云南大学学报（自然科学版），2006，28（2）：108~112　　CN 53－1045/N　ISSN 0258－7971
Journal of Yunnan University

轮询门限服务系统中信息分组等待时间的公平性问题分析*

赵进晓，赵东风，　洪伟
(云南大学 通信工程系,云南 昆明　650091)

摘要：采用概率母函数和随机过程的方法对轮询式门限服务系统中信息分组的等待时间的公平性问题进行分析，对 FIFO 与 FILO 2 种服务规则下的信息分组等待时间方差进行了对比，证明了轮询门限服务系统信息分组等待时间在 FIFO 服务规则下较 FILO 规则下有更好的公平性.

关键词：排队模型；平均等待时间；等待时间方差
中图分类号：TN 913.2　　文献标识码：A　　文章编号：0258－7971(2006)02－0108－05

轮询服务系统广泛应用于计算机通信网络、工业过程控制、物流管理等领域[1,2]. 所考虑的模型由 N 个站组成，一个服务员按照固定的圆周顺序服务各站，从一个站到下一个站有转换时间. 在门限服务规则下，服务器只处理来到 i 站($i=1,2,\cdots,n$)时查询到的信息分组. 当服务器对 i 号站进行服务时，可按先到先服务(FIFO)或先到后服务(FILO)规则对存储区中信息分组进行处理[3]. 2 种规则下信息分组平均等待时间相同，但 2 种规则显然有所不同.

概率母函数是一种对轮询门限服务系统进行分析的有效方法[4~7]. 本文在文献[4]的基础上比较了 2 种规则下信息分组等待时间方差的大小，区别了 2 种服务规则.

1　轮询门限服务系统母函数及各阶导数

引理 **1**　由参考文献[4]，轮询门限服务系统母函数及各阶导数分别如下：

系统母函数

$$G_{i+1}(z_1,z_2,\cdots,z_i,\cdots,z_n)=R\left[\prod_{j=1}^{N}A(z_j)\right]G_i\left[z_1,z_2,\cdots,B\left(\prod_{j=1}^{N}A(z_j)\right),z_{j+1},\cdots,z_N\right],\qquad(1)$$

一阶导数

$$g_i(i)=\lim_{z_1,z_2,\cdots,z_N\to 1}\frac{\partial G_i(z_1,z_2,\cdots,z_i,\cdots,z_N)}{\partial z_i}=\frac{\gamma\lambda}{1-N\rho}N,\qquad(2)$$

二阶导数

$$g_i(i,i)=\lim_{z_1,z_2,\cdots,z_i,\cdots,z_N\to 1}\frac{\partial^2 G_i(z_1,z_2,\cdots,z_i,\cdots,z_N)}{\partial z_i^2}=$$

$$\frac{N}{(1/\rho)(1-N\rho)}\left\{\lambda^2R''(1)+\frac{1}{1-N\rho}\left[(N+2N\rho-1)\gamma^2\lambda^2+(N-1)\gamma\lambda^2\rho+\right.\right.$$
$$\left.\left.(1+\rho-N\rho)\gamma A''(1)+N\gamma\lambda^3B''(1)\right]\right\},\qquad i=1,2,\cdots,N,\qquad(3)$$

* 收稿日期：2005－06－07
基金项目：国家 863/CIM 主题资助项目(60362001，F0424104)；云南省自然科学基金资助项目(2003F0014M).
作者简介：赵进晓(1981－　)，男，硕士生，主要从事计算机网络方面的研究.
通讯作者：赵东风(1957－　)，男，博士生导师，教授，主要从事计算机网络、随机多址系统、通信网络工程方面的研究工作.

其中, $A(Z)$, $R(Z)$, $B(Z)$ 分别为任意终端站单位时隙内信息分组到数, 任何逻辑相连终端站间查询转换时间, 任一个信息分组接受服务所需时间所对应的概率母函数.

又有 $\lambda = A'(1)$, $\delta_\lambda^2 = A''(1) + \lambda - \lambda^2$; $\gamma = R'(1)$, $\delta_\gamma^2 = R''(1) + \gamma - \gamma^2$; $\beta = B'(1)$, $\delta_\beta^2 = B''(1) + \beta - \beta^2$; $\lambda\beta = N\rho$.

由于三阶导数解析式计算过程极其繁琐, 以下仅给出定义式.

三阶导数 $$g_i(i,i,i) = \lim_{z_1, z_2, \dots, z_i, \dots, z_N \to 1} \frac{\partial^3 G_i(z_1, z_2, \dots, z_i, \dots, z_N)}{\partial z_i^3}, \qquad i = 1, 2, \dots, N. \tag{4}$$

由母函数性质可知 $g_i(i,i,i) \geqslant 0$.

