

径向对称电导率重构的 Layer-Stripping 方法

风天宏, 马富明

(吉林大学 数学研究所, 长春 130012)

摘要: 利用 Layer-Stripping 方法, 针对电导率为径向对称分布的情形给出一种重构电导率的数值算法. 特别地, 针对分层半径的选取提出了 3 种方法以增强算法的稳定性, 并通过数值实验证明了算法的可行性.

关键词: 电阻抗成像; NtD 映射; Layer-Stripping 方法; Riccati 方程

中图分类号: O241.82 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-5489(2012)01-0021-06

Layer-Stripping Reconstruction Algorithm for Radially Symmetric Conductivity

FENG Tian-hong, MA Fu-ming

(Institute of Mathematics, Jilin University, Changchun 130012, China)

Abstract: The authors gave a numerical algorithm of reconstructing radially symmetric conductivity by means of the Layer-Stripping method, in particular, the three choices to determine the reconstruction layers to enhance the stability of the algorithm. A number of numerical tests show the feasibility of the method.

Key words: electrical impedance tomography (EIT); NtD map; Layer-Stripping algorithm; Riccati equation

电阻抗成像 (electrical impedance tomography, EIT) 是低频段 (包括直流) 的电磁逆散射问题, 它通过测量导电物体表面上的电流和电压值, 来对物体内部的电导率进行成像. EIT 在医学成像、地球物理及无损检测等领域应用广泛.

EIT 的数学模型由 Calderón^[1] 提出, 将 EIT 分为唯一性问题和重构算法两部分. 对于三维 EIT 的唯一性问题, Sylvester 等^[2] 给出了肯定的回答; Nachman^[3] 解决了二维 EIT 的唯一性证明和重建问题; 对于二维复阻抗情形, Francini^[4] 证明了在低频率的条件下其唯一性成立. 近年来, Astala 等^[5] 和 Brown 等^[6] 分别给出了某些特定条件下的二维及高维 EIT 问题的唯一性结果. EIT 的重构算法包括线性方法和非线性方法^[7]. 典型的线性方法有 Calderón 算法、反投影法和单步牛顿法等; 非线性方法分为迭代法和直接法两类.

由边界测量结果计算电导率时, 稳定性至关重要, 而 EIT 问题是典型的不适定问题, 边界数据的微小扰动将会指数倍的放大到解 (电导率) 中, 这是求解 EIT 问题的难点, 而边界数据与电导率之间的非线性关系更加重了这一困难.

本文给出一种基于 Layer-Stripping 方法, 针对电导率为径向对称分布情形下的重构电导率数值算法, 并通过数值算例验证了算法的有效性.

收稿日期: 2011-05-25.

作者简介: 风天宏 (1983—), 女, 汉族, 博士研究生, 从事数学物理反问题计算方法的研究, E-mail: fength1212@163.com.
通讯作者: 马富明 (1957—), 男, 汉族, 博士, 教授, 博士生导师, 从事数学物理反问题计算方法的研究, E-mail: mfm@jlu.edu.cn.

基金项目: 国家自然科学基金 (批准号: 10971083).

1 Layer-Stripping 方法的理论基础

本文在连续模型中讨论 Layer-Stripping 方法. 设 $\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^2$ 是二维单位圆盘, 边界 $\partial\Omega$ 是单位圆周; σ 表示区域 Ω 内部的电导率, 设其分布是旋转不变量, 即 $\sigma = \sigma(r)$, 是 $\bar{\Omega}$ 中实的函数. 在边界 $\partial\Omega$ 处注入电流:

$$f \in L_0^2(\partial\Omega) = \left\{ f \in L^2(\partial\Omega) : \int_{\partial\Omega} f(s) ds = 0 \right\},$$

其中 $L^2(\partial\Omega) = \left\{ f(s) : \int_{\partial\Omega} |f(s)|^2 ds < +\infty \right\}$. 于是, 电势 u 满足 Neumann 边值问题:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \sigma \nabla u = 0, & \text{在 } \Omega \text{ 内;} \\ \sigma \frac{\partial u}{\partial r} = f, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上.} \end{cases} \quad (1)$$

该 Neumann 问题存在唯一解^[8]:

$$u \in H_0^1(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega) : \int_{\partial\Omega} u(s) ds = 0 \right\},$$

其中: $H^1(\Omega) = \{u(s) : u, Du \in L^2(\Omega)\}$; 相应的边界电势 $u|_{\partial\Omega} \in H_0^{1/2}(\partial\Omega)$.

