Solutions of a Semilinear Heat Equation with Localized Reaction [J]. Adv Differ Eqns, 2010, 15(3/4): 283-314.

[7] MO Jia-qi, LIN Wan-tao. Asymptotic Solution of Activator Inhibitor Systems for Nonlinear Reaction Diffusion Equations [J]. J Sys Sci & Complexity, 2008, 20(1): 119-128.

[8] MO Jia-qi. Homotopiv Mapping Solving Method for Gain Fluency of a Laser Pulse Amplifier [J]. Science in China Ser G: Physics, 2009, 52(7): 1007-1070.

[9] MO Jia-qi. A Singularly Perturbed Reaction Diffusion Problem for Nonlinear Boundary Condition with Two Parameters [J]. Chin Phys B, 2010, 19(1): 010203.

[10] MO Jia-qi. Generalized Vocational Iteration Solution of Solution for Disturbed KdV Equation [J]. Commun Theo Phy, 2010, 53(3): 440-442.

[11] Nayfeh A H. Introduction to Perturbation Techniques [M]. New York: John Wiley & Sons, 1981.

(责任编辑: 赵立芹)