2　平均等待时间分析

当系统有 N 个终端, 且在 $\sum_{i=1}^{N} \lambda\beta = N\rho < 1$ 的条件下, 系统处于稳态[4]. 在文献[4]的基础上, 假设信息分组到达过程是一个独立增量过程, 而其在每个时隙期内的假设不变. 由文献[4], 在一个循环期 $\theta(n)$ 内进入 i 号终端存储器内的信息分组有 $\xi_i(n)$ 个. $\theta(n)$ 定义为服务器先后 2 次查询到第 i 号终端站所经过的时间, 即 $\theta(n) = t_{n+1} - t_n$, 其中 t_{n+1}, t_n 分别表示服务器第 $n+1$ 次与第 n 次查询到 i 号终端站的时刻.

该 $\xi_i(n)$ 个信息分组中第 j 个在 i 号终端存储器内等待发送的时间为

$$w_i^j(n) = w_{i,1}^j(n) + w_{i,2}^j(n), \qquad i = 1, 2, \dots, N; \ j = 1, 2, \dots, \xi_i(n). \tag{5}$$

在 FIFO 规则下, 式中

$$\begin{aligned} w_{i,1}^j(n) &= s_{i,j+1}(n) + s_{i,j+2}(n) + \cdots + s_{i,\xi_i(n)}(n), \\ w_{i,2}^j(n) &= v_{i,1}(n) + v_{i,2}(n) + \cdots + v_{i,j-1}(n). \end{aligned} \tag{6}$$

在 FILO 规则下, 式中

$$\begin{aligned} w_{i,1}^j(n) &= s_{i,j+1}(n) + s_{i,j+2}(n) + \cdots + s_{i,\xi_i(n)}(n), \\ w_{i,2}^j(n) &= v_{i,j+1}(n) + v_{i,j+2}(n) + \cdots + v_{i,\xi_i(n)}(n), \end{aligned} \tag{7}$$

$s_{i,j+1}(n)$: 第 j 个分组进入贮存器到第 $j+1$ 个分组进入贮存器的时间; $v_{i,j-1}(n)$: i 号终端站发送第 $j-1$ 个分组所需时间.

定理 1　在轮询式门限服务系统中, 若采取 FIFO 服务规则, 信息分组的平均等待时间

$$\overline{W}_G^F = \frac{g_i(i,i)}{2\lambda g_i(i)} + \frac{\beta \cdot g_i(i,i)}{2 g_i(i)}.$$

证明　将门限式轮询服务系统 FIFO 规则下信息分组等待时间记为 W_G^F, 又由(5)式每个信息分组的等待时间由 2 部分组成, 则可得 $W_G^F = W_G^{F,1} + W_G^{F,2}$.

结合(6)式, 由下面 2 式计算出 $W_G^{F,1}$, $W_G^{F,2}$ 的均值

$$\overline{W}_G^{F,1} = \lim_{T\to\infty} \frac{\sum_{n=1}^{T} \sum_{j=1}^{j=\xi_i(n)} w_{i,1}^j(n)}{\sum_{n=1}^{T} \xi_i(n)} = \frac{E\left[\sum_{j=1}^{j=\xi_i(n)} w_{i,1}^j(n)\right]}{E[\xi_i(n)]} = \frac{g_i(i,i)}{2\lambda g_i(i)}, \tag{8}$$

$$\overline{W}_G^{F,2} = \lim_{T\to\infty} \frac{\sum_{n=1}^{T} \sum_{j=1}^{j=\xi_i(n)} w_{i,2}^j(n)}{\sum_{n=1}^{T} \xi_i(n)} = \frac{E\left[\sum_{j=1}^{j=\xi_i(n)} w_{i,2}^j(n)\right]}{E[\xi_i(n)]} = \frac{\beta \cdot g_i(i,i)}{2 g_i(i)}. \tag{9}$$

将(8), (9)结果相加得到

$$\overline{W}_G^F = \overline{W}_G^{F,1} + \overline{W}_G^{F,2} = \frac{g_i(i,i)}{2\lambda g_i(i)} + \frac{\beta \cdot g_i(i,i)}{2 g_i(i)}. \tag{10}$$

定理得证.

定理 2 在轮询式门限服务系统中, 若采取 FIFO 服务规则, 信息分组的平均等待时间

$$\widetilde{W}_G^L = \frac{g_i(i,i)}{2\lambda g_i(i)} + \frac{\beta\cdot g_i(i,i)}{2g_i(i)}.$$

证明 将门限式轮询服务系统 FILO 规则下信息分组等待时间记为 W_G^L, 又由(5) 式每个信息分组的等待时间由 2 部分组成, 则可得 $W_G^L = W_G^{L,1} + W_G^{L,2}$.