假设对于任意外加电流均可测得边界 $\partial\Omega$ 上每点的电压, 即已知边界处的 N-D 映射:

$$R: \begin{cases} H_0^{-1/2}(\partial\Omega) \rightarrow H_0^{1/2}(\partial\Omega), \\ f \mapsto u|_{\partial\Omega}. \end{cases} \quad (2)$$

考虑如何由边界 N-D 映射逐层数值地重构 $\sigma(r)$.

定义 $\Omega_{r_0} = \{x : |x| < r_0, 0 < r_0 \leq 1\}$, 且 $\Omega_1 = \Omega$, 则对于每个 r_0 , 边值问题

$$\begin{cases} \nabla \cdot \sigma \nabla u = 0, & |x| < r_0, \\ \sigma \frac{\partial u}{\partial r} = f, & |x| = r_0, \\ \int_{\partial\Omega_{r_0}} f ds = 0, & \int_{\partial\Omega_{r_0}} u ds = 0 \end{cases} \quad (3)$$

唯一可解. 定义一族算子

$$R_{r_0}: \begin{cases} H_0^{-1/2}(\partial\Omega_{r_0}) \rightarrow H_0^{1/2}(\partial\Omega_{r_0}), \\ f \mapsto u|_{\partial\Omega_{r_0}}, \end{cases} \quad (4)$$

其中 f 表示 $|x| = r_0$ 处的电流.

为考察 R_{r_0} 的性质, 先利用极坐标变换将式(3)转化为极坐标下的 Neumann 问题:

$$\begin{cases} \sigma(r) \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \left[\sigma'(r) + \frac{\sigma(r)}{r} \right] \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\sigma(r)}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, & 0 < r < r_0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\ \sigma(r_0) \frac{\partial u}{\partial r}(r_0, \theta) = f(r_0, \theta), & \int_0^{2\pi} f(r_0, \theta) d\theta = 0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases} \quad (5)$$

对 $R_{r_0} f = u$ 关于 r 求导, 得

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial R_{r_0}}{\partial r} f + R_{r_0} \frac{\partial f}{\partial r},$$

注意到式(3)中的边界条件, 有

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \sigma'(r) \frac{\partial u}{\partial r} + \sigma(r) \frac{\partial^2 u}{\partial r^2},$$

结合式(5)中极坐标系下的微分方程, 有

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial R_{r_0}}{\partial r} f - R_{r_0} \left(\frac{\sigma(r)}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\sigma(r)}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right),$$

再应用式(3)中边界条件, 得

$$\frac{\partial R_{r_0}}{\partial r} f = \frac{f}{\sigma(r_0)} + \frac{1}{r_0} R_{r_0} f + \frac{\sigma(r_0)}{r_0^2} R_{r_0} \frac{\partial^2 R_{r_0} f}{\partial \theta^2}.$$

定理 1^[9] 对于算子 $R_r \in L(H^s(S^{n-1}), H^{s+1}(S^{n-1}))$ ($0 < r \leq 1, s \geq 3/2, n \geq 2$), 在 $L(H^s(S^{n-1}), H^{s+1}(S^{n-1}))$ 中存在极限

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\delta} (R_r - R_{r-\delta}) = D_r R_r.$$

关于算子 R_{r_0} 的方程为

$$D_r R_{r_0} = \frac{1}{\sigma(r_0)} + \frac{1}{r_0} R_{r_0} + \frac{\sigma(r_0)}{r_0^2} R_{r_0} \frac{\partial^2 R_{r_0}}{\partial \theta^2}. \tag{6}$$