结合(7) 式, 由下面 2 式计算出 $W_G^{L,1}$, $W_G^{L,2}$ 的均值

$$\widetilde{W}_G^{L,1} = \lim_{T\to\infty}\frac{\sum_{n=1}^{T}\sum_{j=1}^{j=\xi_i(n)} w_{i,1}^{j}(n)}{\sum_{n=1}^{T}\xi_i(n)} = \frac{E\left[\sum_{j=1}^{j=\xi_i(n)} w_{i,1}^{j}(n)\right]}{E[\xi_i(n)]} = \frac{g_i(i,i)}{2\lambda g_i(i)}, \tag{11}$$

$$\widetilde{W}_G^{L,2} = \lim_{T\to\infty}\frac{\sum_{n=1}^{T}\sum_{j=1}^{j=\xi_i(n)} w_{i,2}^{j}(n)}{\sum_{n=1}^{T}\xi_i(n)} = \frac{E\left[\sum_{j=1}^{j=\xi_i(n)} w_{i,2}^{j}(n)\right]}{E[\xi_i(n)]} = \frac{\beta\cdot g_i(i,i)}{2g_i(i)}. \tag{12}$$

将(11), (12) 式结果相加得到

$$\widetilde{W}_G^L = \widetilde{W}_G^{L,1} + \widetilde{W}_G^{L,2} = \frac{g_i(i,i)}{2\lambda g_i(i)} + \frac{\beta\cdot g_i(i,i)}{2g_i(i)}. \tag{13}$$

定理得证.

由定理 1 及定理 2 可以看出, 在轮询式门限服务系统中, 采用 FIFO 与 FILO 服务规则信息分组的平均等待时间是相同的.

3 等待时间方差

定理 3 轮询式门限服务系统中信息分组等待时间在 FIFO 规则下方差

$$D[W_G^F] = \left\{\left[\frac{1}{6\lambda^2} + \frac{1}{6}(\delta_\beta^2 + \beta^2 - \beta)\right][g_i(i,i,i) + 3g_i(i,i)] + \frac{\beta}{3\lambda}g_i(i,i,i)\right\}\cdot\frac{1}{g_i(i)} - \left[\frac{g_i(i,i)}{2\lambda g_i(i)} + \frac{\beta\cdot g_i(i,i)}{2g_i(i)}\right]^2.$$

证明 $D[W_G^L] = E[(W_G^L)^2] - E[W_G^L]^2 = \lim_{T\to\infty}\frac{\sum_{n=1}^{T}\sum_{j=1}^{j=\xi_i(n)}[w_{i,1}^{j}(n) + w_{i,2}^{j}(n)]^2}{\sum_{n=1}^{T}\xi_i(n)} - (\widetilde{W}_G^L)^2 =$

$$\frac{E\left\{\sum_{j=1}^{\xi_i(n)}[w_{i,1}^{j}(n) + w_{i,2}^{j}(n)]^2\right\}}{E[\xi_i(n)]} - (\widetilde{W}_G^L)^2 =$$

$$\left\{\left[\frac{1}{6\lambda^2} + \frac{1}{6}(\delta_\beta^2 + \beta^2 - \beta)\right][g_i(i,i,i) + 3g_i(i,i)] + \frac{\beta}{3\lambda}g_i(i,i,i)\right\}\cdot\frac{1}{g_i(i)} - \left[\frac{g_i(i,i)}{2\lambda g_i(i)} + \frac{\beta\cdot g_i(i,i)}{2g_i(i)}\right]^2. \tag{14}$$

定理得证[8].

定理 4 轮询式门限服务系统中信息分组等待时间在 FILO 规则下方差

$$D[W_G^L] = \left\{\left[\frac{1}{6\lambda^2} + \frac{1}{6}(\delta_\beta^2 + \beta^2 - \beta)\right][g_i(i,i,i) + 3g_i(i,i)] + \frac{\beta}{3\lambda}[2g_i(i,i,i) + 3g_i(i,i)]\right\}\cdot$$

$$\frac{1}{g_i(i)} - \left[\frac{g_i(i,i)}{2\lambda g_i(i)} + \frac{\beta \cdot g_i(i,i)}{2g_i(i)}\right]^2.$$

证明　$D[W_G^L] = E\left[(W_G^L)^2\right] - E[W_G^L]^2 = \lim_{T \to \infty} \dfrac{\sum_{n=1}^{T} \sum_{j=1}^{j=\xi_i(n)} [w_{i,1}^j(n) + w_{i,2}^j(n)]^2}{\sum_{n=1}^{T} \xi_i(n)} - (\widetilde{W}_G^L)^2 =$

$$\frac{E\left\{\sum_{j=1}^{\xi_i(n)} [w_{i,1}^j(n) + w_{i,2}^j(n)]^2\right\}}{E[\xi_i(n)]} - (\widetilde{W}_G^L)^2 =$$

$$\left\{\left[\frac{1}{6\lambda^2} + \frac{1}{6}(\delta_\beta^2 + \beta^2 - \beta)\right][g_i(i,i,i) + 3g_i(i,i)] + \frac{\beta}{3\lambda}[2g_i(i,i,i) + 3g_i(i,i)]\right\} \cdot \frac{1}{g_i(i)} - \left[\frac{g_i(i,i)}{2\lambda g_i(i)} + \frac{\beta \cdot g_i(i,i)}{2g_i(i)}\right]^2. \tag{15}$$

定理得证.