定义算子 $W_{r_0} = (1/r_0)R_{r_0}$, 则 W_{r_0} 满足方程

$$r_0 D_r W_{r_0} = \frac{1}{\sigma(r_0)} + W_{r_0} \sigma(r_0) \frac{\partial^2 W_{r_0}}{\partial \theta^2}. \tag{7}$$

设 $w_n(r)$ 是算子 W_{r_0} 的 Fourier 表示, 由于 $\sigma(r)$ 是旋转不变量, 此时 $e^{in\theta}$ 是算子 W_{r_0} 的特征函数, 即

$$w_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} W_{r_0}(e^{in\cdot})(\theta) d\theta,$$

故 w_n 满足方程

$$r_0 \frac{dw_n}{dr} = \frac{1}{\sigma(r_0)} - n^2 \sigma(r_0) w_n^2. \tag{8}$$

式(8)即为二维形式的 Riccati 方程^[9-10], 是 Layer-Stripping 算法的基础.

下面考察方程(8)的稳定性. 引进新变量 p , 设 $p = r^n$, 定义

$$y_n(p) = n w_n(p^{1/n}) = n w_n(r),$$

则由式(8)可得关于 y_n 的方程

$$p \frac{dy_n}{dp} = \frac{1}{\sigma} - \sigma y_n^2. \tag{9}$$

假设 σ 在 $[p_0, p_1]$ 内为常数, 此时, 式(9)可化为

$$\int_{y_n(p_0)}^{y_n(p_1)} \frac{dy_n}{1 - (\sigma y_n)^2} = \frac{1}{\sigma} \int_{p_0}^{p_1} \frac{dp}{p},$$

从而有

$$\log \frac{p_1}{p_0} = \frac{1}{2} \log \left| \left(\frac{1 - \sigma y_n(p_0)}{1 + \sigma y_n(p_0)} \right) \left(\frac{1 + \sigma y_n(p_1)}{1 - \sigma y_n(p_1)} \right) \right|.$$

引进有理函数

$$M(t) = \frac{1-t}{1+t},$$

注意到 $M^{-1} = M$; 利用此性质, 有

$$y_n(p_0) = \frac{1}{\sigma} M \left(\left(\frac{p_1}{p_0} \right)^2 M(\sigma y_n(p_1)) \right) \tag{10}$$

或

$$y_n(p_1) = \frac{1}{\sigma} M \left(\left(\frac{p_0}{p_1} \right)^2 M(\sigma y_n(p_0)) \right). \tag{11}$$

特别地, 假设 σ 在 $[0, 1]$ 上为常数, 则式(9)的解为 $y_n = \frac{1}{\sigma}$.

另一方面, 假设给定的初始边值 $y_n^\varepsilon(1)$ 包含测量误差, 如可设 $y_n^\varepsilon(1) = (1 + \varepsilon) \frac{1}{\sigma}$, 则可得 $y_n(r)$ 的一个近似 $y_n^\varepsilon(r)$, 满足

$$y_n^\varepsilon(r) = \frac{1}{\sigma} M\left(\frac{1}{r^{2n}} M(1 + \varepsilon)\right) = \frac{1}{\sigma} \left(\frac{r^{2n} + \varepsilon/(2 + \varepsilon)}{r^{2n} - \varepsilon/(2 + \varepsilon)} \right),$$

易见当 r 趋于一临界值

$$r_n^* = \left(\frac{\varepsilon}{2 + \varepsilon} \right)^{1/(2n)} \quad (12)$$

时, $y_n^\varepsilon(r)$ 趋于无穷. 由上述分析可见, 当 n 逐渐增大时, 算法将变得不稳定. 式(12)将作为算法中参数选取的参考.

2 Layer-Stripping 算法及实现

先给出算子 W_{r_0} 在边界处的初始数据, 记为 $D(1, N) = \{w_n(1) : |n| \leq N\}$.

2.1 Layer-Stripping 算法

算法步骤如下:

1) 层的划分. 选取一个递减的半径序列 $a_i (0 \leq i \leq N+1)$, 即

$$0 = a_{N+1} < a_N < \cdots < a_0 = 1;$$

将单位圆盘分成若干圆环(层), 即

$$\Omega_i = \{x \in \mathbb{R}^2 : a_i < |x| \leq a_{i-1}\}, \quad 1 \leq i \leq N.$$

2) 各层上 σ 的重构. 设在每个 Ω_i 中, σ 为常数. 由文献[10]中的结果, 有

$$\lim_{|n| \rightarrow \infty} |n| w_n(r) = \frac{r}{\sigma(r)}, \quad r = a_0, a_1, \dots, a_N.$$

下面估计最外层 Ω_1 上的电导率, 取 $n = \pm N$, 则可得 $\sigma(a_0)$ 的近似 $\tilde{\sigma}(a_0)$, 记为 $\tilde{\sigma}_1$,

$$\tilde{\sigma}_1 = \tilde{\sigma}(a_0) = \frac{2a_0}{N(w_{-N} + w_N)}. \quad (13)$$

3) $w_n(r)$ 的计算. 设在整个 Ω_1 中, $\sigma(r) = \tilde{\sigma}_1$. 经典的 Layer-Stripping 算法是采用显式 Euler 格式, 在 Ω_1 中“传播”矩阵元 w_n : 选取步长 $\Delta \leq a_0 - a_1$, 结合式(8), 有

$$w_n(a_0 - \Delta) \approx w_n(a_0) - \Delta \frac{dw_n}{dr}(a_0) = w_n(a_0) - \frac{\Delta}{a_0} \left(\frac{1}{\sigma(a_0)} - n^2 \sigma(a_0) w_n^2(a_0) \right).$$

重复上式直至得到 $w_n(a_1)$. 但这种方法增加了算法的不稳定因素, 本文采用式(10)计算 $w_n(a_1)$, 得

$$w_n(a_1) = \frac{1}{n\tilde{\sigma}_1} M\left(\left(\frac{a_0}{a_1}\right)^{2n} M(n\tilde{\sigma}_1 w_n(a_0))\right), \quad (14)$$

从而获得了一组新的数据: $D(a_1, N-1) = \{w_n(a_1) : |n| \leq N-1\}$.

返回步骤2), 将 N 和 a_0 分别替换为 $N-1$ 和 a_1 , 重复执行上述步骤. 对所有的 $\Omega_i (i=1, 2, \dots, N)$ 逐层执行上述步骤, 便可得 $\sigma(r)$ 于 $a_{N+1} < r \leq a_0$ 处的近似 $\tilde{\sigma}_i (i=1, 2, \dots, N)$.

由于该算法是由外向内逐层重构 $\sigma(r)$, 故称其为 Layer-Stripping 算法.

下面考虑分层半径的选取.

首先, 实验表明待测物体中心处的电导率分布变化几乎不影响边界的测量数据, 故只能得到电导率在 $r \geq \alpha > 0$ 处的近似值, α 称为最小可测半径. 下面用3种方法划分重构层. 第一种方法是在 $a_0 = 1$ 和 a_N 之间选取等距半径

$$a_n = \alpha + \frac{1 - \alpha}{N - 1} (N - 1 - n), \quad 0 \leq n \leq N, \quad (15)$$

此时, 能数值重构出电导率 σ 的最后一个点是 $a_{N-1} = \alpha$.

其次, 由 Riccati 方程的稳定性讨论知, 重构层厚度应满足

$$r_n = \left(\frac{\varepsilon_n}{2 + \varepsilon_n} \right)^{1/(2|n|)}, \quad (16)$$

其中 ε_n 为每层的噪声水平. 于是, 第二种划分方法是利用式(16)选择:

$$a_n = a_N^{1/(N+1-n)}, \quad 1 \leq n \leq N.$$

为了与式(15)进行比较, 同样取 $a_{N-1} = \alpha$, 有

$$a_n = \alpha^{2/(N+1-n)}, \quad 1 \leq n \leq N. \quad (17)$$

称此节点集为“节点 1”.