将 2 种服务规则下的方差相减, 得到

$$D[W_G^L] - D[W_G^F] = \frac{\beta}{3\lambda} \frac{[g_i(i,i,i) + 3g_i(i,i)]}{g_i(i)}. \tag{16}$$

由于 $g_i(i,i) \geqslant 0$, $g_i(i,i,i) \geqslant 0$, 所以 $D[W_G^L] - D[W_G^F] \geqslant 0$. 即轮询式门限服务系统在 FILO 规则下等待时间方差大于在 FIFO 规则下等待时间方差.

4　计算机仿真实验

在以上分析结果的基础上, 我们对查询式门限服务排队系统进行了计算机仿真实验, 并假定信息分组的到达过程为 Poisson 分布, 信息分组长度 1 000 bit, 信道速率 10 M bit/ s, 查询转换时间为 10 μs, 系统的时隙宽度取 10 μs. 理论计算及计算机仿真结果如表 1 所示.

表 **1**　信息分组平均等待时间及等待时间均方差(λ= **0. 003** 分组/ 时隙)

Tab. 1 Average waiting time and variance of waiting time

N	平均等待时间 (理论值)	平均等待时间 (仿真值)	等待时间均方差 (FIFO)	等待时间均方差 (FILO)
5	3. 412	3. 403	3. 995	4. 041
6	4. 367	4. 391	4. 688	4. 792
7	5. 392	5. 395	5. 569	5. 737
8	6. 500	6. 521	6. 309	6. 595
9	7. 699	7. 700	7. 389	7. 506
10	9. 000	9. 038	8. 125	8. 531
15	17. 636	17. 625	14. 957	15. 550
20	32. 750	32. 767	26. 699	27. 644

5 结束语

在轮询门限服务系统中,在平均等待时间的意义上,FIFO 与 FILO 2 种规则没有体现差别. 然而从直观上可以感觉, FILO 规则会导致部分信息分组等待时间极短而另一部分分组等待时间极长, 这样必然导致用户使用系统时公平性降低. 本文通过比较 2 种规则下信息分组等待时间方差的不同, 区别了 2 种规则下系统的状态, 同时说明了公平性与等待时间方差存在联系.

从表 1 中给出的数值可看出, 理论分析与计算机仿真的结果是一致的.

致谢: 对赵东风教授的指导与鼓励表示衷心的感谢!

参考文献:

[1] KLEINROCK L, TOBAGI F A. Packet switching in radio channels: Part I– Carrier sense multiple-access modes and their throughput-delay characteristics[J]. IEEE Trans Commun, 1975, COM– 23: 1 400-1 416.

[2] TSKAGIi H. Mean message L F M. Message daley analysis for polling and token mutiple-access scheme for local communication networks[J]. IEEE J Select Areas Commun, 1983, SAC– 1(5): 935.

[3] 华兴. 排队论与随机服务系统[M]. 上海: 上海翻译出版公司, 1987.

[4] 赵东风, 郑苏民. 查询式门限服务排队系统中信息分组的延迟分析[J]. 通信学报, 1994, 15(2): 18-23.

[5] 赵东风, 李必海, 郑苏民. 周期查询式限定服务排队系统研究[J]. 电子科学学刊, 1997, 19(1): 44-49.

[6] 熊林平, 汪荣鑫. 圆周服务系统分析方法研究[J]. 数理医药学杂志, 1994, 7(2): 108-111.

[7] 侯芬, 赵东风. 一种多媒体对称周期查询传输系统分析[J]. 云南大学学报: 自然科学版, 2000, 22(3): 177-180.

[8] 盛聚, 谢式千, 潘承毅. 概率论与数理统计[M]. 北京: 高等教育出版社, 1997.

The impartiality of waiting time analysis for a polling system with gated service

ZHAO Jin-xiao, ZHAO Dong-feng, DING Hong-wei

(Department of Communication Engineering, Yunnan University, Kunming 650091, China)

Abstract: It is analyzed the impartiality of waiting time during message grouping in the polling system with gated services. Our analysis is based on the generating function and stochastic process methods. The variances of waiting during message grouping are compared with respect to the strategies under FIFO and FILO rules respectively. Consequertly, the analysis proves that the waiting time under FIFO has better impartiality than that under FILO in the polling system with gated services.

Key words: queueing model; expected value of waiting time; mellowness of waiting time