最后, 假设 $\varepsilon_n = |n| \sigma_n \varepsilon$, 则式(16)有近似

$$r_n = \left(\frac{|n| \sigma_n \varepsilon}{2 + |n| \sigma_n \varepsilon} \right)^{1/(2|n|)} \approx \left(\frac{|n| \sigma_n \varepsilon}{2} \right)^{1/(2|n|)}. \quad (18)$$

基于此, 选取

$$a_n = ((N + 1 - n) a_N)^{1/(N+1-n)}, \quad 1 \leq n \leq N.$$

为了与式(15), (17)比较, 取 $a_{N-1} = \alpha$, 此时 $a_N = \alpha^2/2$, 于是有

$$a_n = \left(\frac{N + 1 - n}{2} \alpha^2 \right)^{1/(N+1-n)}, \quad 1 \leq n \leq N, \quad (19)$$

作为第三种重构层的划分方法, 称此节点集为“节点 2”.

2.2 数值实现

下面分别利用由式(15), (17)和(19)得到的 3 种不同重构层划分方法, 对电导率重构进行比较.

图 1 比较了“等距节点”和“节点 1”两种分层方法对常数电导率的重构; 图 2 比较了“节点 1”和“节点 2”两种分层方法对常数电导率的重构. 图 1 和图 2 中待测物体内部的电导率分布设为常数, 噪声水平为 0.001. 由图 1 和图 2 可见, “节点 1”和“节点 2”得到了比等距半径更好的近似, 并且“节点 2”比“节点 1”的误差更小.

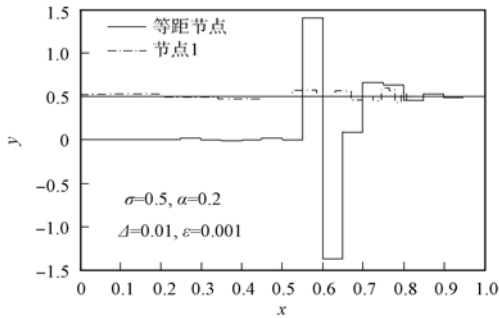


图 1 “等距节点”和“节点 1”两种分层方法对常数电导率的重构

Fig. 1 Reconstruction of constant conductivity by “equally spaced points” and “points 1”

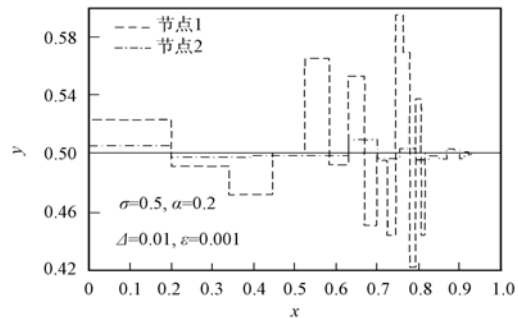


图 2 “节点 1”和“节点 2”两种分层方法对常数电导率的重构

Fig. 2 Reconstruction of constant conductivity by “points 1” and “points 2”

图 3 和图 4 分别比较了“节点 1”和“节点 2”在没有测量噪声及噪声水平为 0.000 5 两种情形下, 对分片常数电导率的重构. 其中实线表示实际的电导率分布. 由图 3 和图 4 可见, “节点 1”对噪声的变化比“节点 2”更敏感, 即在没有噪声时, 两种半径选取方法的重构效果差不多, 但当出现噪声时,

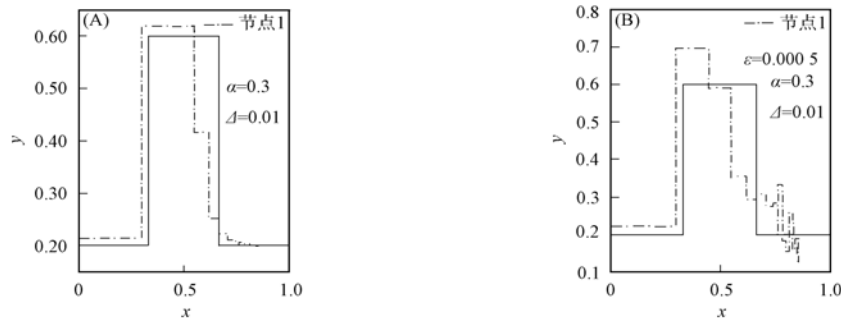


图 3 “节点 1”在没有噪声(A)和有噪声(B)两种情形下对分片常数电导率的重构

Fig. 3 Reconstruction of piecewise constant conductivity by “points 1” without noise (A) and with noise (B)

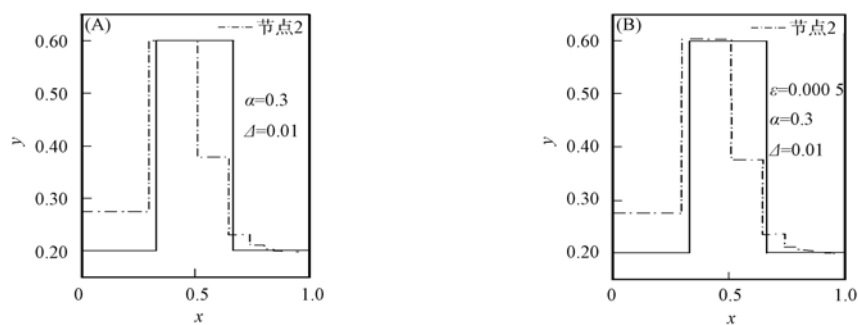


图4 “节点2”在没有噪声(A)和有噪声(B)两种情形下对分片常数电导率的重构

Fig. 4 Reconstruction of piecewise constant conductivity by “points 2” without noise (A) and with noise (B)

“节点2”的重构更稳定.

综上, 本文对径向对称分布电导率重构的 Layer-Stripping 方法理论及实现给出了一个初等直观地描述, 并且给出了分片常数电导率重构的算例. 在 Cheney 等^[10]的算法中, 并没有对分层半径给出特别的划分方法, 而本文通过对 Riccati 方程的稳定性分析, 给出了对重构层划分的 3 种方法, 改进了 Layer-Stripping 算法.

参 考 文 献

- [1] Calderón A P. On an Inverse Boundary Value Problem [J]. Comput Appl Math, 2006, 25(2/3): 133-138.
- [2] Sylvester J, Uhlmann G. A Global Uniqueness Theorem for an Inverse Boundary Value Problem [J]. Ann Math, 1987, 125(1): 153-169.
- [3] Nachman A I. Global Uniqueness for a Two-Dimensional Inverse Boundary Problem [J]. Ann Math, 1996, 143(1): 71-96.
- [4] Francini E. Recovering a Complex Coefficient in a Planar Domain from the Dirichlet-to-Neumann Map [J]. Inverse Problems, 2000, 16(1): 107-119.
- [5] Astala K, Päiväranta L. Calderón's Inverse Conductivity Problem in the Plan [J]. Ann Math, 2006, 163(1): 265-299.
- [6] Brown R M, Torres R H. Uniqueness in the Inverse Conductivity Problem for Conductivities with $3/2$ Derivatives in L^p for $p > 2n$ [J]. J Fourier Anal Appl, 2003, 9: 563-574.
- [7] Borcea L. Electrical Impedance Tomography [J]. Inverse Problems, 2002, 18: 99-136.
- [8] Somersalo E, Cheney M, Isaacson D. Existence and Uniqueness for Electrode Models for Electric Current Computed Tomography [J]. SIAM J Appl Math, 1992, 52(4): 1023-1040.
- [9] Cheney M, Isaacson D. Invariant Imbedding and Inverse Problems: Invariant Imbedding, Layer-Stripping, and Impedance Imaging [M]. Philadelphia, PA: SIAM, 1991: 42-50.
- [10] Cheney M, Isaacson D, Somersalo E. A Layer-Stripping Reconstruction Algorithm for Impedance Imaging [J]. Proc IEEE-EMBS Conf, 1992, 13: 66-75.

(责任编辑: 赵立芹)